文章编号:1000-1638(2026)01-0048-06 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20260105

算子方程$AXA=BX=XAX$的可解性*

曹 翔[1],海国君[1],乔宏伟[2]

(1. 内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021; 2. 内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022)

摘 要:设A和B是作用在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的有界线性算子。首先给出算子方程$AXA=BX=XAX$的可解性与B的非平凡不变子空间的关系,再利用*-偏序和不变子空间等方法研究算子方程$AXA=BX=XAX$的幂等解的存在性。

关键词:算子方程; 不变子空间; 幂等算子

中图分类号:O177.1 **文献标志码**:A

算子方程本质上是对有限维矩阵方程进行无穷维空间拓展的结果,已成为现代算子理论研究体系的重要组成部分。在工程力学[1-5]和流体力学[6-13]等领域的实际问题中,控制方程多数以微分方程的形式呈现,且都可以转化为非线性算子方程。由于非线性算子方程求解过程比较困难,探索其解的存在性与具体表达式已成为现代数学研究的重点课题,具有重要的理论价值与应用价值。

1954年,Aronszajn等[14]利用非平凡不变子空间讨论了算子方程$XAX=AX$解的存在性。在此基础上,Holbrook等[15]根据A在其任意不变子空间的限制具有稠值域,给出了$XAX=AX$具有幂等解的充要条件。2003年,An等[16]借助A的不变子空间给出了$XAX=AX$解的具体表达式。随着算子方程的不断发展,许多学者开始研究算子方程$XAX=BX$,即Riccati方程$XAX+XC-BX-D=0$的特殊形式。2022年,Wang等[17]利用*-偏序和非平凡不变子空间给出了算子方程$XAX=BX$存在非零解的充要条件。此外,Wang等[18]基于上述方法给出了$XAX=BX$解的表示。Deng等[19]根据值域的包含关系和非平凡不变子空间,研究了$XAX=BX$解或幂等解存在的条件并给出了其通解的新表示。更多关于$XAX=BX$的内容见文献[20-21],但关于算子方程$AXA=BX=XAX$的研究,目前还没有文献涉及。

本文主要研究算子方程
$$AXA=BX=XAX$$
的可解性,其中$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$和$B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是已知的。首先给出了算子方程$AXA=BX=XAX$的可解性与$B$的非平凡不变子空间的关系,再借助*-偏序、单射和不变子空间等方法研究算子方程$AXA=BX=XAX$的幂等解的存在性。

1 预备知识

设$\mathcal{H}$表示可分的无穷维复Hilbert空间,$\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}$的有界线性算子构成的全体。对任意

* **收稿日期**:2025-03-02; **修回日期**:2025-08-18
基金项目:内蒙古自治区自然科学基金项目(2020ZD01,2024QN01003);无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课题(2023KFZD01);内蒙古自治区高校创新团队发展计划项目(NMGIRT2317);内蒙古自治区一流学科科研专项(YLXKZX-NSD-017)
作者简介:曹翔(2000—),女,内蒙古乌兰察布人,2022级硕士研究生。E-mail:13015030113@163.com
通信作者:海国君(1983—),男(蒙古族),内蒙古通辽人,教授,博士。主要从事算子理论研究。E-mail:haigj@imu.edu.cn

算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$A^*$、$\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示 A 的共轭、零空间和值域。$\overline{\mathcal{R}(A)}$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的闭包。若 $\mathcal{N}(A)=\{0\}$，则称 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是单射。设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{H}$。$A$ 在子空间 $\mathcal{M}$ 的限制用 $A|_{\mathcal{M}}$ 表示，并且 $A|_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 的算子。容易发现，对 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 $\mathcal{M}$，用 $P_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的正交投影。如果 $A^2=A$，则称 A 是幂等算子。

定义1[22]　设 A 是从线性空间 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的线性算子。集合

$$\mathcal{R}(A)=\{Ax : x\in\mathcal{X}\}$$

称为 A 的值域，集合

$$\mathcal{N}(A)=\{x\in\mathcal{X} : Ax=0\}$$

称为 A 的零空间。

注：设 A 是 $\mathcal{X}$ 上的线性算子，则 $\{0\}=\mathcal{N}(A^0)\subset\mathcal{N}(A)\subset\mathcal{N}(A^2)\subset\cdots$。

定义2[23]　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$M$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭线性子空间。若 $x\in M$，有 $Ax\in M$，即 $AM\subseteq M$，则称 M 是 A 的一个不变子空间。若 M 不等于 $\mathcal{H}$ 和 $\{0\}$，则称 M 是 A 的一个非平凡不变子空间。

定义3[24]　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。$A$ 和 B 的 $*$-偏序 $A\overset{*}{\leqslant}B$ 表示为

$$AA^*=BA^*, A^*A=A^*B,$$

其中，左 $*$-偏序 $A*\leqslant B$ 表示为 $A^*A=A^*B$，且 $\mathcal{R}(A)\subseteq\mathcal{R}(B)$；右 $*$-偏序 $A\leqslant *B$ 表示为 $AA^*=BA^*$，且 $\mathcal{R}(A^*)\subseteq\mathcal{R}(B^*)$。

引理1[25]　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，有下列陈述成立。

① $A*\leqslant B$ 可以推出 $A=P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}B$，$A\leqslant *B$ 可以推出 $A=BP_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}$；

② $A\overset{*}{\leqslant}B$ 可以推出 $\mathcal{R}(A)\subseteq\mathcal{R}(B)$，$\mathcal{R}(A^*)\subseteq\mathcal{R}(B^*)$；

③ $A\overset{*}{\leqslant}B$ 可以推出 $A=P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}B=BP_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}$；

④ $A\overset{*}{\leqslant}B$ 可以推出 $A*\leqslant B$ 且 $A\leqslant *B$。

引理2[26]　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 $B*\leqslant A$。如果算子方程 $XAX=BX$ 的解 X 满足 $\mathcal{R}(X)\subseteq\overline{\mathcal{R}(B^*)}$，则算子方程 $XAX=BX$ 的解也是算子方程 $XAX=AX$ 的解。此外，如果 A 在其任意不变子空间的限制具有稠值域，则 $XAX=BX$ 的解是幂等的。

引理3[17]　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 $A*\leqslant B$。如果 B 对其不变子空间的限制具有稠值域，则算子方程 $XAX=BX$ 的解 X 满足 $XP_{\overline{\mathcal{R}(A)}}X=X$。此外，如果 $\mathcal{R}(X)\subseteq\overline{\mathcal{R}(A)}$，则 $XAX=BX$ 的解是幂等的。

2　主要结果及证明

定理1　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。如果 $AXA=BX=XAX$ 有非零解 X_0，且 $B^2\neq AX_0A^2$，则 $\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)$ 是 B 的非平凡不变子空间。

证明　先证 $\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)$ 是非平凡子空间。设 $X_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $AXA=BX=XAX$ 的非零解，$B^2\neq AX_0A^2$，则

$$\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)\neq\{0\}, \mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)\neq\mathcal{H}。$$

事实上，若 $\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)=\{0\}$，则 $(AX_0A^2-B^2)X_0=0$ 等价于 $X_0=0$，这与已知条件矛盾。若 $\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)=\mathcal{H}$，可得 $B^2=AX_0A^2$，这也与已知条件矛盾。

再证 $\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)$ 是 B 的不变子空间。任取 $x\in\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)$，则 $AX_0A^2x=B^2x$。注意到 $AX_0A=BX_0=X_0AX_0$，因此

$$AX_0A^2X_0=BX_0AX_0=B^2X_0=BAX_0A,$$

从而

$$\begin{aligned}(AX_0A^2-B^2)Bx&=AX_0A^2Bx-BB^2x\\&=AX_0A^2X_0Ax-BAX_0A^2x\\&=(AX_0A^2X_0-BAX_0A)Ax\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$Bx\in\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2),$$

所以,$\mathcal{N}(AX_0A^2-B^2)$是B的非平凡不变子空间。

定理 2 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$和$B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。如果$AXA=BX=XAX$有非零解$X_0$,且$B^2\neq AX_0A^2$,则对于任意的正整数$n$,有$B^2\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)$,且$\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)$是$B^2$的不变子空间。

证明 由数学归纳法可证。任取$n\geqslant 1$,

$$(AX_0A^2)^{n+1}=(B^2)^nAX_0A^2,$$

从而

$$(AX_0A^2-B^2)^{n+1}=(-1)^n(AX_0A^2-B^2)(B^2)^n \tag{1}$$

下面证任意$x\in\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)$,有$B^2x\in\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)$。若$x\in\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)$,则$(AX_0A^2-B^2)^{n+1}x=0$。根据式(1)可知

$$(-1)^n(AX_0A^2-B^2)(B^2)^nx=0,$$

即$(AX_0A^2-B^2)B^{2n}x=0$,从而

$$\begin{aligned}(AX_0A^2-B^2)^nB^2x&=(-1)^{n-1}(AX_0A^2-B^2)B^{2n-2}B^2x\\&=(-1)^{n-1}(AX_0A^2-B^2)B^{2n}x\\&=0。\end{aligned}$$

故

$$B^2\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)。$$

又因为

$$\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right),$$

所以

$$B^2\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^{n+1}\right)。$$

因此,任取正整数n,$\mathcal{N}\left((AX_0A^2-B^2)^n\right)$是$B^2$的不变子空间。

推论 1 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。如果$AXA=AX=XAX$有非零解$X_0$,则$\mathcal{N}(AX_0A^2-A^2)$是$A$的非平凡不变子空间。此外,对于任意的正整数$n$,有$A^2\mathcal{N}\left((AX_0A^2-A^2)^{n+1}\right)\subseteq\mathcal{N}\left((AX_0A^2-A^2)^n\right)$,且$\mathcal{N}\left((AX_0A^2-A^2)^n\right)$是$A^2$的不变子空间。

定理 3 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$和$B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。如果$B\leqslant *A$,且$AXA=BX=XAX$的解$X_0$满足$\mathcal{R}(X_0)\subseteq\overline{\mathcal{R}(B^*)}$,则$X_0$是$AXA=AX=XAX$的解。此外,如果$A$在其任意不变子空间的限制具有稠值域,$A$

是单射，则 $AXA=BX=XAX$ 的解是幂等的，并且此幂等解与 A 可交换。

证明　根据引理 2 可知，$X_0AX_0=AX_0$。由于 $AX_0A=X_0AX_0$，则 $AX_0A=AX_0=X_0AX_0$。因此 X_0 是 $AXA=AX=XAX$ 的解。因为 $AX_0=X_0AX_0$，所以

$$(I-X_0)AX_0=0,$$

且 $A\overline{\mathcal{R}(X_0)}\subseteq\overline{\mathcal{R}(X_0)}$，因此 $\overline{\mathcal{R}(X_0)}$ 是 A 的不变子空间。如果 A 在其任意不变子空间的限制具有稠值域，则 $\overline{\mathcal{R}(AX_0)}=\overline{\mathcal{R}(X_0)}$。结合 $(I-X_0)AX_0=0$ 可知

$$(I-X_0)X_0=0,$$

即 $X_0=X_0{}^2$。又因为 $AX_0=AX_0A$，所以 $AX_0(A-I)=0$。由于 A 是单射，从而

$$X_0(A-I)=0,$$

即 $X_0A=X_0$，结合 $X_0AX_0=AX_0$ 及 $X_0{}^2=X_0$ 可知

$$X_0A=AX_0。$$

故 $AXA=BX=XAX$ 的解是幂等的，并且此幂等解与 A 可交换。

命题 1　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，若 $AXB=B=BXA$ 与 $AXA=BX=XAX$ 有公共解 X_0，则下列条件成立。

① 若 B 是单射，则 X_0A 与 X_0 可交换；

② 若 B 是单射，X_0 与 B 可交换，则 A 与 X_0A 可交换。

证明　由于 $AXB=B=BXA$ 与 $AXA=BX=XAX$ 有公共解 X_0，则 $AX_0A^2=AX_0B$，即 $AX_0(A^2-B)=0$，进而 $BX_0(A^2-B)=0$。

① 如果 B 是单射，由 $BX_0(A^2-B)=0$ 推出 $X_0(A^2-B)=0$，即 $X_0A^2=X_0B$，进而 $X_0A^2X_0=X_0BX_0$，因此 $X_0A(AX_0-X_0A)=0$。结合 $AX_0A=BX_0$ 可知，$BX_0(AX_0-X_0A)=0$。再由 B 的单射性可知，$X_0(AX_0-X_0A)=0$，故 X_0A 与 X_0 可交换。

② 若 X_0 与 B 可交换，即 $X_0B=BX_0$，从条件①可知 $X_0B=X_0A^2$。由于 $BX_0=AX_0A$，则 $X_0A^2=AX_0A$。因此 A 与 X_0A 可交换。

此外，若 $AXB=B=BXA$ 与 $AXA=BX=XAX$ 有单射的公共解 X_0，根据条件①可知，$X_0(A^2-B)=0$，则 $B=A^2$。

推论 2　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，若方程 $AXA=A=AX=XAX$ 有公共解 X_0，则 A 是幂等算子，且 X_0 与 A 可交换。

证明　由于方程 $AXA=A=AX=XAX$ 有公共解 X_0，则 $AX_0A=A=AX_0=X_0AX_0$。注意到 $AX_0=A$，故 $A=A^2$，因此 A 是幂等算子。结合 $AX_0=A$ 可知

$$X_0AX_0=X_0A,$$

即 $X_0A=AX_0$，从而 X_0 与 A 可交换。

定理 4　设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，如果 $A*\leqslant B$，A 是单射，并且 B 对其不变子空间的限制具有稠值域，则 $AXA=BX=XAX$ 的解 X 满足 $XA=X=XP_{\overline{\mathcal{R}(A)}}X$。此外，如果 $\mathcal{R}(X)\subseteq\overline{\mathcal{R}(A)}$，则 $AXA=BX=XAX$ 的解是幂等的，并且此幂等解与 A 可交换。

证明　由引理 3 可知，算子方程 $XAX=BX$ 的解 X 满足 $XP_{\overline{\mathcal{R}(A)}}X=X$。若 $AXA=BX$，结合 $A*\leqslant B$ 和引理 1 可知

$$P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}BXA=BX。$$

故 $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}BX(A-I)=0$，即

$$AX(A-I)=0。$$

因为 A 是单射，所以 $X(A-I)=0$。故 $AXA=BX=XAX$ 的解满足

$$XA = X = XP_{\overline{\mathcal{R}(A)}}X。$$

此外,若$\mathcal{R}(X) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$,则$XA = X = X^2$。因为$XAX = BX$,所以$B\,\overline{\mathcal{R}(X)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(X)}$,即$\overline{\mathcal{R}(X)}$是$B$的不变子空间。由$B$对其不变子空间的限制具有稠值域可知,$\overline{\mathcal{R}(BX)} = \overline{\mathcal{R}(X)}$,从而$AX = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}BX = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}X = X$,即$AX = XA$。因此$AXA = BX = XAX$的解是幂等的,并且此幂等解与$A$可交换。

定理 5 设$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$和$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,如果$B \overset{*}{\leqslant} A$,$\overline{\mathcal{R}(BX)} = \overline{\mathcal{R}(X)}$,$\overline{\mathcal{R}(B^*)} = \overline{\mathcal{R}(B)}$,$A$是单射,则$XABX = BX = ABXA$当且仅当$XAX = X = AXA$。

证明 必要性。由于$XABX = BX$,则$(XA - I)BX = 0$。根据$\overline{\mathcal{R}(BX)} = \overline{\mathcal{R}(X)}$可知

$$(XA - I)\Big|_{\overline{\mathcal{R}(BX)}} = (XA - I)\Big|_{\overline{\mathcal{R}(X)}} = 0,$$

从而$XAX = X$。注意到$B \overset{*}{\leqslant} A$,利用引理 1 得$B = AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}$。结合$BX = ABXA$可知

$$AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X = AAP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}XA。$$

因为$\overline{\mathcal{R}(BX)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(B)}$,所以$\overline{\mathcal{R}(X)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(B^*)}$。故$AX = A^2XA$,即

$$A(X - AXA) = 0,$$

从而

$$\mathcal{R}(X - AXA) \subseteq \mathcal{N}(A)。$$

又因为A的单射性可知$X = AXA$。因此,$XAX = X = AXA$。

充分性。因为$XAX = X$,故$(XA - I)X = 0$,由$\overline{\mathcal{R}(BX)} = \overline{\mathcal{R}(X)}$推得

$$(XA - I)BX = 0,$$

即$XABX = BX$。因为$X = AXA$,所以$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}X = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AXA$。注意到$B = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}A$,且$\overline{\mathcal{R}(B^*)} = \overline{\mathcal{R}(B)}$,故

$$ABXA = AP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AXA,\ BX = AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X = AP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}X,$$

所以$BX = ABXA$。因此,$XABX = BX = ABXA$。

参考文献:

[1] GHANEM R G, SPANOS P D. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, 117(10): 2351-2372.

[2] BEARD R W. Linear operator equations with applications in control and signal processing[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2002, 22(2): 69-79.

[3] COIMBRA C F M. Mechanics with variable-order differential operators[J]. Annalen der Physik, 2003, 515(11/12): 692-703.

[4] KOUGIOUMTZOGLOU I A, SPANOS P D. An analytical wiener path integral technique for non-stationary response determination of nonlinear oscillators[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, 28: 125-131.

[5] KRAMER B, PEHERSTORFER B, WILLCOX K E. Learning nonlinear reduced models from data with operator inference[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2024, 56(1): 521-548.

[6] 王晓民,苏道毕力格,特木尔朝鲁. 对称方法在非线性偏微分方程边值问题中的应用[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2013, 44(2): 129-132.

[7] MEZIĆ I. Analysis of fluid flows via spectral properties of the koopman operator[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2013, 45(1): 357-378.

[8] EMMRICH E, MEHRMANN V. Operator differential-algebraic equations arising in fluid dynamics[J]. Computational Methods in Applied Mathematics, 2013, 13(4): 443-470.

[9] ADOMIAN G. A new approach to nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1984, 102(2): 420-434.

[10] NAZ R, MAHOMED F M, MASON D P. Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 205(1): 212-230.
[11] LADOPOULOS E G, ZISIS V A. Existence and uniqueness for non-linear singular integral equations used in fluid mechanics[J]. Applications of Mathematics, 1997, 42(5): 345-367.
[12] BUSTINZA R, GATICA G N. A mixed local discontinuous Galerkin method for a class of nonlinear problems in fluid mechanics[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2): 427-456.
[13] HUILGOL R R, KEFAYATI G H R. Natural convection problem in a Bingham fluid using the operator-splitting method[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2015, 220: 22-32.
[14] ARONSZAJN N, SMITH K T. Invariant subspaces of completely continuous operators[J]. Annals of Mathematics, 1954, 60(2): 345-350.
[15] HOLBROOK J, NORDGREN E, RADJAVI H, et al. On the operator equation $AX=XAX$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1999, 295(1/3): 113-116.
[16] AN G M, BAI Z F, DU S P. On the operator equations $AX=XAX$ and $AX=XA=XAX$[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2003, 5(1): 9-12.
[17] WANG H, HUANG J J, LI M R. On the solutions of the operator equation $XAX=BX$[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(22): 7753-7761.
[18] WANG H, WU J S. The solution set to the nonlinear operator equation $XAX=BX$ on Hilbert spaces[J]. Quaestiones Mathematicae, 2024, 47(5): 949-959.
[19] DENG C Y, ZHANG W Y. Splitting of operators and operator equations[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2023, 39(6): 1085-1100.
[20] WANG H, WU J S, HUANG J J. On the solution of nonlinear operator equations and the invariant subspace[J]. Advances in Operator Theory, 2023, 8(4): 64.
[21] CVETKOVIĆ-ILIĆ D S. Solvability and different solutions of the operator equation $XAX=BX$[J]. Annals of Functional Analysis, 2023, 14(1): 5.
[22] 海国君, 阿拉坦仓. Hilbert空间上的广义逆算子与Fredholm算子[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
[23] CONWAY J B. A course in functional analysis[M]. New York: Springer, 2019.
[24] DRAZIN M P. Natural structures on semigroups with involution[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1978, 84(1): 139-141.
[25] XU X M, DU H K, FANG X C, et al. The supremum of linear operators for the *-order[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(11/12): 2198-2207.
[26] 吴敬松. 两类非线性算子方程解的研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古工业大学, 2023.

（责任编委　李　宏）

Solvability of Operator Equation $AXA=BX=XAX$

CAO Xiang[1], HAI Guojun[1], QIAO Hongwei[2]

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *China*;
2. *College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot* 010022, *China*)

Abstract: Let A and B be bounded linear operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Firstly, the relationship between the solvability of operator equation $AXA=BX=XAX$ and the nontrivial invariant subspace of B is given. Then, the existence of idempotent solutions of operator equation $AXA=BX=XAX$ is studied by using *-partial order, invariant subspace, and other methods.

Key words: operator equation; invariant subspace; idempotent operator