2026年 1月 内蒙古大学学报(自然科学版) Jan. 2026
第57卷第1期 Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition) Vol. 57 No. 1

文章编号:1000-1638(2026)01-0054-08 DOI:10. 13484/j. nmgdxxbzk. 20260106

二阶上三角关系矩阵的左(右)Weyl性*

赵 娜[1],吴秀峰[1,2,3]

(1. 内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022;

2. 内蒙古师范大学无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室,呼和浩特 010022;

3. 内蒙古自治区应用数学中心,呼和浩特 010022)

摘要:设$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$均为Banach空间。对给定关系$A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$和$B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$,记二阶上三角关系矩阵$M_X=\begin{bmatrix}A & X\\ 0 & B\end{bmatrix}\in\mathcal{BR}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})$,其中$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$。利用关系分块技巧给出存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$使得$M_X$是左(右)Weyl关系的充分必要条件。

关键词:关系矩阵;左 Weyl关系;右Weyl关系;上三角关系矩阵

中图分类号:O177.1;O177.7 **文献标志码:**A

在经典的算子理论研究中,一般要求算子是单值的,但是随着多位学者对算子理论的深入研究,经典的算子理论不再适用,于是一些学者开始研究线性关系。多值线性算子和单值线性算子统称为线性关系,故线性关系可看作线性算子在多值情形下的推广,它是在文献[1]研究非稠定微分算子的共轭时首次被引入的。线性关系矩阵是指以线性关系为元素的矩阵,简称关系矩阵。

近三十年来,上三角(缺项)算子矩阵的Fredholm补和Weyl补问题成为了比较活跃的研究课题。文献[2]研究了Hilbert空间中二阶上三角算子矩阵的Fredholm性和Weyl性;文献[3]研究了Hilbert空间中二阶上三角算子矩阵为(α,β)-Fredholm算子的充分必要条件;文献[4]研究了在Hilbert空间中当二阶上三角算子矩阵中未知算子为自伴算子时的Fredholm性;文献[5]研究了Banach空间中二阶上三角算子矩阵的Fredholm性和Weyl性。

近十年来,许多学者开始研究上三角(缺项)关系矩阵的谱补问题。文献[6]研究了Hilbert空间中上三角关系矩阵的左(右)Fredholm补问题。文献[7-8]研究了Hilbert空间中二阶上三角算子矩阵的本质谱性质。在此基础上,文献[9]进一步研究了Hilbert空间中一类三阶上三角关系矩阵的Fredholm性和Weyl性。在已有的研究结论中,尚未见针对Banach空间中二阶上三角关系矩阵Fredholm性和Weyl性的研究,本文主要研究Banach空间中二阶上三角关系矩阵的左Weyl性和右Weyl性。

下面给出本文的记号和基本概念。

设$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$均为Banach空间,关系$T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$是一个映射,它将非空子集$D(T)\subseteq\mathcal{X}$(即$T$的定义域)中的元素映射为$\mathcal{Y}$的某个非空子集。若关系$T$满足对任意的$x_1$、$x_2\in D(T)$及不全为零的标量

* **收稿日期:**2025-03-18;**修回日期:**2025-05-07

基金项目:内蒙古自治区自然科学基金项目(2022LHMS01003,2023QN01013,2024ZD21);内蒙古自治区高等学校青年科技英才项目(NJYT22029);内蒙古自治区一流学科科研专项(YLXKZX-NSD-011,NYLXKZX-NSD-001)

作者简介:赵 娜(1999—),女,陕西咸阳人,2022级硕士研究生。E-mail:zhaona221123@163.com

通信作者:吴秀峰(1986—),女(蒙古族),内蒙古兴安盟人,副教授,博士。主要从事算子矩阵的谱理论及其应用研究。E-mail:wuxiufeng68@163.com

λ_1、λ_2都有$T(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 T(x_1)+\lambda_2 T(x_2)$,则称$T$为线性关系。若$T\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$且$\|T\|<\infty$,则称$T$是有界线性关系。记$\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$为所有从$\mathcal{X}$到$\mathcal{Y}$且定义域$D(T)$为全空间$\mathcal{X}$的线性关系,$\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{X})$可简记为$\mathcal{LR}(\mathcal{X})$。另外,记$\mathcal{BR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$、$\mathcal{CR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$和$\mathcal{BCR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$分别为所有从$\mathcal{X}$到$\mathcal{Y}$的有界线性关系、闭线性关系和有界闭线性关系构成的集合。相应地,$\mathcal{BR}(\mathcal{X},\mathcal{X})$、$\mathcal{CR}(\mathcal{X},\mathcal{X})$和$\mathcal{BCR}(\mathcal{X},\mathcal{X})$可简记为$\mathcal{BR}(\mathcal{X})$、$\mathcal{CR}(\mathcal{X})$和$\mathcal{BCR}(\mathcal{X})$。此外,定义$T\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$的图为$G(T)=\{(u,v)\in\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}:u\in D(T),v\in T(u)\}$。设子空间$M\subseteq D(T)$,定义$T|_M\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$为$G(T|_M)=\{(x,y)\in\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}:y\in Tx+M\}$确定的线性关系。另外,定义$T(0)=\{y|(0,y)\in G(T)\}$。若$Q_T$为从$\mathcal{Y}$到$\mathcal{Y}/\overline{T(0)}$的商映射,则$Q_T T$是单值的,并且对任意的$x\in\mathcal{X}$,定义$\|Tx\|=\|Q_T Tx\|$,且定义$T$的范数为$\|T\|=\|Q_T T\|$。若它的图$G(T)$是$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$的闭子空间,则称$T$是闭的。

设$\mathcal{M}$是Banach空间$\mathcal{X}$的闭子空间,若存在另一闭子空间$\mathcal{N}\subseteq\mathcal{X}$,使得$\mathcal{M}+\mathcal{N}=\mathcal{X}$且$\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\{0\}$,则称$\mathcal{M}$在$\mathcal{X}$中拓扑可补,简称可补,记为$\mathcal{X}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$。设$\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$是Banach空间$\mathcal{X}$的子空间,若存在有限维子空间$\mathcal{F}\subset\mathcal{X}$使得$\mathcal{M}\subset\mathcal{N}+\mathcal{F}$,则$\mathcal{M}$本质包含于$\mathcal{N}$,记为$\mathcal{M}\subset_e\mathcal{N}$。

设$T\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$,用$\ker T=\{x\in D(T):Tx=T(0)\}$和$\operatorname{ran}T=T(D(T))$分别表示关系$T$的零空间和值域,记$\alpha(T)=\dim\ker T$,$\beta(T)=\dim(\mathcal{Y}/\operatorname{ran}T)$。若$\alpha(T)$和$\beta(T)$之一有限,则定义$T$的指标为$i(T)=\alpha(T)-\beta(T)$。设$T\in\mathcal{BCR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$且$\operatorname{ran}T$是闭的。若$\alpha(T)<\infty$,$\operatorname{ran}T$在$\mathcal{Y}$中可补,则称$T$是左Fredholm关系;若$\beta(T)<\infty$,$\ker T$在$\mathcal{X}$中可补,则称$T$是右Fredholm关系;若$\alpha(T)<\infty$且$\beta(T)<\infty$,则称$T$是Fredholm关系[10]。若$T$是左Fredholm关系且$i(T)\leqslant 0$,则称$T$是左Weyl关系;若$T$是右Fredholm关系且$i(T)\geqslant 0$,则称$T$是右Weyl关系;若$T$是Fredholm关系且$i(T)=0$,则称$T$是Weyl关系[11]。若$\ker T$在$\mathcal{X}$中可补,则用$\mathcal{O}_{\ker T}$表示$\ker T$在$\mathcal{X}$中的补子空间。若$\operatorname{ran}T$和$T(0)$在$\mathcal{Y}$中可补,用$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}T}$和$\mathcal{O}_{T(0)}$分别表示$\operatorname{ran}T$和$T(0)$在$\mathcal{Y}$中的补子空间。

1　辅助引理

引理1[12]　设$T\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$,则

(i) 若T连续,并且$D(T)$和$T(0)$都是闭的,则T是闭的;

(ii) T闭当且仅当$Q_T T$闭且$T(0)$是闭的。

引理2　设$A\in\mathcal{LR}(\mathcal{X})$,$B\in\mathcal{LR}(\mathcal{Y})$,$X\in\mathcal{LR}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$为给定关系,则

$$Q_{M_X}M_X=\begin{bmatrix}Q_{(A\,X)}A & Q_{(A\,X)}X\\ 0 & Q_B B\end{bmatrix}\tag{1}$$

根据文献[6]中命题2.1可证。

引理3　设$A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$,$B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$,$X\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$为给定关系,则$M_X$是闭的当且仅当$A(0)+X(0)$和$B(0)$都是闭的。

证明　充分性。设$A(0)+X(0)$和$B(0)$都是闭的,则$M_X(0)$是闭的,由引理1中(ii)可知,只需证明$Q_{M_X}M_X$是闭的。显然,$Q_{M_X}M_X$是一个单值关系,由引理2可知式(1)成立。因为A是定义在全空间上的有界关系,所以$\left\|Q_{(A\,X)}Ax\right\|\leqslant\|Q_A Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|<\infty$,$x\in\mathcal{X}$,进而$\left\|Q_{(A\,X)}A\right\|<\infty$,即$Q_{(A\,X)}A$是有界的。类似地,$Q_B B$是有界的。因此$Q_{M_X}M_X$是定义在全空间上的有界算子,显然$Q_{M_X}M_X$是闭的。

必要性。由M_X的闭性及引理3可知,$M_X(0)$是闭的,因此$A(0)+X(0)$和$B(0)$都是闭的。

引理4[13]　设$T\in\mathcal{BCR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$,则

(i) T是左Fredholm关系,则$Q_T T$是左Fredholm关系。反之,$Q_T T$是左Fredholm关系且$T(0)$在$\mathcal{Y}$中可补,则T是左Fredholm关系;

(ii) T是右Fredholm关系当且仅当$Q_T T$是右Fredholm关系。

引理5[11]　设$T\in\mathcal{LCR}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$,则$\operatorname{ran}T$是闭的当且仅当$\operatorname{ran}Q_T T$是闭的。在这种情况下,$\ker T=$

$\ker Q_T T$且$\beta(T)=\beta(Q_T T)$。

引理6[14] 设$T\in\mathcal{LR}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$且$U\in\mathcal{B}(\mathcal{Y})$,$V\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$均可逆,则

(i) $\operatorname{ran}(UT)$闭当且仅当$\operatorname{ran}T$闭;

(ii) $\operatorname{ran}(TV)$闭当且仅当$\operatorname{ran}T$闭。

引理7[5] 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$,$B\in\mathcal{B}(\mathcal{Y})$,$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$为给定算子,则

(i) 若M_X是左Fredholm算子,则A是左Fredholm算子;

(ii) 若M_X是右Fredholm算子,则B是右Fredholm算子。

引理8[15] 设$\mathcal{M}$是Banach空间$\mathcal{X}$的线性子空间,则有如下结论:

(i) 若$\dim\mathcal{M}<\infty$,则$\mathcal{M}$在$\mathcal{X}$中拓扑可补;

(ii) 若$\dim\mathcal{X}/\mathcal{M}<\infty$,则$\mathcal{M}$在$\mathcal{X}$中拓扑可补。

引理9[13] 设$\mathcal{M}$,$\mathcal{N}$是Banach空间$\mathcal{X}$的闭子空间且满足$\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$。若$\mathcal{M}/\mathcal{N}$和$\mathcal{N}$分别在$\mathcal{X}/\mathcal{N}$和$\mathcal{X}$中可补,则$\mathcal{M}$在$\mathcal{X}$中可补。

引理10[12] 设$\mathcal{M}$是Banach空间$\mathcal{X}$的一个闭子空间。若存在$\mathcal{X}$的一个子空间$\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$,则$\mathcal{N}$是闭的当且仅当$\mathcal{N}/\mathcal{M}$是闭的。

2 主要结果及证明

定理1 设$A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$,$B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$为给定关系。若$A(0)$在$\mathcal{X}$中可补,则存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$使得$M_X$是左Weyl关系当且仅当下列条件成立:

(i) A是左Fredholm关系;

(ii) $B(0)$闭;

(iii) 存在$J\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A})$使得$\operatorname{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$在$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$中可补,$\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$在$\mathcal{Y}$中可补且$\mathcal{Y}\subset_e\mathcal{O}_{\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)}$,并且满足$i\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)\leqslant-\alpha(A)$。

证明 充分性。设条件(i)(ii)(iii)成立。因为A是左Fredholm关系,所以A是闭的,$\alpha(A)<\infty$,$\operatorname{ran}A$是闭的且在$\mathcal{X}$中可补。由A的闭性及引理1可得$A(0)$是闭的,结合$B(0)$的闭性及引理3可知,对任意的$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$使得$M_X$是闭的。

注意到$\operatorname{ran}A$是闭的且在$\mathcal{X}$中可补,则$\mathcal{X}$有分解式$\mathcal{X}=\operatorname{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A}$,因此

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\0\end{bmatrix}:\ \mathcal{X}\to\operatorname{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A}。$$

定义

$$X=\begin{bmatrix}0\\J\end{bmatrix}:\ \mathcal{Y}\to\operatorname{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A},$$

其中,$J\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A})$是条件(iii)中的$J$。$M_X$作为从$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$到$\operatorname{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$的关系矩阵具有以下分块形式

$$M_X=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&J\\0&B\end{bmatrix}。$$

由$\operatorname{ran}A$的闭性可知A_1是满的,结合$\operatorname{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$在$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$中可补,得到$\operatorname{ran}M_X=\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$是闭的且在$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$中可补。又由$\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$在$\mathcal{Y}$中可补且$\mathcal{Y}\subset_e\mathcal{O}_{\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)}$,则存在$\mathcal{Y}$的有限维子空间

$\mathcal{F}\subset\mathcal{Y}$使得$\mathcal{Y}=\mathcal{O}_{\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)}+\mathcal{F}$。显然,存在子空间$\tilde{\mathcal{F}}\subset\mathcal{F}$使得$\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)\subset\mathcal{Y}=\mathcal{O}_{\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)}\oplus\tilde{\mathcal{F}}$,则$\ker\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$是有限维空间,即$\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)<\infty$,故$\alpha(M_X)=\alpha(A)+\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)<\infty$。因此,$M_X$是左Fredholm关系。另外,因为

$$\begin{aligned}\beta(M_X)&=\dim(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})/\mathrm{ran}M_X\\&=\dim(\mathrm{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y})/\left(\mathrm{ran}A\oplus\mathrm{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)\right)\\&=\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y})/\mathrm{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)=\beta\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

结合$i\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)\leqslant-\alpha(A)$可得,$i(M_X)\leqslant\alpha(A)+\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)-\beta\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)=\alpha(A)+i\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)\leqslant 0$。综上,$M_X$是左Weyl关系。

必要性。假设存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$使得$M_X$是左Weyl关系,则$M_X$一定是左Fredholm关系。注意到$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$,根据引理2和引理4得

$$Q_{M_X}M_X=\begin{bmatrix}Q_{(A\ X)}A & Q_{(A\ X)}X\\0 & Q_BB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_AA & Q_AX\\0 & Q_BB\end{bmatrix}:\ \mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}\rightarrow(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})/M_X(0)$$

是左Fredholm关系。因为$A(0)$在$\mathcal{X}$中可补,则$A(0)$是闭的,结合A的有界性,由引理1可知A是闭的。又因为$Q_{M_X}M_X$的左Fredholm性,根据引理7可得Q_AA是左Fredholm算子,这意味着$\alpha(Q_AA)<\infty$,所以$\alpha(A)<\infty$。为证明定理1中条件(i),只需证$\mathrm{ran}A$是闭的且在$\mathcal{X}$中可补。事实上,由于Q_AA是左Fredholm算子,则$\mathrm{ran}Q_AA$是闭的且可补。注意到$\mathrm{ran}Q_AA=\mathrm{ran}A/\overline{A(0)}$,由$\mathrm{ran}Q_AA$的闭性,结合$A(0)$是闭的,根据引理10可得$\mathrm{ran}A$是闭的。又由$\mathrm{ran}Q_AA$的可补性,结合$\mathrm{ran}A$是闭的,$A(0)$在$\mathcal{X}$中可补,根据引理9可得$\mathrm{ran}A$在$\mathcal{X}$中可补,综上条件(i)成立。因为$M_X$是左Fredholm关系,所以$M_X$是闭的,由引理3可得$B(0)$是闭的,即条件(ii)成立。

注意到$\mathrm{ran}A$在$\mathcal{X}$中可补,故$\mathcal{X}$有分解形式$\mathcal{X}=\mathrm{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}$,则$M_X$作为从$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$到$\mathrm{ran}A\oplus\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$的关系矩阵可写成如下分块形式

$$M_X=\begin{bmatrix}A_1 & X_1\\0 & X_2\\0 & B\end{bmatrix}。$$

由$\mathrm{ran}A$的闭性可知A_1是满的,取$J=X_2$,显然$\mathrm{ran}M_X=\mathrm{ran}A\oplus\mathrm{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$,故$\mathrm{ran}\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)$在$\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$中可补。假设$\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)=\infty$,此时,对任意$x\in\ker J$都有$Jx\subseteq\mathrm{ran}A$,则存在$x_0\in\mathcal{X}$使得$A_1x_0\cap Jx\neq\varnothing$,即$0\in A_1x_0-Jx$,进而$(x_0-x)^{\mathrm{T}}\in\ker M_X$。因为$\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)=\infty$,所以$\alpha(M_X)=\infty$,这与$M_X$的Fredholm性矛盾,因此$\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)<\infty$成立。注意到$B(0)$是闭的,根据引理3可得$\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$是闭的。因此,列关系$\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$是左Fredholm关系。另外,$M_X$可因式分解成如下形式

$$M_X=\begin{bmatrix}I & 0\\0 & J\\0 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & X_1\\0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & I\end{bmatrix}。$$

容易证明$\begin{bmatrix}I & X_1\\0 & I\end{bmatrix}$是可逆的,从而$\alpha(M_X)=\alpha(A)+\alpha\left(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}\right)<\infty$。由$M_X$的右Weyl性可知

$$\alpha(A)+\alpha(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})-\beta(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})=\alpha(M_X)-\beta(M_X)=i(M_X)\leqslant 0,$$

即 $i(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})\leqslant -\alpha(A)$,综上条件(iii)成立。

注　由于Hilbert空间是特殊的Banach空间,因此,本文定理1的结论可推导到Hilbert空间(见文献[16]中的定理3.1.17)。

推论1　设 $A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$, $B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系。若 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补,则存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 使得 M_X 是左Weyl关系当且仅当下列条件成立:

(i) A 是左Fredholm关系;

(ii) $B(0)$ 闭;

(iii) 存在 $J\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A})$ 使得列关系 $\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$ 是左Fredholm关系且满足 $i(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})\leqslant -\alpha(A)$。

证明　充分性。设条件(i)(ii)(iii)成立。若存在 $J\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A})$ 使得列关系 $\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$ 是左Fredholm关系,则 $\mathrm{ran}(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$ 中可补, $\alpha(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})<\infty$, 即 $\ker(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y}\subset_e\mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})}$, 结合 $i(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})\leqslant -\alpha(A)$,由定理1可得结论成立。

必要性。假设存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 使得 M_X 是左Weyl关系,由定理1可得 A 是左Fredholm关系, $B(0)$ 闭,即条件(i)和(ii)成立。另外,存在 $J\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A})$ 使得 $\mathrm{ran}(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\mathrm{ran}A}\oplus\mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y}\subset_e\mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})}$,并且满足 $i(\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix})\leqslant -\alpha(A)$。注意到 $B(0)$ 是闭的,根据引理3可得 $\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$ 是闭的。因此,列关系 $\begin{bmatrix}J\\B\end{bmatrix}$ 是左Fredholm关系,综上条件(iii)成立。

定理2　设 $A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$, $B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系。若 $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补,则存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 使得 M_X 是右Weyl关系当且仅当下列条件成立:

(i) B 是右Fredholm关系;

(ii) $A(0)$ 闭;

(iii) 存在 $S\in\mathcal{B}(\ker B,\mathcal{X})$ 使得 $\mathrm{ran}([A\quad S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X}\subset_e\mathrm{ran}([A\quad S])$, $\ker([A\quad S])$ 在 $\mathcal{X}\oplus\ker B$ 中可补且满足 $i([A\quad S])\geqslant -i(B)$。

证明　充分性。设条件(i)(ii)(iii)成立。因为 B 是右Fredholm关系,所以 B 是闭的, $\mathrm{ran}B$ 是闭的, $\beta(B)<\infty$ 且 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补。由 B 的闭性及引理1可得 $B(0)$ 是闭的,结合 $A(0)$ 的闭性及引理3可知,对任意的 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 使得 M_X 是闭的。

注意到 $\beta(B)<\infty$,所以 $\mathrm{ran}B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补,结合 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补,故 $\mathcal{Y}$ 有如下分解形式

$$\mathcal{Y}=\mathcal{O}_{\ker B}\oplus\ker B,\ \mathcal{Y}=\mathrm{ran}B\oplus\mathcal{O}_{\mathrm{ran}B}。$$

定义

$$X=[0\quad S]:\ \mathcal{O}_{\ker B}\oplus\ker B\to\mathcal{X},$$

其中 $S\in\mathcal{B}(\ker B,\mathcal{X})$ 是条件(iii)中的 S。M_X 作为从 $\mathcal{X}\oplus\mathcal{O}_{\ker B}\oplus\ker B$ 到 $\mathcal{X}\oplus\mathrm{ran}B\oplus\mathcal{O}_{\mathrm{ran}B}$ 的关系矩阵具有以下分块形式

$$M_X=\begin{bmatrix}A & 0 & S\\ 0 & B_1 & B-B\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

因为ran($[A\quad S]$)在$\mathcal{X}$中可补，即ran($[A\quad S]$)是闭的，所以$\operatorname{ran}M_X=\operatorname{ran}([A\quad S])\oplus\operatorname{ran}B$是闭的。又因为ker($[A\quad S]$)在$\mathcal{X}\oplus\ker B$中可补，所以$\ker M_X=\ker([A\quad S])\oplus\ker B$在$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$中可补。由于ran($[A\quad S]$)在$\mathcal{X}$中可补且$\mathcal{X}\subset_e\operatorname{ran}([A\quad S])$，故存在$\mathcal{X}$的有限维子空间$\mathcal{F}$使得$\mathcal{X}\subset\operatorname{ran}([A\quad S])+\mathcal{F}$。显然存在子空间$\tilde{\mathcal{F}}\subset\mathcal{F}$使得$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}([A\ S])}\subset\mathcal{X}=\operatorname{ran}([A\quad S])\oplus\tilde{\mathcal{F}}$。因此$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}([A\ S])}$是有限维空间，即$\beta([A\quad S])<\infty$，进而

$$\beta(M_X)=\beta([A\quad S])+\beta(B_1)+\dim\mathcal{O}_{\operatorname{ran}B}=\beta([A\quad S])+\beta(B)<\infty,$$

因此，M_X是右Fredholm关系。另外，因为$i([A\quad S])\geqslant -i(B)$，则

$$i(M_X)=\alpha(M_X)-\beta(M_X)=\alpha([A\quad S])-\beta([A\quad S])+\alpha(B)-\beta(B)=i([A\quad S])+i(B)\geqslant 0。$$

综上，M_X是右Weyl关系。

必要性。假设存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$使得$M_X$是右Weyl关系，则$M_X$一定是右Fredholm关系。注意到$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，根据引理2和引理4得

$$Q_{M_X}M_X=\begin{bmatrix}Q_AA & Q_AX\\ 0 & Q_BB\end{bmatrix}:\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}\to(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})/M_X(0)$$

是右Fredholm关系。因为$B(0)$是闭的，结合B的有界性，根据引理1可知B是闭的。又因为$Q_{M_X}M_X$的右Fredholm性，由引理7可得Q_BB是右Fredholm算子，这意味着$\operatorname{ran}Q_BB$是闭的，$\beta(Q_BB)<\infty$且$\ker Q_BB$在$\mathcal{Y}$中可补。由$\operatorname{ran}Q_BB$的闭性，结合引理5可得，ran$B$是闭的。在这种情况下，$\beta(B)=\beta(Q_BB)$且$\ker B=\ker Q_BB$成立。因此，$\beta(B)<\infty$且ker$B$在$\mathcal{Y}$中可补。综上，B是右Fredholm关系，故条件(i)成立。注意到M_X是右Fredholm关系，所以M_X是闭的，由引理3可知$A(0)$是闭的，故条件(ii)成立。

注意到，ran$B$在$\mathcal{Y}$中可补，ker$B$和$B(0)$在$\mathcal{Y}$中可补。事实上，$\operatorname{ran}B=(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)$。因为$B(0)\subset\operatorname{ran}B$，$\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)}\subset\operatorname{ran}B$，显然$(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)\subset\operatorname{ran}B$。另一方面，对任意的$x\in\operatorname{ran}B$，存在$x_1\in\mathcal{O}_{B(0)}$，$x_2\in B(0)$，使得$x=x_1+x_2$，进而$x_1=(x-x_2)\in\operatorname{ran}B$，故$x_1\in\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)}$，因此$\operatorname{ran}B\subset(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)$，进而$\operatorname{ran}B=(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)$成立，则$\mathcal{Y}$有如下分解形式

$$\mathcal{Y}=\mathcal{O}_{\ker B}\oplus\ker B,\ \mathcal{Y}=(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}B}。$$

M_X作为从$\mathcal{X}\oplus\mathcal{O}_{\ker B}\oplus\ker B$到$\mathcal{X}\oplus(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}B}$的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X=\begin{bmatrix}A_1 & X_1 & X_2\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & B-B & B-B\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

由于

$$B_{|\mathcal{O}_{\ker B}}=[B_1\quad B-B\quad 0]^{\mathrm{T}}:\mathcal{O}_{\ker B}\to(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}B},$$

显然算子B_1是单值的。另外，对任意的$y\in\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)}$，存在$x\in\mathcal{Y}$使得$y\in Bx$。令$x_1\in\mathcal{O}_{\ker B}$，$x_2\in\ker B$满足$x=x_1+x_2$，则$y\in B(x_1+x_2)=B_1x_1+B(0)=Bx_1$，进而$y=B_1x_1$，即$B_1$是满的，这意味着算子$B_1$是可逆的。因此，存在可逆算子$U\in\mathcal{B}(\mathcal{X}\oplus(\operatorname{ran}B\cap\mathcal{O}_{B(0)})\oplus B(0)\oplus\mathcal{O}_{\operatorname{ran}B})$使得

$$UM_X=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & X_2\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & B-B & B-B\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

取$S=X_2$，显然$\operatorname{ran}(UM_X)=\operatorname{ran}([A\quad S])\oplus\operatorname{ran}B$。因此，由$M_X$的右Fredholm性可得$\beta([A\quad S])<\infty$，即ran($[A\quad S]$)在$\mathcal{X}$中可补且$\mathcal{O}_{\operatorname{ran}([A\ S])}$是有限维子空间，进而$\mathcal{X}\subset\operatorname{ran}([A\quad S])+\mathcal{O}_{\operatorname{ran}([A\ S])}$，即$\mathcal{X}\subset_e\operatorname{ran}([A\quad S])$。又因为$\ker(UM_X)=\ker([A\quad S])\oplus\ker B$，结合$M_X$的右Fredholm性，所以

$\ker([A\quad S])$在$\mathcal{X}\oplus\ker B$中可补。另外,由M_X的右Weyl性可知

$$i([A\quad S])+i(B)=\alpha([A\quad S])-\beta([A\quad S])+\alpha(B)-\beta(B)=\alpha(M_X)-\beta(M_X)=i(M_X)\geqslant 0,$$

即$i([A\quad S])\geqslant -i(B)$,综上条件(iii)成立。

注 由于Hilbert空间是特殊的Banach空间,因此,本文定理2的结论可推导到Hilbert空间(见文献[16]中的定理3.1.20)。

推论2 设$A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$,$B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$为给定关系。若$B(0)$在$\mathcal{Y}$中可补,则存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$使得$M_X$是右Weyl关系当且仅当下列条件成立:

(i) B是右Fredholm关系;

(ii) $A(0)$闭;

(iii) 存在$S\in\mathcal{B}(\ker B,\mathcal{X})$使得行关系$[A\quad S]$是右Fredholm关系且满足$i([A\quad S])\geqslant -i(B)$。

证明 充分性。设条件(i)(ii)(iii)成立。若存在$S\in\mathcal{B}(\ker B,\mathcal{X})$使得行关系$[A\quad S]$是右Fredholm关系,则$\mathrm{ran}([A\quad S])$是闭的,$\ker([A\quad S])$在$\mathcal{X}\oplus\ker B$中可补,$\beta([A\quad S])<\infty$,则$\mathrm{ran}([A\quad S])$在$\mathcal{X}$中可补且$\mathcal{X}\subset_e\mathrm{ran}([A\quad S])$,结合$i([A\quad S])\geqslant -i(B)$,由定理2可得结论成立。

必要性。假设存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$使得$M_X$是右Weyl关系,由定理2可得$B$是右Fredholm关系,$A(0)$是闭的,即条件(i)和(ii)成立。另外,存在$S\in\mathcal{B}(\ker B,\mathcal{X})$使得行关系$[A\quad S]$是右Fredholm关系并且满足$i([A\quad S])\geqslant -i(B)$。注意到$A(0)$是闭的,根据引理3可得行关系$[A\quad S]$是闭的。因此,行关系$[A\quad S]$是右Weyl关系,综上条件(iii)成立。

参考文献:

[1] VON NEUMANN J. Functional operator Ⅱ: The geometry of orthogonal spaces[M]. Princeton: Princeton University Press, 1951.

[2] CAO X H, GUO M Z, MENG B. Semi-Fredholm spectrum and Weyl's theorem for operator matrices[J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, 22(1): 169-178.

[3] 海国君,阿拉坦仓. 上三角算子矩阵的(α,β)-本质谱[J]. 数学学报,2014,57(3):569-580.

[4] 吴秀峰,黄俊杰,阿拉坦仓. 上三角算子矩阵的左(右)本质谱的自伴扰动[J]. 数学学报,2022,65(3):423-434.

[5] LIU A C, HUANG J J, CHEN A. Right and left weyl operator matrices in a Banach space setting[J]. Journal of Mathematics, 2021: 9959364(2021-06-01)[2025-02-01]. https://doi.org/10.1155/2021/9959364.

[6] ELLEUCH S, MNIF M. Essential approximate point spectra for upper triangular matrix of linear relations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33(4): 1187-1201.

[7] HUANG J J, DU Y Y, HUO R. Fredholm properties of upper triangular matrices of relations[J]. Advances in Operator Theory, 2023, 8(3): 44.

[8] DU Y Y, HUANG J J. Spectral property of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(8): 1526-1542.

[9] 董淑婷,吴秀峰. 一类三阶上三角关系矩阵的Fredholm性和Weyl性[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2024,55(5):459-469.

[10] ÁLVAREZ T. Left-right Browder linear relations and Riesz perturbations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2017, 37

(5):1437-1452.

[11] ÁLVAREZ T. On the perturbation of semi-Fredholm relations with complemented ranges and null spaces[J]. Acta Mathematica Sinica(English Series),2010,26:1545-1554.

[12] CROSS R. Multivalued linear operators[M]. New York:Marcel Dekker,1998.

[13] ÁLVAREZ T,CHAMKHA Y,MNIF M. Left-and right-atkinson linear relation matrices[J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2016,13(4):2039-2059.

[14] MÜLLER V. Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras[M]. Basel:Birkhäuser Verlag,2003.

[15] 王玉文. 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2005.

[16] 杜燕燕. 线性关系矩阵的谱性质[D]. 呼和浩特:内蒙古大学,2021.

(责任编委　李　宏)

Left (Right) Weyl Properties for Second-Order Upper Triangular Relation Matrices

ZHAO Na[1], WU Xiufeng[1,2,3]

(1. *College of Mathematics Science*, *Inner Mongolia Normal University*, *Hohhot* 010022, *China*;
2. *Key Laboratory of Infinite Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application*, *Ministry of Education*, *Inner Mongolia Normal University*, *Hohhot* 010022, *China*;
3. *Center for Applied Mathematics Inner Mongolia*, *Hohhot* 010022, *China*)

Abstract: Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be Banach spaces. For given the relations $A\in\mathcal{BR}(\mathcal{X})$ and $B\in\mathcal{BR}(\mathcal{Y})$, the second-order upper triangular relation matrix is denoted by $M_X=\begin{bmatrix}A & X\\ 0 & B\end{bmatrix}\in\mathcal{BR}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})$, where $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. The necessary and sufficient conditions are given for M_X to be left (right) Weyl linear relation for some $X\in\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, based on the block relation technique.

Key words: relation matrix; left Weyl relation; right Weyl relation; upper triangular relation matrix