文章编号:1000-1638(2026)01-0062-08 DOI:10. 13484/j. nmgdxxbzk. 20260107

上三角关系矩阵的两类点谱与两类剩余谱的性质*

张艺濛[1],吴秀峰[1,2,3]

(1. 内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022; 2. 内蒙古自治区应用数学中心,呼和浩特 010022;
3. 内蒙古师范大学无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室,呼和浩特 010022)

摘要: 设 H,K 是复可分的无穷维 Hilbert 空间。对给定关系 $A\in\mathcal{BR}(H)$,$B\in\mathcal{BR}(K)$,$X\in\mathcal{BR}(K,H)$,记 2×2 上三角关系矩阵 $M_X=\begin{pmatrix}A & X\\ 0 & B\end{pmatrix}\in\mathcal{BR}(H\oplus K)$,给出 M_X 的两类点谱 $\sigma_{p,1}(M_X)$ 和 $\sigma_{p,2}(M_X)$,两类剩余谱 $\sigma_{r,1}(M_X)$ 和 $\sigma_{r,2}(M_X)$ 与其对角元 A 和 B 的对应谱的并集之间的联系。

关键词: 关系矩阵; 点谱; 剩余谱; 上三角关系矩阵

中图分类号: O177. 1; O177. 7 **文献标志码:** A

线性关系是线性算子概念在多值情况下的进一步泛化,因此,也将多值线性算子和单值线性算子统称为线性关系,它可以用来解决具有非稠定性等线性算子的一些问题。事实上,文献[1]在研究非稠定微分算子的共轭时就引入了线性关系这一概念。线性关系的发现为诸多实际问题的解决提供了理论支撑,例如,某些最优化、控制论、退化微分方程和退化算子半群问题已应用了线性关系的相关理论[2-3]。线性关系矩阵是以线性关系作为元素的矩阵,通常也称为关系矩阵。

在近三十年的研究历程中,算子矩阵作为一类特殊的关系矩阵,一直是学界关注的焦点,特别是对于上三角算子矩阵的谱补问题的研究已经逐渐完善。许多学者对谱、点谱、连续谱和剩余谱等问题进行了讨论[4-8]。文献[4]在Hilbert空间中研究了 2×2 上三角算子矩阵点谱、连续谱和剩余谱的扰动;文献[5]给出了在Hilbert空间中 2×2 上三角算子矩阵的可能连续谱和可能剩余谱;文献[6]对Hilbert空间中的 3×3 上三角算子矩阵的可能点谱、可能连续谱和可能剩余谱进行了描述;文献[7]将 2×2 上三角算子矩阵的点谱与剩余谱分别分为两类,并对其可能谱进行描述;文献[8]针对 3×3 上三角算子矩阵,结合分析法和算子分块技巧刻画了四类可能点谱。

近年来,许多学者开始研究关系矩阵的谱理论,主要是对上三角缺项关系矩阵的谱补问题进行研究[9-11]。文献[9]对 2×2 上三角关系矩阵进行了探讨,得到了缺项元素分别为单值线性关系和多值线性关系时,2×2 上三角关系矩阵 M_X 值域闭和值域不闭的充分必要条件,并进一步刻画了闭值域谱的扰动和可能闭值域谱;文献[10]刻画了 2×2 上三角关系矩阵的谱、点谱、连续谱和剩余谱的

* **收稿日期:** 2025-04-16; **修回日期:** 2025-07-16

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金项目(2022LHMS01003,2024ZD21);内蒙古自治区高等学校青年科技英才项目(NJYT22029);内蒙古自治区一流学科科研专项(YLXKZX-NSD-011,NYLXKZX-NSD-017)

作者简介: 张艺濛(2001—),女,内蒙古赤峰人,2022级硕士研究生。E-mail:zhangyimeng316@163. com

通信作者: 吴秀峰(1986—),女(蒙古族),内蒙古兴安盟人,副教授,博士。主要从事算子矩阵的谱理论及其应用研究。E-mail:wuxiufeng68@163. com

扰动问题，以及 2×2 上三角关系矩阵 M_X 的点谱与其内部元素的点谱之间的联系；文献[11]利用单值扩张性质对上三角关系矩阵 M_X 的谱、点谱和剩余谱等与其对角元的对应谱之间的关系进行刻画。本文结合分析方法与矩阵分块技巧给出了 2×2 上三角关系矩阵 M_X 的两类点谱与两类剩余谱与其对角元的对应谱的并集之间的包含关系。

下面给出基本概念和主要符号。设 H 和 K 是可分的 Hilbert 空间，关系 $T: H\to K$ 是一个映射，它将非空子集 $\mathrm{dom}T\subseteq H$ 中的元素映射为 K 的某个非空子集，其中 $\mathrm{dom}T$ 为 T 的定义域。若关系 T 满足对任意的 x_1、$x_2\in\mathrm{dom}T$ 及不全为零的标量 α、β 都有 $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2)$，则称 T 为线性关系。记 $\mathcal{LR}(H,K)$ 为从 H 到 K 且定义域为全空间 H 的所有线性关系，并记 $\mathcal{LR}(H)=\mathcal{LR}(H,H)$。

设 $T\in\mathcal{LR}(H,K)$，图 $G(T)$ 定义为 $G(T)=\{(u,v)\in H\oplus K: u\in\mathrm{dom}T, v\in T(u)\}$。若 T 的图 $G(T)$ 是 $H\oplus K$ 的闭子空间，则称 T 是闭的。以 $\mathcal{CR}(H,K)$ 表示从 H 到 K 的所有闭线性关系构成的集合，记 $\mathcal{CR}(H)=\mathcal{CR}(H,H)$。$T$ 的逆关系 T^{-1} 和闭包 $\bar{T}$ 分别定义为 $G(T^{-1})=\{(v,u)\in K\oplus H:(u,v)\in G(T)\}$ 和 $G(\bar{T})=\overline{G(T)}$ 确定的线性关系。设 $T\in\mathcal{LR}(H,K)$，Q_T 为从 K 到 $K/T(0)$ 的商映射，则 Q_TT 是单值的，并且对任意的 $x\in H$，有 $\|Tx\|=\|Q_TTx\|$ 且定义 T 的范数为 $\|T\|=\|Q_TT\|$，若 $\|T\|<+\infty$，则称 T 是有界线性关系。记 $\mathcal{BR}(H,K)$ 为从 H 到 K 的所有有界线性关系构成的集合，$\mathcal{BCR}(H,K)$ 为从 H 到 K 的所有有界闭线性关系构成的集合，$\mathcal{BR}(H)$ 为 H 上的所有有界线性关系构成的集合。定义 $\mathrm{ran}T=T(\mathrm{dom}T)$、$\ker T=\{x\in H: 0\in T(x)\}$ 和 $\mathrm{mul}T=\{y\in K: y\in T(0)\}$ 分别为 T 的值域、零空间和多值部分，其中 $T(0):=\{y\in K:(0,y)\in G(T)\}$。记 $n(T)=\dim\ker T$，$d(T)=\dim\mathrm{ran}T^{\perp}$。

设 $T\in\mathcal{BR}(H)$，定义 T 的预解集为 $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I$ 是单射的，值域闭且稠密$\}$。定义 T 的谱为 $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$。线性关系 $T\in\mathcal{BR}(H)$ 的点谱 $\sigma_p(T)$、剩余谱 $\sigma_r(T)$、连续谱 $\sigma_c(T)$ 和闭值域谱 $\sigma_{cr}(T)$ 分别定义为

$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I$ 不是单射$\}$，

$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I$ 是单射，$\overline{\mathrm{ran}(T-\lambda I)}\neq H\}$，

$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I$ 是单射，$\overline{\mathrm{ran}(T-\lambda I)}=H, \mathrm{ran}(T-\lambda I)\neq H\}$，

$\sigma_{cr}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: \mathrm{ran}(T-\lambda I)$ 不是闭的$\}$。

为叙述方便，记 $\rho_{cr}(T)=\mathbb{C}\backslash\sigma_{cr}(T)$。基于 $\mathrm{ran}T$ 的闭性与稠密性，将关系的点谱和剩余谱分别拆为 1，2 类点谱和 1，2 类剩余谱，即

$\sigma_{p,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T): \overline{\mathrm{ran}(T-\lambda I)}=H\}$，

$\sigma_{p,2}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T): \overline{\mathrm{ran}(T-\lambda I)}\neq H\}$，

$\sigma_{r,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_r(T): \mathrm{ran}(T-\lambda I)$ 闭$\}$，

$\sigma_{r,2}(T)=\{\lambda\in\sigma_r(T): \mathrm{ran}(T-\lambda I)$ 不闭$\}$。

1　辅助引理

引理 1[1]　若 T 是 Hilbert 空间上的线性关系，则

(i) T 闭当且仅当 T^{-1} 闭；

(ii) 若 T 是闭的，则 $T(0)$ 是闭的。

引理 2[9]　设 $T\in\mathcal{BR}(H,K)$。若 $T(0)$ 是闭的，则 $\ker T$ 是闭的。

引理 3　设 $A\in\mathcal{BR}(H)$，$B\in\mathcal{BR}(K)$，则对任意的 $X\in\mathcal{BR}(K,H)$，有 $\overline{\mathrm{ran}M_X}=H\oplus K$ 当且仅当 $\overline{\mathrm{ran}A}=H$ 且 $\overline{\mathrm{ran}B}=K$。

证明　充分性。因为 $\overline{\mathrm{ran}A}=H$ 且 $\overline{\mathrm{ran}B}=K$，所以 $\ker A^*=\mathrm{ran}A^{\perp}=\{0\}$，$\ker B^*=\mathrm{ran}B^{\perp}=\{0\}$，因此，对任意的 $X\in\mathcal{BR}(K,H)$，有 $\ker M_X{}^*=\{0\}$，故 $\ker M_X{}^*=\mathrm{ran}M_X{}^{\perp}=\{0\}$，则 $\overline{\mathrm{ran}M_X}=H\oplus K$。

必要性。令 $X=0$，因为 $\overline{\mathrm{ran}M_X}=H\oplus K$，所以 $\overline{\mathrm{ran}A}=H$ 且 $\overline{\mathrm{ran}B}=K$。

引理4[2] 若$T\in\mathcal{LR}(H)$,则对任意的$x\in\operatorname{dom}T$,有$\left\|P_{\overline{T(0)}^{\perp}}Tx\right\|=\|Tx\|$且$\left\|P_{\overline{T(0)}^{\perp}}T\right\|=\|T\|$。

引理5[9] 若$T\in\mathcal{LR}(H)$且$U,V\in\mathcal{B}(H)$可逆,则

(i) $\operatorname{ran}UT$闭当且仅当$\operatorname{ran}T$闭;

(ii) $\operatorname{ran}TV$闭当且仅当$\operatorname{ran}T$闭。

引理6[9] 设$T\in\mathcal{BCR}(H)$,$F\in\mathcal{BR}(H,K)$。若F是有限秩的,则$\operatorname{ran}T$是闭的当且仅当$\operatorname{ran}\begin{pmatrix}F\\T\end{pmatrix}$是闭的。

引理7 设$T\in\mathcal{BR}(H)$且$U\in\mathcal{B}(H)$可逆,则$\operatorname{ran}UT$在H中稠密当且仅当$\operatorname{ran}T$在H中稠密。

证明 充分性。因为$U\in\mathcal{B}(H)$可逆,所以对任意的$x\in H$,有$y=Ux\in H$。由于$\operatorname{ran}T$在H中稠密,故存在$\{x_n\}\in\operatorname{ran}T$使得$x_n\to x$,则$Ux_n\to Ux=y$。令$Ux_n=y_n$,则$y_n\to y$,即$\operatorname{ran}UT$在$H$中稠密。

必要性。因为$U\in\mathcal{B}(H)$可逆,所以对任意的$x\in H$,有$y=U^{-1}x\in H$。由于$\operatorname{ran}UT$在H中稠密,故存在$\{x_n\}\in\operatorname{ran}UT$使得$x_n\to x$,则$U^{-1}x_n\to U^{-1}x=y$。令$U^{-1}x_n=y_n$,则$y_n\to y$,即$\operatorname{ran}T$在$H$中稠密。

引理8[10] 设$A\in\mathcal{LR}(H)$,$B\in\mathcal{LR}(K)$,$C\in\mathcal{LR}(K,H)$为给定关系,则

$$\sigma_p(M_C)\subseteq\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:C(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}。$$

引理9[10] 设$A\in\mathcal{LR}(H)$,$B\in\mathcal{LR}(K)$,$C\in\mathcal{LR}(K,H)$为给定关系,则

$$\sigma_p(A)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:C(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}\subseteq\sigma_p(M_C)。$$

引理10[9] 设$A\in\mathcal{LR}(H)$,$B\in\mathcal{BCR}(K)$为给定关系,则对任意的$X\in\mathcal{BR}(K,H)$,都有$\operatorname{ran}M_X$不闭当且仅当$\operatorname{ran}B$不闭且$d(A)<\infty$。

2 主要结果及证明

定理1 设$A\in\mathcal{BR}(H)$,$B\in\mathcal{BR}(K)$,$X\in\mathcal{BR}(K,H)$为给定关系,则

$$\sigma_{p,1}(M_X)\subseteq\sigma_{p,1}(B)\cup\big(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B)\big)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}$$
$$\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}。$$

另外,若$X(0)\subseteq A(0)$,则

$$\sigma_{p,1}(M_X)\subseteq\sigma_{p,1}(B)\cup\big(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B)\big)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}=H\}。$$

证明 设$\lambda\notin\sigma_{p,1}(B)\cup\big(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B)\big)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}$。以下分4种情形进行讨论。

情形1:$A-\lambda I$和$B-\lambda I$均是单射,$X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$且$\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。由引理8可知,$M_X$是单射,则$\lambda\notin\sigma_{p,1}(M_X)$。

情形2:$A-\lambda I$是单射,$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}\neq K$,$X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$且$\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。由$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}\neq K$可得,$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}\neq H\oplus K$,故$\lambda\notin\sigma_{p,1}(M_X)$。

情形3:$\operatorname{ran}(B-\lambda I)$闭,$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}\neq K$,$X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$且$\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。此时,$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}\neq H\oplus K$,故$\lambda\notin\sigma_{p,1}(M_X)$。

情形4:$\operatorname{ran}(B-\lambda I)$闭,$B-\lambda I$是单射,$X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$且$\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。此时,$M_X-\lambda I$可分解为如下形式

$$M_X-\lambda I=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1\\ 0 & (X-\lambda I)_{21}\\ 0 & (X-\lambda I)_{22}\\ 0 & (B-\lambda I)_1\\ 0 & B-B\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H\\K\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\\ X_2(0)^{\perp}\\ \overline{X_2(0)}\\ \operatorname{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp}\\ B(0)\\ \operatorname{ran}(B-\lambda I)^{\perp}\end{pmatrix}。$$

其中，$X_2(0)^{\perp}\oplus\overline{X_2(0)}=\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$ 且

$$(X-\lambda I)_2=\begin{pmatrix}(X-\lambda I)_{21}\\(X-\lambda I)_{22}\end{pmatrix}。$$

易知 $(B-\lambda I)_1$ 为可逆算子，故存在 $\mathcal{B}(\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\oplus X_2(0)^{\perp}\oplus\overline{X_2(0)}\oplus(\mathrm{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp})\oplus B(0)\oplus\mathrm{ran}(B-\lambda I)^{\perp})$ 上的可逆算子

$$U=\begin{pmatrix}I&0&0&0&0&0\\0&I&0&-(X-\lambda I)_{21}(B-\lambda I)_1^{-1}&0&0\\0&0&I&0&0&0\\0&0&0&I&0&0\\0&0&0&0&I&0\\0&0&0&0&0&I\end{pmatrix},$$

使得

$$U(M_X-\lambda I)=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1&(X-\lambda I)_1\\0&0\\0&(X-\lambda I)_{22}\\0&(B-\lambda I)_1\\0&B-B\\0&0\end{pmatrix}。$$

因为 $\overline{X(0)}\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$，所以 $\overline{X_2(0)}\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$，因此 $\overline{\mathrm{ran}U(M_X-\lambda I)}=\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\oplus\overline{X_2(0)}\oplus\overline{\mathrm{ran}(B-\lambda I)}\neq H\oplus K$。由引理 7 可知，$\overline{\mathrm{ran}(M_X-\lambda I)}\neq H\oplus K$，故 $\lambda\notin\sigma_{p,1}(M_X)$。

另外，若 $X(0)\subseteq A(0)$，则 $\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}=\varnothing$ 且 $\overline{X(0)}\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}=0$。此时，$(X-\lambda I)_2$ 是单值的，则 $M_X-\lambda I$ 可分解为如下形式

$$(M_X-\lambda I)=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1&(X-\lambda I)_1\\0&(X-\lambda I)_2\\0&(B-\lambda I)_1\\0&B-B\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H\\K\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\\\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\\\mathrm{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp}\\B(0)\\\mathrm{ran}(B-\lambda I)^{\perp}\end{pmatrix}。$$

因为 $(B-\lambda I)_1$ 为可逆算子，所以，存在可逆算子 $V\in\mathcal{B}(\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\oplus\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\oplus(\mathrm{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp})\oplus B(0)\oplus\mathrm{ran}(B-\lambda I)^{\perp})$，使得

$$V(M_X-\lambda I)=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1&(X-\lambda I)_1\\0&0\\0&(B-\lambda I)_1\\0&B-B\\0&0\end{pmatrix}。$$

因此，$\overline{\mathrm{ran}V(M_X-\lambda I)}=\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\oplus\overline{\mathrm{ran}(B-\lambda I)}\neq H\oplus K$，故当 $X(0)\subseteq A(0)$ 时，

$$\sigma_{p,1}(M_X)\subseteq\sigma_{p,1}(B)\cup(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B))\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}=H\}。$$

证毕。

定理 2　设 $A\in\mathcal{BR}(H)$，$B\in\mathcal{BR}(K)$，$X\in\mathcal{BR}(K,H)$ 为给定关系，则

$$\sigma_{p,2}(M_X)\subseteq\sigma_{p,2}(A)\cup\sigma_{p,2}(B)\cup(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_r(B))\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}$$
$$\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{X(0)}\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\mathrm{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}。$$

另外，若 $X(0)\subseteq A(0)$，则

$$\sigma_{p,2}(M_X)\subseteq\sigma_{p,2}(A)\cup\sigma_{p,2}(B)\cup(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_r(B))\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\neq H\}。$$

证明 设 $\lambda\notin\sigma_{p,2}(A)\cup\sigma_{p,2}(B)\cup(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_r(B))\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}$。以下分3种情形进行讨论。

情形1：$A-\lambda I$ 和 $B-\lambda I$ 均是单射且 $X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$。由引理8可知，$M_X$ 是单射，则 $\lambda\notin\sigma_{p,2}(M_X)$。

情形2：$\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}=H$ 且 $\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=K$。由引理3可知，$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}=H\oplus K$，故 $\lambda\notin\sigma_{p,2}(M_X)$。

情形3：$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=K$ 且 $\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。此时，$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}=\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\oplus\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\oplus\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=H\oplus K$，故 $\lambda\notin\sigma_{p,2}(M_X)$。

另外，若 $X(0)\subseteq A(0)$，则 $\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}=\varnothing$ 且

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{X(0)}\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\neq H\}。$$

因此，当 $X(0)\subseteq A(0)$ 时，

$$\sigma_{p,2}(M_X)\subseteq\sigma_{p,2}(A)\cup\sigma_{p,2}(B)\cup(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_r(B))\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\neq H\}。$$

证毕。

定理3 设 $A\in\mathcal{BCR}(H)$，$B\in\mathcal{BCR}(K)$，$X\in\mathcal{BCR}(K,H)$ 为给定关系，则

$$\begin{aligned}\sigma_{r,1}(M_X)\subseteq{}&\sigma_{r,1}(A)\cup\sigma_{r,1}(B)\cup(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B))\cup(\sigma_p(B)\cap\sigma_{cr}(A))\\&\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(B):X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\neq\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}。\end{aligned}$$

另外，若 $X(0)\subseteq A(0)$，则

$$\sigma_{r,1}(M_X)\subseteq\sigma_{r,1}(A)\cup\sigma_{r,1}(B)\cup(\sigma_p(A)\cap\sigma_{cr}(B))\cup(\sigma_p(B)\cap\sigma_{cr}(A))\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(B):\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\neq H\}。$$

证明 设 λ 不属于右边集合。以下分7种情形进行讨论。

情形1：$A-\lambda I$ 不是单射。由引理9可知，M_X 不是单射，则 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形2：$\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}=H$ 且 $\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=K$。由引理3可知，$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}=H\oplus K$，故 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形3：$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=K$ 且 $X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。此时，$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)}=\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\oplus\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\oplus\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)}=H\oplus K$，故 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形4：$\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}=H$ 且 $\operatorname{ran}(B-\lambda I)$ 不闭。由引理10可知，$\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)$ 不闭，故 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形5：$\operatorname{ran}(A-\lambda I)$ 不闭，$B-\lambda I$ 是单射，$\operatorname{ran}(B-\lambda I)$ 闭且 $X(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$。此时，$M_X-\lambda I$ 可分解为如下形式

$$M_X-\lambda I=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1&(X-\lambda I)_1\\A-A&(X-\lambda I)_2\\0&(X-\lambda I)_3\\0&(B-\lambda I)_1\\0&B-B\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H\\K\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\cap A(0)^{\perp}\\A(0)\\\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\\\operatorname{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp}\\B(0)\\\operatorname{ran}(B-\lambda I)^{\perp}\end{pmatrix}。$$

易知 $(B-\lambda I)_1$ 为可逆算子，故存在可逆算子 $T\in\mathcal{B}((\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)}\cap A(0)^{\perp})\oplus A(0)\oplus\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\oplus(\operatorname{ran}(B-\lambda I)\cap B(0)^{\perp})\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}(B-\lambda I)^{\perp})$，使得

$$T(M_X-\lambda I)=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1&0\\A-A&(X-\lambda I)_2\\0&(X-\lambda I)_3\\0&(B-\lambda I)_1\\0&B-B\\0&0\end{pmatrix}。$$

因为 $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ 不闭，所以 $\mathrm{ran}(A-\lambda I)_1$ 不闭，故 $\mathrm{ran}T(M_X-\lambda I)$ 不闭。由引理 5 可得，$\mathrm{ran}(M_X-\lambda I)$ 不闭，故 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形 6：$A-\lambda I$ 可逆，$B-\lambda I$ 不是单射且 $X(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$。此时，$M_X-\lambda I$ 可分解为如下形式

$$M_X-\lambda I=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_2\\ A-A & (X-\lambda I)_3 & (X-\lambda I)_4\\ 0 & (B-\lambda I)_1 & B-B\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H\\ \ker(B-\lambda I)^{\perp}\\ \ker(B-\lambda I)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A(0)^{\perp}\\ A(0)\\ K\end{pmatrix}。$$

易知 $(A-\lambda I)_1$ 为可逆算子，则存在 $\mathcal{B}(A(0)^{\perp}\oplus A(0)\oplus K)$ 上的可逆算子

$$W=\begin{pmatrix}I & -(A-\lambda I)_1^{-1}(X-\lambda I)_1 & -(A-\lambda I)_1^{-1}(X-\lambda I)_2\\ 0 & I & 0\\ 0 & O & I\end{pmatrix},$$

使得

$$(M_X-\lambda I)W=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & 0 & 0\\ A-A & (X-\lambda I)_3 & (X-\lambda I)_4\\ 0 & (B-\lambda I)_1 & B-B\end{pmatrix}。$$

此时，存在非零元素 $x_0\in\ker(B-\lambda I)$，使得

$$(M_X-\lambda I)W\begin{pmatrix}0\\ 0\\ x_0\end{pmatrix}\in M_X(0)=A(0)\oplus B(0),$$

即 M_X 不是单射，故 $\lambda\notin\sigma_{r,1}(M_X)$。

情形 7：$A-\lambda I$ 和 $B-\lambda I$ 均是单射且 $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ 和 $\mathrm{ran}(B-\lambda I)$ 均不闭。$M_X-\lambda I$ 可分解为如下形式

$$M_X-\lambda I=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1\\ A-A & (X-\lambda I)_2\\ 0 & (X-\lambda I)_{31}\\ 0 & X_3-X_3\\ 0 & (B-\lambda I)_1\\ 0 & B-B\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H\\ K\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\cap A(0)^{\perp}\\ A(0)\\ X_3(0)^{\perp}\\ X_3(0)\\ B(0)^{\perp}\\ B(0)\end{pmatrix}。$$

定义

$$Q_{(X_1,X_3)}=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1\\ 0 & (X-\lambda I)_{31}\\ 0 & (B-\lambda I)_1\end{pmatrix},$$

要证 $\mathrm{ran}(M_X-\lambda I)$ 不闭，只需证 $\mathrm{ran}Q_{(X_1,X_3)}$ 不闭。现设 $\mathrm{ran}Q_{(X_1,X_3)}$ 闭，因为 $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ 不闭，所以 $\mathrm{ran}(A-\lambda I)_1$ 不闭，即存在 $y_n\in\mathrm{ran}(A-\lambda I)_1$，使得 $y_n\to y(n\to\infty)$ 且 $y\notin\mathrm{ran}(A-\lambda I)_1$。显然，存在 $x_n\in H(n\in\mathbb{N})$，使得

$$\begin{pmatrix}y_n\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}(A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1\\ 0 & (X-\lambda I)_{31}\\ 0 & (B-\lambda I)_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ 0\end{pmatrix},$$

因此，$\begin{pmatrix}y_n & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathrm{ran}\,Q_{(X_1,X_3)}$ 且 $\begin{pmatrix}y_n\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，进而存在 $(x_1\quad x_2)^{\mathrm{T}}\in H\oplus K$，使得

$$\begin{pmatrix} y_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} (A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1 \\ 0 & (X-\lambda I)_{31} \\ 0 & (B-\lambda I)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

因为$(B-\lambda I)_1$是单值的,所以$x_2=0$。这意味着$y \in \operatorname{ran}(A-\lambda I)_1$,与$\operatorname{ran}(A-\lambda I)$不闭矛盾。因此$\operatorname{ran}Q_{(X_1,X_3)}$不闭,从而$\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)$不闭,故$\lambda \notin \sigma_{r,1}(M_X)$。

另外,若$X(0) \subseteq A(0)$,则$\{\lambda \in \mathbb{C} : X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I) \nsubseteq A(0)\} = \varnothing$且

$$\{\lambda \in \sigma_{cr}(B): X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} \neq \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\} = \{\lambda \in \sigma_{cr}(B): \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H\}。$$

因此,当$X(0) \subseteq A(0)$时,

$$\sigma_{r,1}(M_X) \subseteq \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma_{r,1}(B) \cup (\sigma_p(A) \cap \sigma_{cr}(B)) \cup (\sigma_p(B) \cap \sigma_{cr}(A)) \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(B): \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H\}。$$

证毕。

定理4 设$A \in \mathcal{BCR}(H)$,$B \in \mathcal{BCR}(K)$,$X \in \mathcal{BCR}(K,H)$为给定关系,则

$$\begin{aligned} \sigma_{r,2}(M_X) \subseteq & \sigma_{r,2}(A) \cup \sigma_{r,2}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : d(A-\lambda I) = \infty\} \\ & \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(A) : \overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} \neq K\} \\ & \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(B) : X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} \neq \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\} \\ & \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I) \nsubseteq A(0)\}。\end{aligned}$$

另外,若$X(0) \subseteq A(0)$,则

$$\begin{aligned} \sigma_{r,2}(M_X) \subseteq & \sigma_{r,2}(A) \cup \sigma_{r,2}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : d(A-\lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(A) : \overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} \neq K\} \\ & \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(B) : \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H\}。\end{aligned}$$

证明 设λ不属于右边集合。以下分5种情形进行讨论。

情形1:$A-\lambda I$不是单射。由引理9可知,M_X不是单射,则$\lambda \notin \sigma_{r,2}(M_X)$。

情形2:$\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} = H$且$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} = K$。由引理3可知,$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)} = H \oplus K$,故$\lambda \notin \sigma_{r,2}(M_X)$。

情形3:$\overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} = K$且$X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} = \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$。此时,$\overline{\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)} = \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \oplus \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} \oplus \overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} = H \oplus K$,故$\lambda \notin \sigma_{r,2}(M_X)$。

情形4:$\operatorname{ran}(A-\lambda I)$与$\operatorname{ran}(B-\lambda I)$均闭且$d(A-\lambda I) < \infty$。此时,$M_X-\lambda I$可分解为如下形式

$$M_X-\lambda I = \begin{pmatrix} (A-\lambda I)_1 & (X-\lambda I)_1 \\ 0 & (X-\lambda I)_2 \\ 0 & B-\lambda I \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ran}(A-\lambda I) \\ \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} \\ K \end{pmatrix}。$$

因为$\operatorname{ran}(A-\lambda I)$闭,所以$\operatorname{ran}(A-\lambda I)_1$是满射,故$\operatorname{ran}(M_X-\lambda I) = \operatorname{ran}(A-\lambda I) \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} (X-\lambda I)_2 \\ B-\lambda I \end{pmatrix}$。又因为$d(A-\lambda I) < \infty$,所以$(X-\lambda I)_2$为有限秩线性关系,由引理6可得,$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} (X-\lambda I)_2 \\ B-\lambda I \end{pmatrix}$闭,因此$\operatorname{ran}(M_X-\lambda I)$闭,故$\lambda \notin \sigma_{r,2}(M_X)$。

情形5:$A-\lambda I$可逆,$B-\lambda I$不是单射且$X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I) \subseteq A(0)$。由定理3的情形6可得,$M_X$不是单射,故$\lambda \notin \sigma_{r,2}(M_X)$。

另外,若$X(0) \subseteq A(0)$,则$\{\lambda \in \mathbb{C} : X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I) \nsubseteq A(0)\} = \varnothing$且

$$\{\lambda \in \sigma_{cr}(B) : X(0) \cap \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp} \neq \operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}\} = \{\lambda \in \sigma_{cr}(B) : \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H\}。$$

因此,

$$\begin{aligned} \sigma_{r,2}(M_X) \subseteq & \sigma_{r,2}(A) \cup \sigma_{r,2}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : d(A-\lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(A) : \overline{\operatorname{ran}(B-\lambda I)} \neq K\} \\ & \cup \{\lambda \in \sigma_{cr}(B) : \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \neq H\}。\end{aligned}$$

证毕。

参考文献：

[1] VON NEUMANN J. Functional operator Ⅱ：The geometry of orthogonal spaces[M]. Princeton：Princeton University Press，1950.

[2] SHI Y M，XU G X，REN G J. Boundedness and closedness of linear relations[J]. Linear and Multilinear Algebra，2018，66(1/4)：309-333.

[3] CROSS R. Multivalued linear operators[M]. New York：Marcel Dekker，1998.

[4] DRAGANA S，CVETKOVIĆ-ILIĆ. The point，residual and continuous spectrum of an upper triangular operator matrix[J]. Linear Algebra and Its Applications，2014，459：357-367.

[5] HAI G J，CHEN A. The residual spectrum and the continuous spectrum of upper triangular operator matrices[J]. Filomat，2014，28(1)：65-71.

[6] HAI G J，CHEN A. Possible spectrums of upper triangular operator matrices[J]. Journal of Mathematical Research with Applications，2009，29(4)：649-661.

[7] WU X F，HUANG J J，CHEN A. The point spectrum and residual spectrum of upper triangular operator matrices [J]. Filomat，2019，33(6)：1759-1771.

[8] 吴秀峰，黄俊杰．缺项3×3阶上三角算子矩阵的可能点谱[J]. 高校应用数学学报，2020，35(2)：235-244.

[9] DU Y Y，HUANG J J，RAN H. On the range of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra，2022，70(20)：5750-5769.

[10] DU Y Y，HUANG J J. Spectral property of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra，2022，70(8)：1526-1542.

[11] ALVAREZ T，KESKES S. Spectra for upper triangular linear relation matrices through local spectral theory[J]. Aequationes Mathematicae，2024，98(2)：399-422.

（责任编委　李　宏）

Properties of Two Classes of Point Spectrum and Two Classes of Residual Spectrum for Upper Triangular Relation Matrices

ZHANG Yimeng[1]，WU Xiufeng[1,2,3]

(1. *College of Mathematics Science*，*Inner Mongolia Normal University*，*Hohhot* 010022，*China*；
2. *Center for Applied Mathematics Inner Mongolia*，*Hohhot* 010022，*China*；
3. *Key Laboratory of Infinite Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application*，*Ministry of Education*，*Inner Mongolia Normal University*，*Hohhot* 010022，*China*)

Abstract: Let H, K be infinite-dimensional complex separable Hilbert spaces. For given the relation $A \in \mathcal{BR}(H), B \in \mathcal{BR}(K), X \in \mathcal{BR}(K, H)$, the 2×2 upper triangular relation matrix is denoted by $M_X = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{BR}(H \oplus K)$. The connections between two classes of point spectrum $\sigma_{p,1}(M_X)$, $\sigma_{p,2}(M_X)$, two classes of residual spectrum $\sigma_{r,1}(M_X)$, $\sigma_{r,2}(M_X)$ of M_X and the unions of the corresponding spectrum of their diagonal entries A and B are given.

Key words: relation matrix；point spectrum；residual spectrum；upper triangular relation matrix