

<https://doi.org/10.3799/dqkx.2025.007>



考虑多种不确定性与阶段相关性的基坑开挖贝叶斯更新方法

许 领, 戚桢童, 赵腾远

西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 陕西西安 710049

摘要: 基坑开挖响应预测模型的准确性受多种不确定性的影响, 贝叶斯理论可以有效融合先验信息和观测数据, 为降低土体参数不确定性和提高变形预测准确度提供了新途径. 然而, 传统的贝叶斯更新方法对不确定性的考虑有限, 因此本文提出了一种能够考虑土体参数、模型偏差、观测误差不确定性以及阶段相关性的贝叶斯更新方法. 通过两个实际案例的验证结果表明: 所提方法能够有效降低模型参数的不确定性, 提高模型对于不同土体类型基坑开挖响应预测的准确度.

关键词: 贝叶斯方法; 概率反分析; KJHH 模型; 基坑开挖; 变形预测; 工程地质.

中图分类号: TU34

文章编号: 1000-2383(2026)02-361-14

收稿日期: 2025-01-03

Bayesian Updating Method of Excavation Considering Various Uncertainties and Stage Correlation

Xu Ling, Qi Yatong, Zhao Tengyuan

School of Human Settlements and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Abstract: The accuracy of excavation response prediction models is generally influenced by various uncertainties, including those related to soil parameters, model uncertainties, measurement errors. Bayesian methods provide a novel way to reduce and/or quantify these uncertainties, and is a natural framework for improving model predictions by systematically integrating prior knowledge with observational data. However, existing Bayesian updating methods typically addressed the uncertainties with soil parameters or/and model biases, while the measurement errors are ignored. Besides, correlations between different excavation stages are also overlooked for mathematical convenience. These simplifications may lead to unreliable predictions in practice. In this study, a novel Bayesian updating method is proposed, which simultaneously incorporates uncertainties in soil parameters, model bias, observational errors, and stage correlations. Two case studies are used to illustrate and validate the method. The results demonstrate that the proposed approach significantly enhances the accuracy of semi-empirical models in predicting excavation responses across different soil types.

Key words: Bayesian methods; probabilistic inverse analysis; KJHH model; excavation; deformation prediction; engineering geology.

基金项目: 陕西省重点研发项目 (No. 2022GXLH-01-24); 国家自然科学基金项目 (No. 42107204).

作者简介: 许领 (1982-), 男, 教授, 主要从事黄土灾变机理、监测、预警与防控理论研究. ORCID: 0000-0002-0952-7867. E-mail: xuling82@xju.edu.cn

* **通讯作者:** 赵腾远, ORCID: 0000-0002-7007-094X. E-mail: tyzhao@xju.edu.cn

引用格式: 许领, 戚桢童, 赵腾远, 2026. 考虑多种不确定性与阶段相关性的基坑开挖贝叶斯更新方法. 地球科学, 51(2): 361-374.

Citation: Xu Ling, Qi Yatong, Zhao Tengyuan, 2026. Bayesian Updating Method of Excavation Considering Various Uncertainties and Stage Correlation. *Earth Science*, 51(2): 361-374.

0 引言

随着我国“西部大开发”和“黄河流域生态保护与高质量发展”重大战略的不断推进,黄土地区城镇化建设快速发展(兰恒星等,2022),其中交通、市政、地下空间基础设施建造密集,涉及到大量深基坑工程(胡志平等,2019)。在黄土基坑开挖过程中,黄土土体应力释放会引起围护结构变形和地表沉降,另外,黄土自身的结构性,可能会导致更为严重的土体变形和结构损害(Luo *et al.*, 2018; Kawa *et al.*, 2021)。过大的开挖响应不仅会危害基坑自身安全,还会造成邻近既有建筑物开裂、地下管线破裂以及道路不均匀沉降(Hsiao *et al.*, 2008; Wang *et al.*, 2014),对人民群众生命财产安全造成极大威胁。因此,准确预测基坑开挖过程中的变形响应,是亟待解决的工程问题(夏天等,2023)。目前针对基坑开挖变形预测的研究主要包括解析解法、数值分析方法和(半)经验公式法(Fan *et al.*, 2021)。其中半经验公式不仅结合了实际工程案例和数值模拟结果,且计算过程相较于数值分析更为简便,因此在工程实际中被广泛应用(Kung *et al.* 2007; Hsiao *et al.*, 2008)。

尽管基坑开挖响应预测的手段多种多样,但预测结果往往受各种不确定性因素的影响较大,包括土体参数、模型偏差系数和现场观测误差的不确定性。以KJHH模型为例,尽管该模型在软土地区表现良好,但在黄土地区的预测结果与实际变形往往有较大差距。因此,研究人员通常会采用贝叶斯反分析法,利用观测数据更新模型中的不确定参数(Li *et al.*, 2016; Qi and Zhou, 2017),以提高预测结果的准确性:例如李培平等(2018)提出了一种考虑经验模型不确定性的更新方法,将模型偏差系数视为一个随着开挖而不断更新的随机变量;Luo *et al.* (2020)在Juang *et al.* (2013)的基础上,考虑了关键土体参数和模型偏差系数的影响,提高了模型预测结果的准确度;Li *et al.* (2021)则将多点观测数据融入了贝叶斯更新过程,充分利用观测数据降低预测结果的不确定性。然而,基坑工程作为一种大型时序性工程,不仅涉及到的不确定性众多,并且不同阶段开挖响应之间具有一定相关性(Wu *et al.*, 2014; Lo and Leung, 2019)。前人关于基坑开挖贝叶斯反分析的研究主要集中在土体参数和模型偏差系数不确定性的刻画上,缺少对观测误差不

确定性和阶段相关性的表征。

因此,本文提出了一种贝叶斯概率反分析方法,该方法考虑了不同开挖阶段响应之间存在的相关性,并利用了多点观测数据更新土体参数、模型偏差系数与观测误差,以提高半经验模型对于不同地区以及不同土体类型基坑开挖响应预测的准确性。

1 KJHH模型简介

在本研究中,选用了一种用于计算基坑开挖响应的半经验模型作为贝叶斯更新方法中的正向模型,即KJHH模型。该模型是基于33个软黏土地区深基坑开挖案例和上百个使用HSS本构的有限元模型计算结果,通过回归分析而建立的。相较于其他预测模型,该模型充分考虑了开挖深度 H_e 、基坑宽度 B 、系统刚度 $EI/\gamma_w h_{avg}^4$ (EI 为地连墙抗弯刚度, γ_w 为水的重度, h_{avg} 为支撑平均间距)以及土体参数(s_u/σ'_v 与 E_i/σ'_v ,其中 s_u 为不排水抗剪强度, E_i 为初始杨氏模量, σ'_v 为竖向有效应力)对开挖响应的影响,并建立了地连墙水平最大变形和地表最大竖向沉降之间的关系,因此该模型在软土地区基坑工程的变形预测中表现较好(Kung *et al.* 2007)。

根据KJHH模型,首先计算地连墙最大水平变形 δ_{hm} ,计算公式如下:

$$\delta_{hm} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_1 X_2 + a_7 X_1 X_3 + a_8 X_1 X_5, \quad (1)$$

$$X_i = b_1 x_i^2 + b_2 x_i + b_3, i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (2)$$

式中: X_i 为转换后的变量, x_i 为对应的输入变量。例如, $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [H_e, \ln(EI/\gamma_w h_{avg}^4), B/2, s_u/\sigma'_v, E_i/\sigma'_v]$ 。式中常系数 a_i 由最小二乘法得到,其中 $a_0 = -13.41973, a_1 = -0.49351, a_2 = -0.09872, a_3 = 0.06025, a_4 = 0.23766, a_5 = -0.15406, a_6 = 0.00093, a_7 = 0.00285, a_8 = 0.00198$ 。转换函数中的系数 b_1, b_2, b_3 由误差最小原则确定,取值如表1所示。

其次,计算变形比 R ,即地表最大竖向沉降 δ_{vm}

表1 X转换函数多项式系数

Table 1 The coefficients in transformation function				
变量	适用范围	b_1	b_2	b_3
H_e	0~30	-0.4	24	-50
$\ln(EI/\gamma_w h_{avg}^4)$	≥ 0	11.5	-295	2000
$B/2$	$0 \leq B \leq 100$	-0.04	4	90
s_u/σ'_v	0.2~0.4	3225	-2882	730
E_i/σ'_v	200~1200	0.00041	-1	500

与地连墙最大水平变形 δ_{hm} 之比,计算公式如下:

$$R = c_0 + c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3 + c_4 Y_1 Y_2 + c_5 Y_1 Y_3 + c_6 Y_2 Y_3 + c_7 Y_3^3 + c_8 Y_1 Y_2 Y_3, \quad (3)$$

式中: $Y_1 = \sum H_i / H_{wall}$, 其中 $\sum H_i$ 为墙体深度范围内所有黏土土层厚度总和, H_{wall} 为地连墙高度; $Y_2 = s_u / \sigma'_v$; $Y_3 = E_v / 1000 \sigma'_v$. 式中系数 c_i 通过最小二乘法得到, 其中 $c_0 = 4.556\ 22$, $c_1 = -3.401\ 51$, $c_2 = -7.376\ 97$, $c_3 = -4.994\ 07$, $c_4 = 7.141\ 06$, $c_5 = 4.600\ 55$, $c_6 = 8.748\ 63$, $c_7 = 0.380\ 92$, $c_8 = -10.589\ 58$.

最后, 计算地表最大竖向沉降 δ_{vm} , 计算公式为:

$$\delta_{vm} = R \cdot \delta_{hm}. \quad (4)$$

2 基坑开挖贝叶斯更新方法

由于KJHH模型是一种适用于特定软土地区的半经验模型, 当将其用于其他软土或者非软土地区的基坑变形预测时, 其预测值不可避免地会与观测数据存在较大差距. 这种差距主要是由场地土体参数的不确定性、模型自身偏差, 以及现场监测仪器和人工操作所引入的观测误差共同导致. 因此, 当KJHH模型应用于新的工程场地时, 需要对其模型的重要参数进行重新标定.

令 $\delta(\theta, r)$ 代表KJHH模型预测值, 其中 $\theta = [s_u / \sigma'_v, E_v / \sigma'_v]$ 为模型中的不确定土体参数, r 则为模型的确定性参数. 由于确定性模型参数不会发生变化, 故下文将未修正的模型预测值以 $\delta(\theta)$ 表示. 此外, 令 α 表示模型偏差系数、令 ϵ 表示模型预测值和现场观测值 y 之间的残差, 这里主要体现为观测误差. 基于上述讨论, 现场观测值和模型预测值的关系可以表示为:

$$y = \alpha \cdot \delta(\theta) + \epsilon = g(\Theta) + \epsilon. \quad (5)$$

确切讲, y 为基坑最大变形观测数据, 此外根据前人的统计结果可知 (Juang *et al.*, 2013; Wu *et al.*, 2014), 观测误差 ϵ 服从均值为 $\mu_\epsilon = 0$ 而方差 $(\sigma_\epsilon)^2$ 未知的正态分布. 其中 σ_ϵ 表示观测误差的标准差. 为便于公式推导, 这里令 Θ 表示与模型预测直接相关的所有参数, 即 α 和 θ , $g(\Theta)$ 则代表被模型偏差系数修正后的模型预测值.

2.1 贝叶斯理论框架

鉴于模型标定中的诸多不确定性, 本文采用贝叶斯方法对上述参数进行更新, 包括模型偏差系数 α 、土体参数 θ 与观测误差标准差 σ_ϵ . 根据贝叶斯理论, 所有未知参数均被视作随机变量, 而贝叶斯方法通过将工程先验信息与观测数据有效结合起来,

共同用于参数的反演与更新. 贝叶斯理论中, 参数更新的最后结果体现在参数的后验概率分布 $P(\Theta, \sigma_\epsilon | y)$ 上. 根据贝叶斯定理 (Ang and Tang, 2007), $P(\Theta, \sigma_\epsilon | y)$ 表示为:

$$P(\Theta, \sigma_\epsilon | y) = \eta P(\Theta, \sigma_\epsilon) P(y | \Theta, \sigma_\epsilon) \quad (6)$$

其中: $P(\Theta, \sigma_\epsilon | y)$ 体现了结合工程经验与观测数据后的最新估计; $P(\Theta, \sigma_\epsilon)$ 表示 Θ 与 σ_ϵ 的先验分布, 主要反映了工程经验; $P(y | \Theta, \sigma_\epsilon)$ 则为似然函数, 主要体现了在给定参数 Θ 与 σ_ϵ 条件下, 观测数据与现有模型——KJHH模型的吻合程度; η 为归一化常数, 保证了后验分布 $P(\Theta, \sigma_\epsilon | y)$ 能够满足概率密度函数的定义.

需要指出的是, 基坑开挖作为一种大型时序性工程, 其施工一般分为多个阶段. 本研究利用基坑开挖多个连续阶段中, 地下连续墙最大水平变形数据 y_h 与周围地表最大竖向沉降数据 y_v 共同更新所有相关参数, 即 $y = \{y_h, y_v\}$. 由式(6)可知, 先验分布 $P(\Theta, \sigma_\epsilon)$ 与似然函数 $P(y | \Theta, \sigma_\epsilon)$ 是进行贝叶斯参数估计的两个重要组成部分, 以下将分别进行详细讨论.

2.2 先验概率分布的建立

为方便公式推导, 不妨假定所有未知参数 (α, θ 和 σ_ϵ) 之间相互独立. 根据概率论的链式法则, $P(\Theta, \sigma_\epsilon)$ 可以表示为:

$$P(\Theta, \sigma_\epsilon) = P(\theta) P(\alpha) P(\sigma_\epsilon), \quad (7)$$

$P(\alpha)$ 、 $P(\theta)$ 、 $P(\sigma_\epsilon)$ 分别表示 α 、 θ 和 σ_ϵ 的先验概率分布. 根据前人研究经验, 土体参数通常可以看作服从正态分布的随机变量, 因此, 先验分布 $P(\theta)$ 可以表示为:

$$P(\theta) = \prod_{i=1}^{n_\theta} P(\theta_i) = \prod_{i=1}^{n_\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\theta_i}} \exp\left[-\frac{(\theta_i - \mu_{\theta_i})^2}{2\sigma_{\theta_i}^2}\right], \quad (8)$$

其中: θ_i 表示第 i 个土体参数; n_θ 是本文章涉及土体参数的总个数; μ_{θ_i} 和 σ_{θ_i} 分别表示 θ_i 的均值与标准差, 通常可以由文献或科研报告获得. 例如, 基于Kung *et al.* (2007) 的统计结果, 可以得出台北地区黏土归一化不排水抗剪强度 (s_u / σ'_v) 的均值为 0.25, 标准差为 0.16.

类似地, 文献中模型偏差系数 α 通常采用正态分布对其进行建模 (Li *et al.*, 2016, 2021; Miao *et al.*, 2023), 考虑到建模计算中的鲁棒性, 这里采用了截断正态分布. 此外, 考虑到KJHH模型用到了不同模型来分别计算地下连续墙最大水平变形、地

表最大竖向沉降,故其相应的模型偏差系数分别以 α_h 与 α_v 表示,先验概率分布 $P(\alpha)$ 表示为:

$$P(\alpha) = P(\alpha_h) \cdot P(\alpha_v), \quad (9)$$

其中: $P(\alpha_v)$ 和 $P(\alpha_h)$ 表示为:

$$P(\alpha_i) = \frac{\exp\left[-\frac{(\alpha_i - \mu_{\alpha_i})^2}{2\sigma_{\alpha_i}^2}\right]}{\sigma_{\alpha_i} \int_{\frac{a - \mu_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}}}^{\frac{b - \mu_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}}} e^{-t^2/2} dt} I_{[a,b]}(\alpha_i), \quad (10)$$

其中: a, b 代表截断正态分布的上限和下限,分别取 0 和 2. $I_{[a,b]}(\alpha_i)$ 为指示函数(当 $a \leq \alpha_i \leq b$ 时等于 1, 否则等于 0). 此外, α_i 表示 α_h 或 α_v ; μ_{α_i} 和 σ_{α_i} 分别表示 α_i 的均值与标准差,具体数值亦可参考相关文献,例如 Juang *et al.* (2013) 指出 α_h 或 α_v 的均值为 1, 标准差为 0.25 或 0.35.

在本文的贝叶斯更新过程中,用到了地下连续墙最大水平变形数据 y_h 与周围地表最大竖向沉降数据 y_v 两种测量数据,且每一种数据都涉及一定的观测误差,分别令 ϵ_h 与 ϵ_v 表示. ϵ_h 与 ϵ_v 均当作均值为零,标准差未知的正态变量,标准差分别用 $\sigma_{\epsilon,h}$ 与 $\sigma_{\epsilon,v}$ 表示. 由标准差的定义可知, $\sigma_{\epsilon,h}$ 与 $\sigma_{\epsilon,v}$ 恒大于零,故可当作服从对数正态分布的随机变量,先验分布 $P(\sigma_\epsilon)$ 可以表示为:

$$P(\sigma_\epsilon) = P(\sigma_{\epsilon,h}) \cdot P(\sigma_{\epsilon,v}), \quad (11)$$

其中: $\sigma_\epsilon = \{\sigma_{\epsilon,h}, \sigma_{\epsilon,v}\}$. $P(\sigma_{\epsilon,h})$ 和 $P(\sigma_{\epsilon,v})$ 表示为:

$$P(\sigma_{\epsilon,i}) = \frac{1}{\sigma_{\epsilon,i} \xi_i \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln \sigma_{\epsilon,i} - \zeta_i)^2}{2\xi_i^2}\right], \quad (12)$$

其中: $\sigma_{\epsilon,i}$ 表示 $\sigma_{\epsilon,h}$ 与 $\sigma_{\epsilon,v}$, 角标 i 表示 h 或 v . ζ_i 和 ξ_i 分别表示 $\ln(\sigma_{\epsilon,i})$ 的均值与标准差,且可以由 $\sigma_{\epsilon,i}$ 的均值与标准差计算而来 (Ang and Tang, 2007). 观测误差的统计特征可以参考相关文献进行取值,例如 Qi *et al.* (2017) 针对监测仪器的统计结果表明,当开挖深度为 7 m 时,监测仪器的观测误差标准差为 1.35 mm. 需要说明的是,除了可以采取对数正态分布表示 $\sigma_{\epsilon,i}$ 的非负性,还可用其他分布表示,如伽马分布. 不同表达形式的先验分布对最终结果影响较小,但由于篇幅所限,并未在这一一展示.

结合公式 (7)~(12), 即可得出本文中所有涉及参数的先验分布. 此外,上述讨论中虽然采取了截断正态分布、对数正态分布来表示相关参数的先验分布,但读者或工程师可根据工程经验以及具体场地特征选取其他合理的分布形式.

2.3 似然函数的建立

似然函数的构建是进行贝叶斯参数标定的核心环节,主要体现了在给定参数 Θ 与 σ_ϵ 的条件下,观测数据与现有 KJHH 模型的匹配程度. 如前文所述,本研究主要用到基坑开挖中,地下连续墙最大水平变形数据 y_h 与周围地表最大竖向沉降数据 y_v , 因此,需要计算在给定 Θ 与 σ_ϵ 的条件下,同时得到 $y = \{y_v, y_h\}$ 的可能性. 为简化公式推导,不妨将这两种数据当作弱相关或相互独立,则似然函数 $P(y|\Theta, \sigma_\epsilon)$ 可以表示为:

$$P(y|\Theta, \sigma_\epsilon) = L_h \cdot L_v, \quad (13)$$

其中: L_h 和 L_v 分别表示给定参数下,得到观测数据 y_h 与 y_v 的可能性.

由 Kung *et al.* (2007) 的统计结果可知,观测误差 ϵ_h (或 ϵ_v) 通常服从正态分布,则根据式 (5) 可得, $y - g(\Theta)$ 服从均值为 0、标准差为 $\sigma_{\epsilon,h}$ (或 $\sigma_{\epsilon,v}$) 的正态分布. 另外,考虑到基坑具有连续开挖和变形的特性,因此其不同阶段的开挖响应之间会存在一定的阶段相关性,基于此,不妨选用多维正态分布表示多阶段观测数据下参数的似然函数,因此似然函数 L_h 和 L_v 分别表示如下:

$$L_h = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |C|}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\epsilon,h}^2} P_h^T C^{-1} P_h\right), \quad (14a)$$

$$L_v = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |C|}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\epsilon,v}^2} P_v^T C^{-1} P_v\right), \quad (14b)$$

其中: $P_h = [p_{h,1}, p_{h,2}, p_{h,3}, \dots, p_{h,k}]^T$, $P_v = [p_{v,1}, p_{v,2}, \dots, p_{v,k}]^T$.

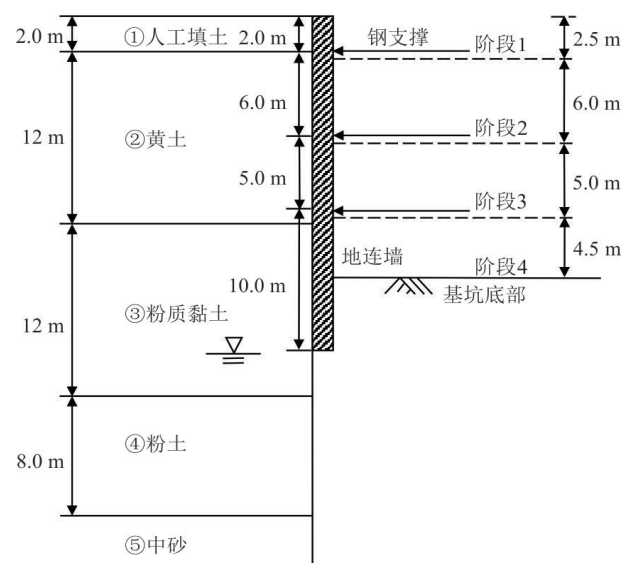


图 1 案例一工程概况与土体剖面示意图

Fig.1 Project overview and soil profile in Example 1

$p_{v,3}, \dots, p_{v,k}]^T$; 其中 $p_{h,j}$ 表示第 j 个阶段地下连续墙最大水平变形数据 $y_{h,j}$ 与模型计算值 $g_{h,j}(\Theta)$ 的差值, 即 $[y_{h,j} - g_{h,j}(\Theta)]$; 类似地, $p_{v,j}$ 表示第 j 个开挖阶段地表沉降最大变形数据 $y_{v,j}$ 与模型计算值 $g_{v,j}(\Theta)$ 的差值, 即 $[y_{v,j} - g_{v,j}(\Theta)]$ ($j=1, 2, \dots, k$). 此外, 式(14a)和(14b)中的相关系数矩阵 C 体现了基坑不同阶段间开挖响应的相关性.

根据 Wu *et al.* (2014) 对 22 个基坑开挖案例中不同阶段开挖响应的统计分析结果可知, 不同阶段响应之间存在正相关性, 且这种正相关性随着不同阶段间开挖面距离的增大而减小. 这种相关性随欧氏距离变化而变化的现象与土体参数空间自相关性的表现较为相似(蒋水华等, 2014), 故可以选用土体参数随机场中常用的指数型自相关函数(SNX)来计算矩阵 C , 具体表示如下:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中: ρ_{ij} 为第 i 阶段和第 j 阶段观测误差之间的相关系数, 可以表示为:

$$\rho_{ij} = \exp\left(-2 \frac{\Delta_{ij}}{\beta}\right), \quad (16)$$

其中: Δ_{ij} 为第 i 阶段和第 j 阶段开挖面深度之差; β 为波动范围, 体现了相关距离的大小. 在基坑工程中可近似取为容易发生变形土层的厚度之和. 需要说明的是, 虽然式(16)采用了指数分布的形式计算阶段间的相关系数, 笔者亦尝试了其他类型的相关函数, 如高斯型、三角型等函数, 但对结果影响较小, 因此不再赘述.

基于上述讨论可知, 由公式(13)~(16)可推导

出似然函数, 再结合小节 2.2 的先验分布, 即可推导出所有相关参数的后验分布[见公式(6)]. 然而, 本文中似然函数构造较为复杂, 且与先验分布不存在共轭关系, 故式(6)中的参数后验分布没有解析解. 因此, 本文采用了马尔科夫链蒙特卡洛(MCMC)模拟, 通过采样的方式来近似求解参数的后验分布(Zhang *et al.*, 2009; Gong *et al.*, 2017), 详见下节讨论.

2.4 哈密顿蒙特卡洛(HMC)算法

MCMC 方法的基本思想是从目标分布中迭代抽取有效样本, 通过大量的样本反向刻画参数的后验分布. 由于哈密顿蒙特卡洛(HMC)算法在处理高维复杂分布时, 具有较高的接受率和较低的样本自相关性, 因此本研究中采用 HMC 算法求解后验分布. 基于 HMC 算法的 MCMC 模拟程序可参考前人工作(Gelman *et al.*, 2013), 在实际应用中可以通过调用 Python 中的“Pymc”库来实现具体操作(Salvatier *et al.*, 2016).

为了确保马尔科夫链能够达到目标的平稳分布, 需要在采样过程中设置燃烧期(Burn-in period). 燃烧期是指马尔科夫链进入平稳分布之前的阶段, 且燃烧期内生成的样本受初始值的影响较大, 因此这部分样本需要舍弃. 在 MCMC 方法中, 通常采用 Gelman-Rubin 统计量(Gelman and Rubin, 1992)来检查马尔科夫链的收敛性, 即通过比较潜在比例缩减因子(PSRF)是否小于 1.10. 当 PSRF 小于 1.10 时, 则认为马尔科夫链达到了收敛且样本趋于稳定状态(Salvatier *et al.*, 2016). 此外, 为了确保样本能够合理刻画参数的后验分布, 需收集一定量的 MCMC 有效样本, 有效样本量可以通过观察样本统计特征的变化趋势具体确定(Li *et al.*, 2021).

表 2 案例一不同阶段确定性参数与观测数据

Table 2 Deterministic parameters and field observations at different stages in Example 1

参数	开挖阶段		
	2	3	4
H_c (m)	8.5	13.5	18
B (m)	22.5	22.5	22.5
$\ln(EI/\gamma_w h^4_{avg})$	4.52	4.88	4.88
$\sum H_i/H_{wall}$	1.0	1.0	1.0
β (m)	34	34	34
y_h (mm)	2.6	5.6	7.1
y_v (mm)	6.5	7.5	8.0

表 3 案例一先验分布

Table 3 Prior distribution in Example 1

参数	分布类型	均值	变异系数
s_u/σ_v	正态分布	0.25	0.20
E_i/σ_v	正态分布	500	0.20
α_h	截断正态分布	1.00	0.25
α_v	截断正态分布	1.00	0.34
$\sigma_{e,h}$	对数正态分布	1.35	0.35
$\sigma_{e,v}$	对数正态分布	1.35	0.35

需要说明的是,本文在基坑开挖参数贝叶斯反演中,用到了第 j 阶段以前的所有观测数据,包括所有阶段地下连续墙最大水平变形数据 y_h 与周围地表最大竖向沉降数据 y_v . 所得的参数 Θ 的后验样本可以作为 KJHH 模型的输入用来预测第 j 阶段的开挖变形,即地下连续墙最大水平变形、周围地表最大竖向沉降. 如基坑开挖第 3 阶段的变形预测完全基于第 1 与第 2 阶段数据下 Θ 的后验分布信息.

3 案例一:黄土地区地铁深基坑

3.1 工程概况

西安市位于我国黄河流域中部的关中盆地,分布有深厚的黄土覆盖层,本节以西安永宁门地铁深基坑为例,验证所提贝叶斯更新方法对于黄土地区基坑开挖响应预测的有效性. 永宁门地铁深基坑围护结构采用钻孔灌注桩+止水帷幕形式,在后续计算中采用刚度等效法,将围护结构等效为矩形截面的地连墙,内支撑采用水平钢管支撑,安全等级为特级,详细的工程信息和变形观测数据可参照前人研究(刘均红,2010). 本案例基坑宽度(B)为 22.5 m,刚度等效后的地下连续墙深度(H_{wall})为 23 m,土层剖面、不同阶段开挖深度以及钢支撑位置如图 1 所示.

根据 Juang *et al.* (2013) 的研究可知,基坑变形响应受开挖深度影响较大,而基坑开挖初期阶段响应较小,且变形模式与后续阶段不同,故本例从第 2 阶段开始进行分析. 本例基坑工程中采用钻孔灌注桩作为支护结构,可由等效刚度原则转化为矩形截面的地连墙结构,矩形宽度可近似取 0.7 倍桩径(杨罗沙,2011). 根据 KJHH 模型的计算方法,将容易发生变形土层厚度归一化,得到 $\sum H_i/H_{wall}$ 为 1.0(当土层累积值 $\sum H_i$ 大于地下连续墙高度 H_{wall} 时,上述归一化值取 1); 开挖阶段响应间相关系数的波动范围(β)则取人工填土、黄土、粉质黏土与粉土土层厚

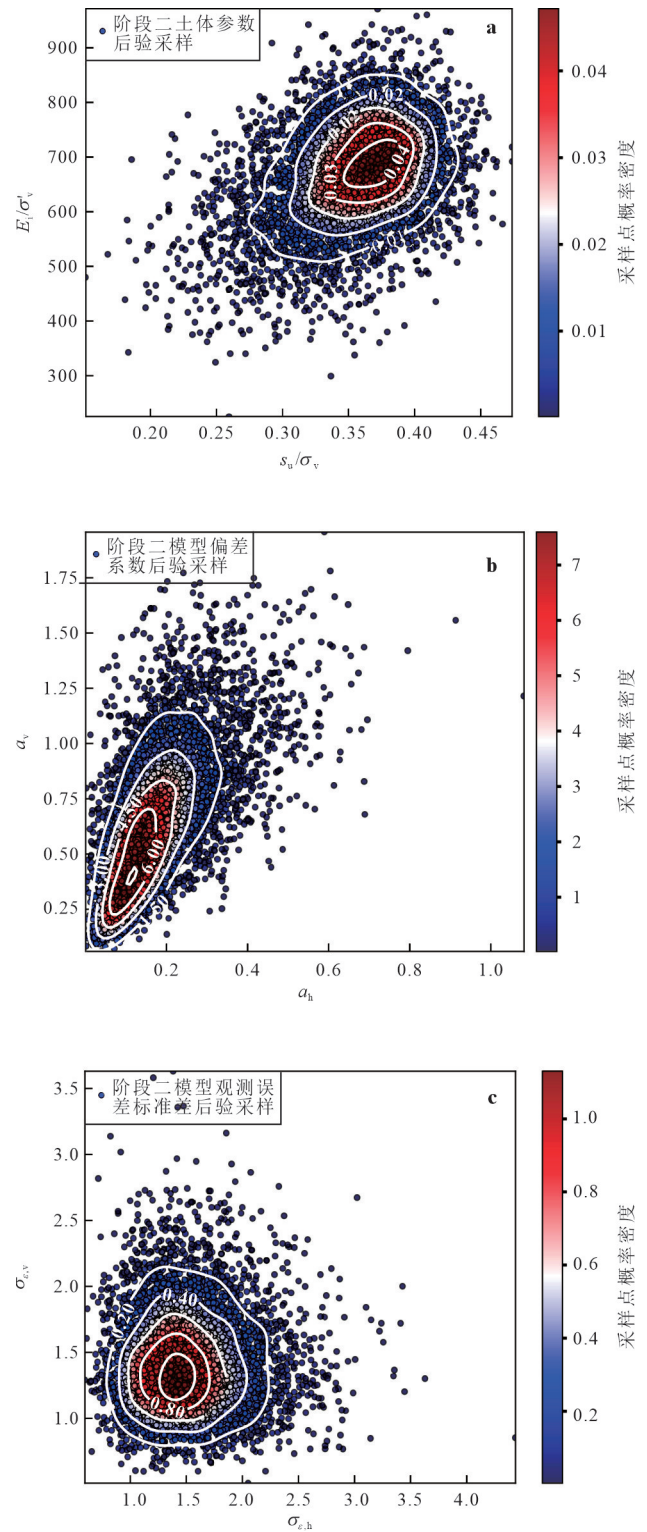


图 2 阶段二参数后验采样散点图

Fig.2 Posterior sampling scatterplots of parameters in stage 2
a. 土体参数; b. 模型偏差系数; c. 观测误差标准差

度之和,本例中为 34 m,即认为开挖深度在此范围内的阶段,其变形响应之间具有较大的相关性. 第 2~4 阶段的 KJHH 模型确定性参数与观测数据如表

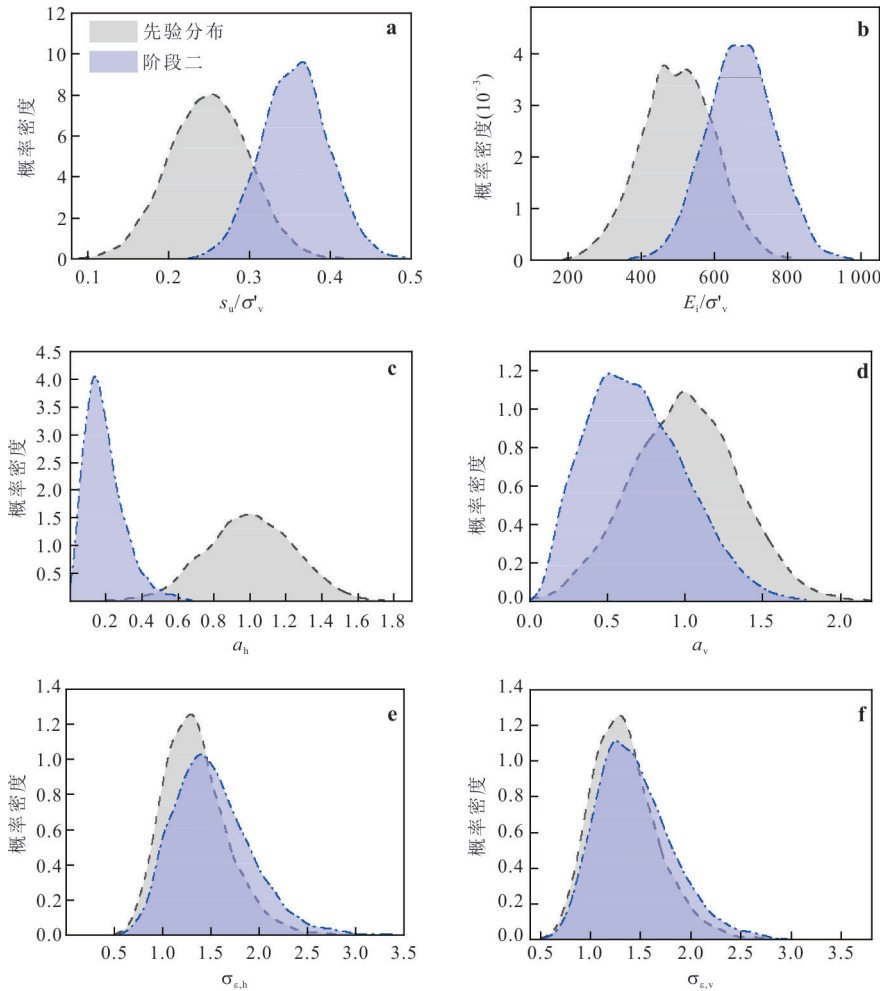


图 3 不同参数阶段二后验与先验分布的区别

Fig.3 The difference between posterior distributions in stage 2 and priors distributions of different parameters

a. 归一化不排水抗剪强度 s_u/σ'_v ; b. 归一化初始杨氏模量 E_i/σ'_v ; c. 水平变形模型偏差系数 α_h ; d. 竖向沉降模型偏差系数 α_v ; e. 水平变形观测误差标准差 $\sigma_{e,h}$; f. 沉降观测误差标准差 $\sigma_{e,v}$

2 所示。

本例土体参数(s_u/σ'_v 、 E_i/σ'_v)的先验分布根据前人试验数据确定(Luo *et al.*, 2020)。根据 Kung *et al.* (2007)的统计结果,模型偏差系数(α_h 、 α_v)服从均值为 1、上限为 2、下限为 0 的截断正态分布,观测误差标准差($\sigma_{e,h}$ 、 $\sigma_{e,v}$)的均值和变异系数则可参照 Qi *et al.*(2017)和 Wu *et al.*(2014)对监测仪器观测误差的统计结果而定,具体数值见表 3。

3.2 参数贝叶斯更新

结合 2.2 的先验分布、开挖阶段二的观测数据,以及 2.3 中的似然函数,即可得出相关参数 Θ 与 σ_ϵ 的后验分布函数,并使用 MCMC 方法对后验进行采样,得到参数的后验分布。本例中通过多次尝试,将 MCMC 采样过程中燃烧期数量设为 5 000,即前 5 000 个样本将被舍弃以保证马尔科夫链达到稳定

状态。本例还设置了 5 条马尔科夫链进行同步采样,并发现当有效采样数量超过 5 000 时,参数的 PSRF 基本不再变化且满足收敛要求(小于 1.10),参数样本集合的均值和变异系数也趋于稳定。因此综合考虑计算精度和效率的要求,本例将采样数量设置为 5 000。图 2a、2b 和 2c 分别展示了使用阶段二的观测数据进行更新后,土体参数(s_u/σ'_v 、 E_i/σ'_v)、模型偏差系数(α_h 、 α_v)和观测误差标准差($\sigma_{e,h}$ 、 $\sigma_{e,v}$)的后验采样散点图。

在得到采用阶段二观测数据更新的参数后验样本后,将每个参数的后验样本集合绘制为概率密度图像,并与先验分布的概率密度图像进行对比。图 3 展示了不同参数阶段二后验分布与先验分布的区别,可以看到,土体参数(s_u/σ'_v 、 E_i/σ'_v)和模型偏差系数(α_h 、 α_v)的阶段二后验分布相较于先验,其变异

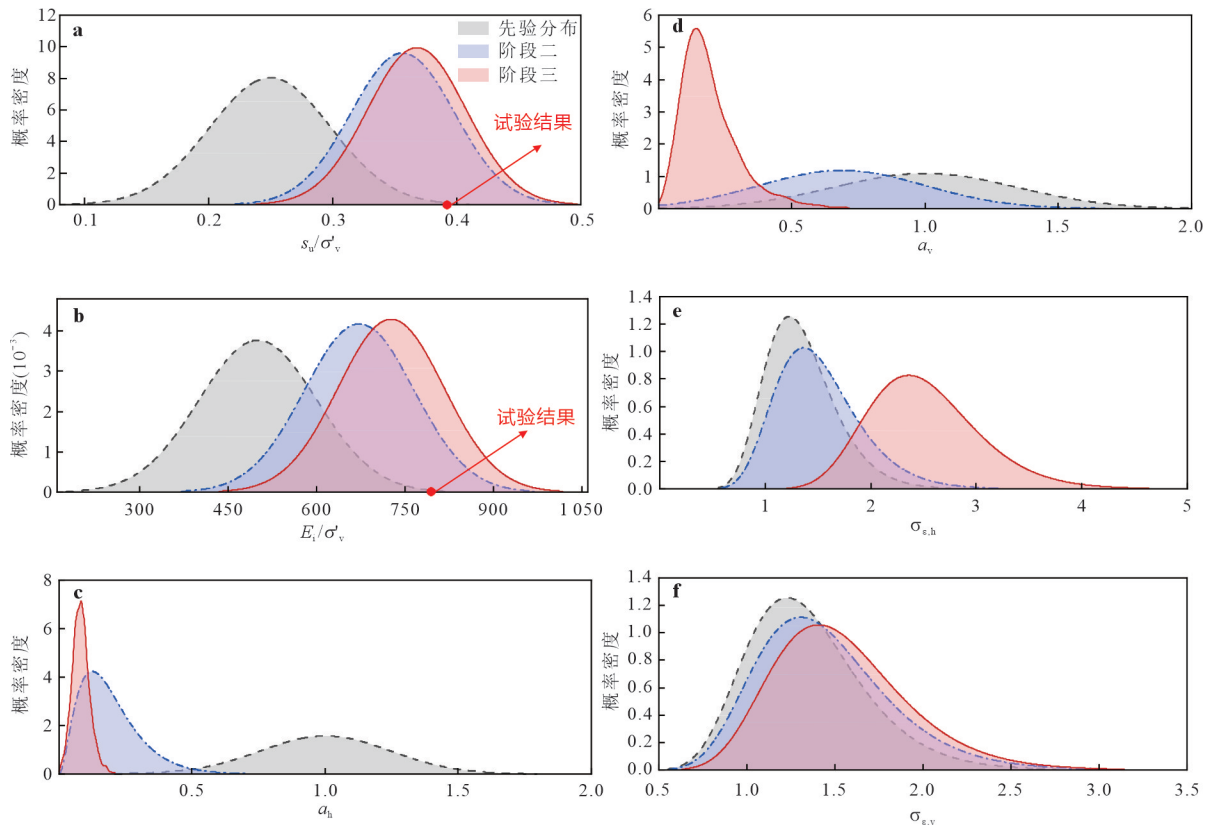


图 4 参数的先验和后验分布

Fig.4 Prior and Posterior distribution of parameters

a. 归一化不排水抗剪强度 s_u/σ'_v ; b. 归一化初始杨氏模量 E_i/σ'_v ; c. 水平变形模型偏差系数 α_h ; d. 竖向沉降模型偏差系数 α_v ; e. 水平变形观测误差标准差 $\sigma_{\epsilon,h}$; f. 竖向沉降观测误差标准差 $\sigma_{\epsilon,v}$.

性降低,这是因为随着观测数据的引入,参数的不确定性减小.其中土体参数的后验均值在更新后增大,分析认为是因为土体参数的先验设置参考了黏土参数的取值范围,而西安地区黄土的土体强度通常大于黏土.此外,模型偏差系数的均值由先验分布的 1.0 降低到了 0.5 以下,变化幅度较大,分析认为这是由于 KJHH 模型是基于特定软土地区基坑案例建立的,而黄土的性质与软土具有较大差别,故模型偏差系数变化较大.值得注意的是,观测误差标准差的后验均值和变异性在更新后增大,分析认为这是由于随着开挖的进行,变形监测仪器的观测误差会逐渐累积(例如随着开挖深度的增加,测斜仪的观测误差具有累加效应),导致观测误差的不确定性增大.

采用所有开挖阶段数据更新土体参数、模型偏差系数与观测误差标准差的后验和先验分布如图 4 所示.随着更新次数的增加,土体参数和模型偏差系数的变异系数越小(后验分布越窄),这说明参数的不确定性在随着观测数据量的增长而逐渐降低.

值得注意的是,土体参数的最终阶段后验均值与西安地区黄土参数的试验结果较为接近(邵生俊等, 2004; 翁效林等, 2024),说明所提方法反演土体性质参数的可靠性和鲁棒性较好.此外,由于前文所述的观测误差累积效应,观测误差标准差的均值和变异性随着更新阶段的进行而逐渐增大.

3.3 基坑开挖变形预测

基于参数的更新结果对后续阶段开挖响应进行预测,图 5 展示了不同阶段基坑开挖响应预测值与观测值的对比.其中预测值的均值和标准差是将不确定性参数的后验 MCMC 采样结果和确定性参数代入模型进行计算后统计得到的.可以发现,在基坑开挖前使用先验分布计算得到的开挖响应与观测值差距较大,数据点距 1:1 线距离较远,且预测值存在较大的不确定性.随着更新次数的增加,预测值与观测值的差距越来越小,距离 1:1 线越来越近,预测值自身的不确定性也越来越小.由此可见,所提贝叶斯更新方法能够降低黄土基坑工程场景下 KJHH 模型参数的不确定性,并且能够大幅提高

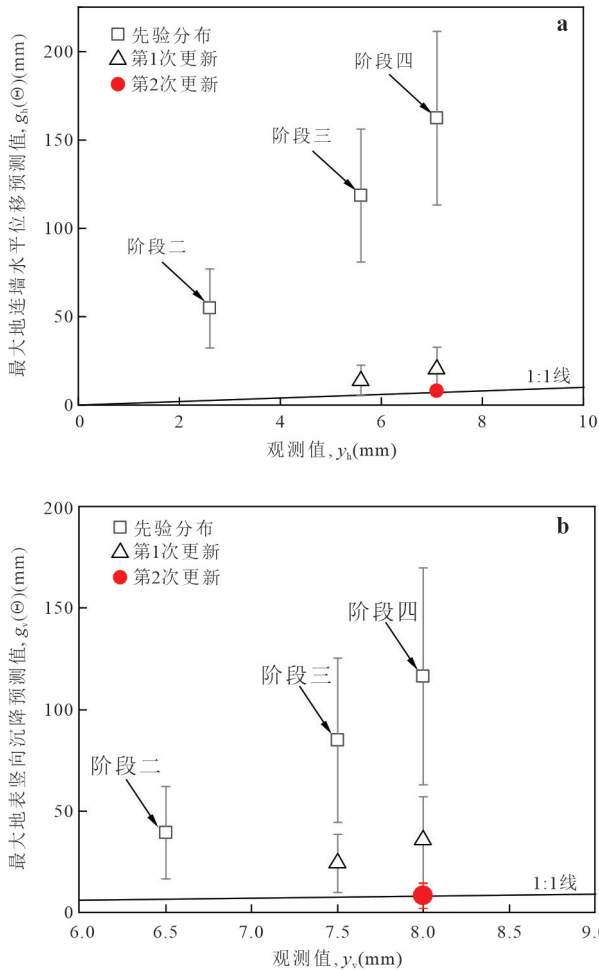


图 5 不同阶段最大墙体变形与地表沉降预测值与观测值
 Fig.5 The predictions of the maximum wall deflections and ground settlement versus the observations at various stages
 a. 地连墙最大水平位移; b. 地表竖向最大沉降

模型预测结果的准确性和可靠性.

3.4 波动范围取值对更新结果的影响

波动范围的取值影响着不同阶段相关性的 大小,为了探究不同波动范围取值对基坑开挖 响应预测结果的影响,本节分别计算了波动范围 $\beta=0.1$ m、34 m、100 m 共 3 种情况下的基 坑最终阶段的开挖响应预测结果,如图 6 所示. 其中, $\beta=0.1$ m 意味着不同开挖阶段近似相互独 立; $\beta=100$ m 则表示不同开挖阶段近似完全 相关; $\beta=34$ m 是所有易变形土层厚度之和, 认为开挖响应在此范围内拥有对应的阶段相 关性.

由图 6 可知,随着波动范围的增大,基坑的 开挖响应预测值呈现逐渐减小的趋势.这一现 象可以由相关系数的变化来解释:随着波动范 围的增大,基坑开挖过程中不同阶段的相关 系数逐渐增大,并无限趋近于 1.当相关系数 达到较高值时,基坑在最终阶段的开挖响应 与初期阶段的响应之间存在着极强的相关性. 由于基坑开挖初期的变形往往较小,因此这 种高相关性导致了最终阶段的预测值也偏小. 即初期阶段的小变形通过高相关性影响了后 期的变形预测,使得后期的预测值难以增大 (Wu *et al.*, 2014).反之当相关系数较小时,不 同阶段间的影响作用减弱,每个阶段开挖响 应预测变得更加独立,后期阶段的预测缺少 了初期阶段信息的约束作用,致后期变形预 测值偏大.

因此在针对基坑工程进行贝叶斯更新时, 需要结合工程实际情况,合理考虑不同阶段 间的相关性.既要避免过高的相关性导致最 终阶段预测值偏

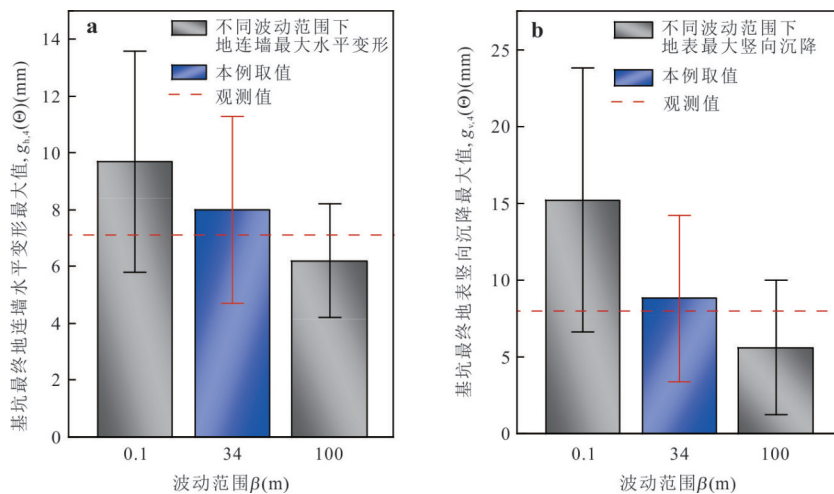


图 6 波动范围对最终阶段开挖响应预测的影响

Fig.6 Influence of the scale of fluctuation on the predicted excavation response at the final excavation stage
 a. 地连墙最大水平位移; b. 地表竖向最大沉降

表 4 案例二不同阶段确定性参数与观测数据

Table 4 Deterministic parameters and field observations at various stages of Example 2

参数	开挖阶段				
	3	4	5	6	7
$H_c(m)$	6.9	10.2	13.2	16.2	18.5
$B(m)$	33.4	33.4	33.4	33.4	33.4
$\ln(EI/\gamma_w h_{avg}^4)$	7.47	7.62	7.28	7.22	7.19
$\sum H_i/H_{wall}$	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87
$\beta(m)$	31	31	31	31	31
$y_h(mm)$	12	25	31	40	47
$y_v(mm)$	25	42	49	59	62

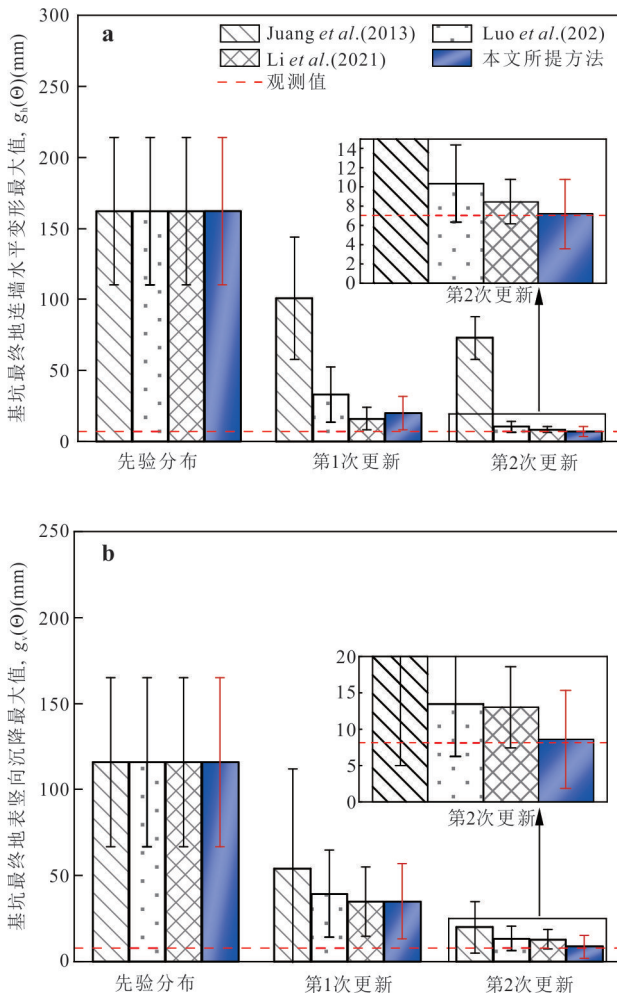


图 7 不同方法预测最终阶段开挖响应结果对比

Fig.7 Comparison of results of different methods for predicting final stage excavation response

a. 地连墙最大水平位移; b. 地表竖向最大沉降

小,也要防止相关性过低造成的预测值过大.通过合理设定不同阶段间相关系数(波动范围)的大小,可以更准确地预测基坑在各阶段的开挖响应,从而提高预测模型的可靠性.

表 5 案例二先验分布

Table 5 Prior distribution in Example 2

参数	分布类型	均值	变异系数
s_u/σ'_v	正态分布	0.25	0.16
E_i/σ'_v	正态分布	500	0.16
α_h	截断正态分布	1	0.25
α_v	截断正态分布	1	0.34
$\sigma_{e,h}$	对数正态分布	1.35	0.20
$\sigma_{e,v}$	对数正态分布	1.35	0.20

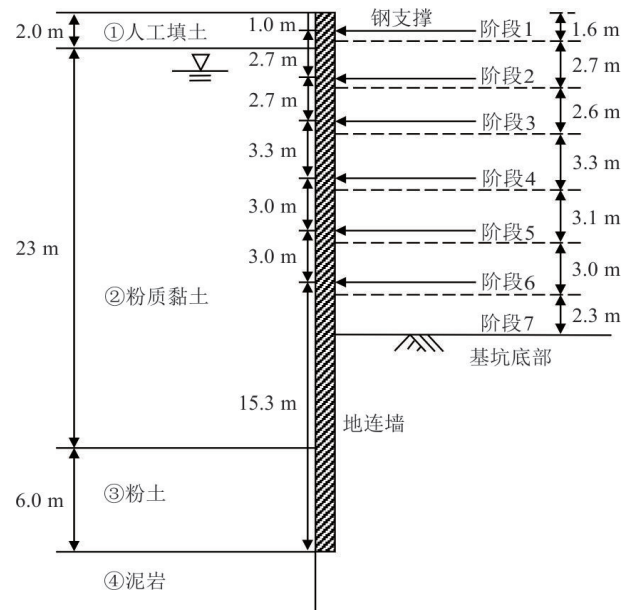


图 8 案例二工程概况与土体剖面示意图

Fig.8 Project overview and soil profile in Example 2

3.5 不同方法结果对比

在本小节,以最终阶段(阶段4)的开挖响应预测为例,开展了本文所提贝叶斯更新方法与前方法预测结果的对比(见图7),包括 Juang et al. (2013)、Luo et al. (2020)和 Li et al. (2021).可以看到随着更新次数的增加,所有方法更新结果的不确

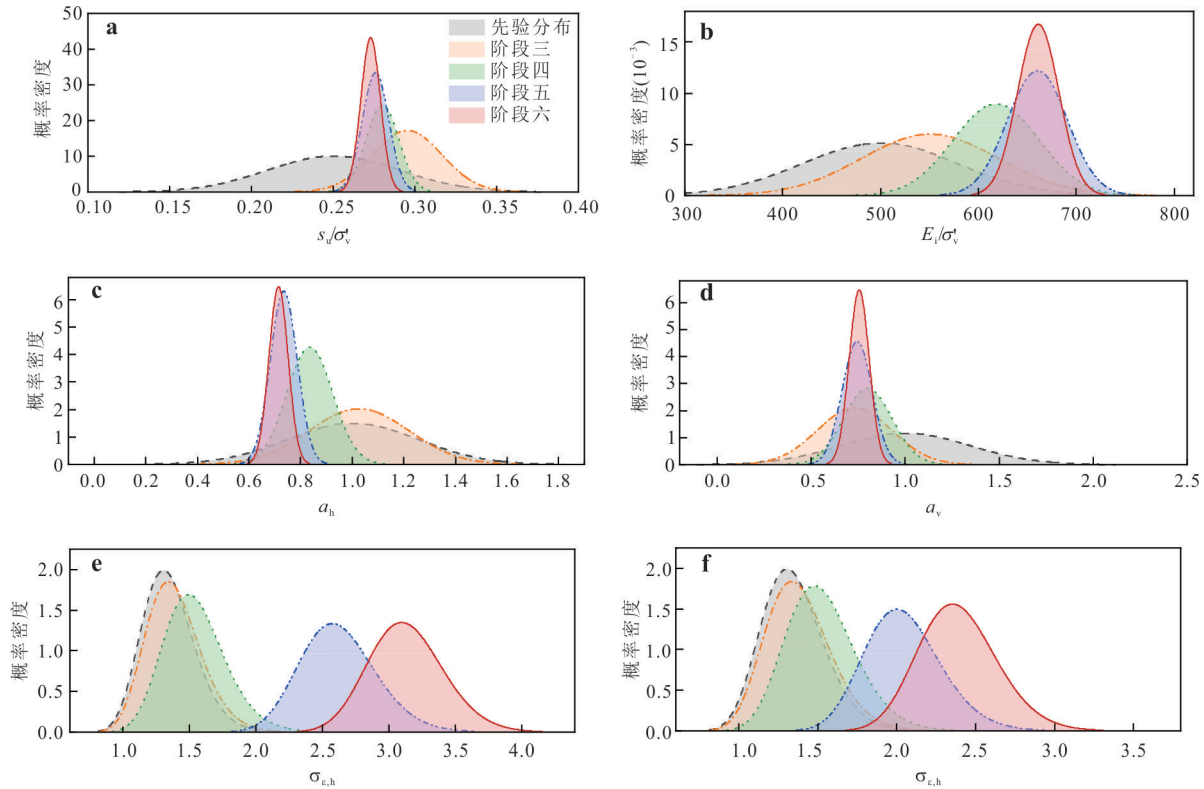


图9 参数的先验和后验分布

Fig.9 Prior and Posterior distribution of parameters

a. 归一化不排水抗剪强度 s_u/s'_v ; b. 归一化初始杨氏模量 E_i/s'_v ; c. 水平变形模型偏差系数 α_h ; d. 竖向沉降模型偏差系数 α_v ; e. 水平变形观测误差标准差 $\sigma_{e,h}$; f. 竖向沉降观测误差标准差 $\sigma_{e,v}$

定性均在逐渐降低,且准确性逐渐提高. 在第2次更新后,除了 Juang *et al.* (2013) 所得结果,观测值均在其余方法预测结果的1倍标准差以内;但相比于其他方法,所提贝叶斯更新方法由于考虑了阶段相关性,预测结果与观测值的差距最小. 但由于本文方法考虑了观测误差,所得结果的标准差有所变大.

4 案例二:软土地区 Formosa 深基坑

4.1 工程概况

台北市位于我国沿海地区,其地质环境主要包括冲积层、湖泊和海洋沉积物,且软土层较为深厚. 本节以台北 Formosa 深基坑为例,验证所提贝叶斯更新方法对于软土地区基坑开挖响应预测的有效性. 该基坑采用地连墙与内支撑联合支护的结构设计,总共分为7个开挖阶段,基坑宽度(B)为33.4 m,地连墙长度(H_{wall})为31 m,该基坑工程详细的施工观测数据可参考 Kung *et al.* (2007) 的记录,工程概况与土层剖面如图8所示.

由于前两个开挖阶段开挖深度较小,且变形模

式与后续阶段不同,采用这两个阶段观测值进行更新的结果较差,因此本例从第3阶段开始进行反分析. 由土层剖面可知,本例中归一化土层厚度($\sum H_i/H_{wall}$)为0.87,波动范围(β)则取人工填土、粉质黏土与粉土土层厚度之和,本例中为31 m. 第3~7阶段的KJHH模型确定性参数与观测数据如表4所示.

本例土体参数($s_u/s'_v, E_i/s'_v$)的先验分布参考 Hsiao *et al.* (2008) 针对台北软土的研究结果而确定. 且根据 Kung *et al.* (2007) 和 Wu *et al.* (2014) 的统计结果可知,模型偏差系数(α_h, α_v)服从均值为1、上限为2、下限为0的截断正态分布,观测误差标准差($\sigma_{e,h}, \sigma_{e,v}$)则服从均值为1.35的对数正态分布. 案例二中待更新参数先验分布如表5所示.

4.2 参数贝叶斯更新与变形预测结果

结合先验分布、观测数据和似然函数,得到相关参数的后验分布,并通过MCMC方法对后验进行采样以得到后验分布的样本. 将不同参数在不同阶段的后验样本绘制为概率密度曲线,并与先验分布的概率密度曲线对比. 图9展示了采用不同开挖阶段数据更新土体参数、模型偏差系数与观测误差

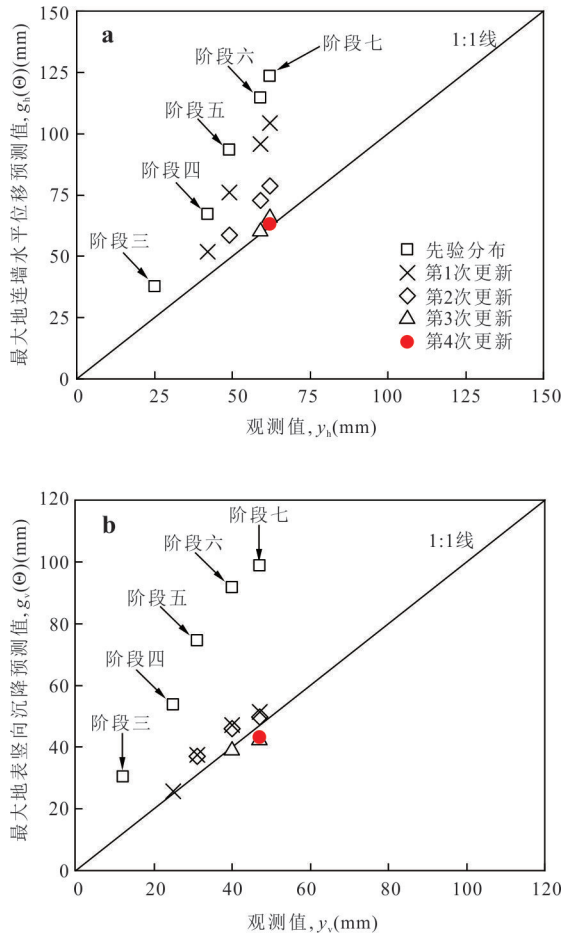


图 10 不同阶段最大墙体变形与地表沉降预测值与观测值
Fig.10 The predictions of the maximum wall deflections and ground settlement versus the observations at various stages
a. 地连墙最大水平位移; b. 地表最大竖向沉降

标准差的先验和后验分布. 随着更新次数的增加, 土体参数和模型偏差系数的不确定性逐渐降低. 而受开挖过程中观测误差累积效应的影响, 观测误差标准差后验分布的均值逐渐增大.

图 10 展示了不同阶段基坑开挖响应预测值与观测值的对比, 可以看到随着更新次数的增加, 基坑开挖响应预测值逐渐收敛至观测值附近. 可见所提贝叶斯更新方法能够降低模型参数的不确定性, 并提高对于软土基坑开挖响应预测的可靠性.

图 11 以最终阶段(阶段 7)开挖响应预测值为例, 展示了本文所提贝叶斯更新方法与前人方法预测结果的对比. 由图可知本文所提方法的预测结果与观测值最为接近, 且预测值的标准差也较小.

5 结论

本文基于 KJHH 预测模型, 提出了一种能够考

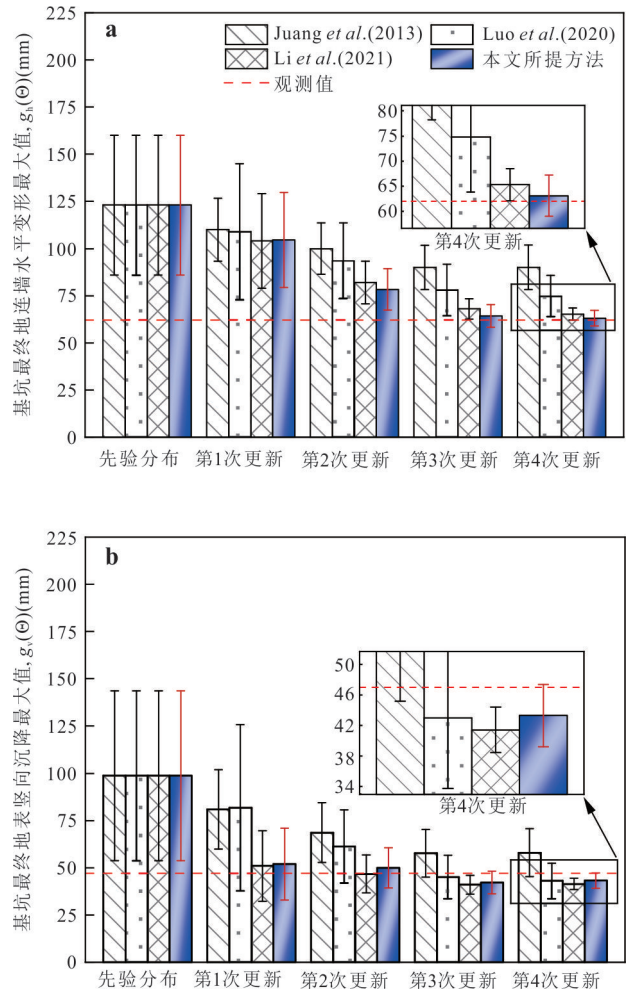


图 11 不同方法预测最终阶段开挖响应结果对比
Fig.11 Comparison of results of different methods for predicting final stage excavation response
a. 地连墙最大水平位移; b. 地表最大竖向沉降

虑土体参数、模型偏差、观测误差不确定性以及阶段间相关性的基坑开挖贝叶斯更新方法, 主要结论如下:

(1) 通过两个实际基坑开挖案例证明了所提贝叶斯更新方法的有效性. 结果表明, 所提方能够有效减少参数的变异性, 并改善模型在不同土体类型基坑中的预测性能.

(2) 考虑阶段相关性后的预测结果比未考虑相关性的结果准确性更好、变异性更小. 此外当相关系数中的波动范围取值过大或过小时, 均会对预测结果有不利影响, 因此在实际工程应用中应结合实际情况, 合理考虑相关系数与波动范围的取值.

(3) 随着更新次数的增加, 所提方法更新结果的不确定性均逐渐减小, 准确性逐渐提高. 并且与前人方法相比, 本文所提方法在预测结果的准确

性和不确定性上综合表现更好。

References

- Ang, A. H. S., Tang, W. H., 2007. Probability Concepts in Engineering Planning and Design: Emphasis on Application to Civil and Environmental Engineering. Wiley, Hoboken, USA.
- Fan, X. Z., Phoon, K. K., Xu, C. J., et al., 2021. Closed-Form Solution for Excavation-Induced Ground Settlement Profile in Clay. *Computers and Geotechnics*, 137: 104266. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2021.104266>
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., et al., 2013. Bayesian Data Analysis. CRC Press, Florida, USA.
- Gelman, A., Donald, B. R., 1992. Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Science*, 7(4): 457–72.
- Gong, W. P., Tien, Y. M., Juang, C. H., et al., 2017. Optimization of Site Investigation Program for Improved Statistical Characterization of Geotechnical Property Based on Random Field Theory. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 76(3): 1021–1035. <https://doi.org/10.1007/s10064-016-0869-3>
- Hsiao, E. C., Schuster, M., Juang, C. H., et al., 2008. Reliability Analysis and Updating of Excavation-Induced Ground Settlement for Building Serviceability Assessment. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 134(10): 1448–1458. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0241\(2008\)134:10\(1448\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0241(2008)134:10(1448))
- Hu, Z. P., Peng, J. B., Zhang, F., et al., 2019. A Brief Discussion on Key Scientific Issues and Innovative Ideas in Urban Underground Space Development. *Earth Science Frontiers*, 26(3):76–84 (in Chinese with English abstract)
- Jiang, S. H., Li, D. Q., Zhou, C. B., et al., 2014. Slope Reliability Analysis Considering the Influence of Autocorrelation Function. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 36(3):508–518 (in Chinese with English abstract)
- Juang, C. H., Luo, Z., Atamturktur, S., et al., 2013. Bayesian Updating of Soil Parameters for Braced Excavations Using Field Observations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 139(3): 395–406. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)gt.1943-5606.0000782](https://doi.org/10.1061/(asce)gt.1943-5606.0000782)
- Kawa, M., Pula, W., Truty, A., 2021. Probabilistic Analysis of the Diaphragm Wall Using the Hardening Soil-Small (HSs) Model. *Engineering Structures*, 232: 111869. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.111869>
- Kung, G. T., Juang, C. H., Hsiao, E. C., et al., 2007. Simplified Model for Wall Deflection and Ground-Surface Settlement Caused by Braced Excavation in Clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(6): 731–747. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0241\(2007\)133:6\(731\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0241(2007)133:6(731))
- Lan, H. X., Peng, J. B., Zhu, Y. B., et al., 2022. Research and Prospect on Geological Surface Processes and Major Disaster Effects in the Yellow River Basin. *Science China: Earth Sciences*, 52(2): 199–221 (in Chinese with English abstract)
- Li, P. P., Li, D. Q., Xiao, T., et al., 2018. Bayesian Updating of Foundation Pit Excavation Considering Empirical Model Uncertainty. *Journal of Natural Disasters*, 27(4): 143–150 (in Chinese with English abstract).
- Li, X. Y., Zhang, L. M., Jiang, S. H., 2016. Updating Performance of High Rock Slopes by Combining Incremental Time-Series Monitoring Data and Three-Dimensional Numerical Analysis. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 83: 252–261. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.09.011>
- Li, Z. B., Gong, W. P., Li, T. Z., et al., 2021. Probabilistic back Analysis for Improved Reliability of Geotechnical Predictions Considering Parameters Uncertainty, Model Bias, and Observation Error. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 115: 104051. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2021.104051>
- Li, Z. B., Gong, W. P., Zhang, L., et al., 2022. Multi-Objective Probabilistic back Analysis for Selecting the Optimal Updating Strategy Based on Multi-Source Observations. *Computers and Geotechnics*, 151: 104959. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2022.104959>
- Liu, J. H., 2010. Field Monitoring and FLAC Simulation Study on Deformation Law of Deep Foundation Pit of Xi'an Metro Station (Dissertation). Xi'an University of Science and Technology, Xi'an (in Chinese with English abstract).
- Lo, M. K., Leung, Y. F., 2019. Bayesian Updating of Subsurface Spatial Variability for Improved Prediction of Braced Excavation Response. *Canadian Geotechnical Journal*, 56(8): 1169–1183. <https://doi.org/10.1139/cgj-2018-0409>
- Luo, Z., Hu, B., 2020. Bayesian Model and Parameter Calibration for Braced Excavations in Soft Clays. *Marine Georesources & Geotechnology*, 38(10): 1235–1244. <https://doi.org/10.1080/1064119x.2019.1673855>
- Luo, Z., Hu, B., Wang, Y. W., et al., 2018. Effect of Spatial Variability of Soft Clays on Geotechnical Design of Braced Excavations: a Case Study of Formosa Excavation. *Computers and Geotechnics*, 103: 242–253. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.07.020>

- Miao, C., Cao, Z. J., Xiao, T., et al., 2023. BayLUP: a Bayesian Framework for Conditional Random Field Simulation of the Liquefaction-Induced Settlement Considering Statistical Uncertainty and Model Error. *Gondwana Research*, 123: 140–163. <https://doi.org/10.1016/j.gr.2022.10.020>
- Qi, X. H., Zhou, W. H., 2017. An Efficient Probabilistic Back-Analysis Method for Braced Excavations Using Wall Deflection Data at Multiple Points. *Computers and Geotechnics*, 85:186–198. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.12.032>
- Salvatier, J., Wiecki, T. V., Fonnesbeck, C., 2016. Probabilistic Programming in Python Using PyMC3. *PeerJ Computer Science*, 2: e55. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.55>
- Shao, S. J., Li, Y. X., Zhou, F. F., 2004. Structural Damage Evolution Characteristics of Collapsible Loess. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, (24):4161–4165 (in Chinese with English abstract).
- Wang, L., Luo, Z., Xiao, J. H., et al., 2014. Probabilistic Inverse Analysis of Excavation-Induced Wall and Ground Responses for Assessing Damage Potential of Adjacent Buildings. *Geotechnical and Geological Engineering*, 32(2): 273–285. <https://doi.org/10.1007/s10706-013-9709-4>
- Weng, X. L., Hou, L. L., Cheng, Z. J., et al., 2024. Undrained Shear Strength Model of K₀ Consolidated Soft Loess. *Journal of Liaoning Technical University (Natural Science Edition)*, 43(1): 30–37 (in Chinese with English abstract).
- Wu, S. H., Ching, J., Ou, C. Y., 2014. Probabilistic Observational Method for Estimating Wall Displacements in Excavations. *Canadian Geotechnical Journal*, 51(10): 1111–1122. <https://doi.org/10.1139/cgj-2013-0116>
- Xia, T., Cheng, C., Pang, Q. Z., 2023. Safety Risk Early Warning of Deep Foundation Pit Deformation Based on Long Short-Term Memory Network. *Earth Science*, 48(10): 3925–3931 (in Chinese with English abstract)
- Yang, L. S., 2011. Study on Displacement Control and Engineering Countermeasures of Ultra-Deep Foundation Pit in Loess Area Based on Field Monitoring Feedback Analysis (Dissertation). Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an (in Chinese with English abstract).
- Zhang, J., Zhang, L. M., Tang, W. H., 2009. Bayesian Framework for Characterizing Geotechnical Model Uncertainty. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(7): 932–940. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)gt.1943-5606.0000018](https://doi.org/10.1061/(asce)gt.1943-5606.0000018)

中文参考文献

- 蒋水华,李典庆,周创兵,等,2014.考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析.岩土工程学报,36(3):508–518.
- 胡志平,彭建兵,张飞,等,2019.浅谈城市地下空间开发中的关键科学问题与创新思路.地学前缘,26(3):76–84.
- 兰恒星,彭建兵,祝艳波,等,2022.黄河流域地质地表过程与重大灾害效应研究与展望.中国科学:地球科学,52(2):199–221.
- 刘均红,2010.西安地铁车站深基坑变形规律现场监测与FLAC模拟研究(硕士学位论文).西安:西安科技大学
- 李培平,李典庆,肖特,等,2018.考虑经验模型不确定性的基坑开挖贝叶斯更新.自然灾害学报,27(4):143–150.
- 邵生俊,李彦兴,周飞飞,2004.湿陷性黄土结构损伤演化特性.岩石力学与工程学报,(24):4161–4165.
- 翁效林,侯乐乐,成志杰,等,2024.K₀固结软黄土的不排水抗剪强度模型.辽宁工程技术大学学报(自然科学版),43(1):30–37.
- 夏天,成诚,庞奇志,2023.基于长短时记忆网络的深基坑变形安全风险预警.地球科学,48(10):3925–3931.
- 杨罗沙,2011.基于现场监测反馈分析的黄土地区超深基坑位移控制及工程应对措施研究(硕士学位论文).西安:西安建筑科技大学