

引用格式: 蔚栋敏, 陈柄任, 陈慧, 等. 基于硬约束热启动的量子投资组合优化算法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(1): 116-124.

YU D M, CHEN B R, CHEN H, et al. A quantum portfolio optimization algorithm based on hard constraint and warm starting[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(1): 116-124.

基于硬约束热启动的量子投资组合优化算法



蔚栋敏^{1*}, 陈柄任¹, 陈慧¹, 吴磊¹, 李晓瑜^{2,3}

(1. 建信金融科技有限责任公司, 上海 200120; 2. 四川元匠科技有限公司, 成都 611730; 3. 电子科技大学 信息与软件工程学院, 成都 610054)

摘要: 针对金融领域的投资组合优化问题中普遍存在的整数约束难题, 提出了一种基于量子近似优化算法的新解法。该算法通过将经典算法得到的连续解编码为量子电路的初始态, 从而将连续优化问题转化为离散的马科维茨模型。同时, 引入硬约束来严格满足投资组合中的整数约束, 确保解的质量。通过热启动技术, 进一步提升了算法的成功率。数值模拟实验表明, 该算法在求解大规模整数约束投资组合问题时, 相较于传统方法具有显著的计算效率优势, 且所得解的质量更优。

关键词: 量子计算; 硬约束; 热启动; 投资组合优化; 量子近似优化算法

中图分类号: O413.1

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2024162

A quantum portfolio optimization algorithm based on hard constraint and warm starting

YU Dongmin^{1*}, CHEN Bingren¹, CHEN Hui¹, WU Lei¹, and LI Xiaoyu^{2,3}

(1. CCB Fintech Co., Ltd., Shanghai 200120, China; 2. Sichuan Yuanjiang Technology Co., Ltd., Chengdu 611730, China;

3. School of Information and Software Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: This paper presents a novel quantum approximate optimization algorithm to address the pervasive integer constraint problem in portfolio optimization within the financial domain. By encoding the continuous solution obtained from classical algorithms into the initial state of a quantum circuit, the algorithm transforms the continuous optimization problem into a discrete Markowitz model. Additionally, hard constraints are introduced to strictly enforce the integer constraints in the portfolio, guaranteeing solution quality. The success rate of the algorithm is further improved by using a warm starting technique. Numerical experiments demonstrate that this algorithm offers significant computational efficiency advantages and a higher solution quality compared to traditional methods when solving large-scale integer-constrained portfolio optimization problems.

Key words: quantum computing; hard constraint; warm starting; portfolio optimization; quantum approximate optimization algorithm

近年来量子计算技术得到了快速的发展。中国科学技术大学成功实现了 51 个超导量子比特的簇态制备和验证, 刷新了所有量子系统中真纠缠比特数目的世界纪录, 并演示了基于测量的变分量子算法^[1]; 此外, 在“九章二号”的基础上, 又进一步构建了 255 个光子的量子计算原型机“九章三号”^[2]。2023 年 12 月, IBM 推出了首台千量子比特处理器 Condor, 含有 1 121 个量子比特。同时还发布了

133 量子比特可扩展芯片 Heron。2023 年 5 月, Quantinuum 宣布推出量子计算系统——System Model H2, 该系统拥有 32 个量子比特, 且具备全连接功能, 量子体积达到 65 536 (2^{16}), 单量子比特门保真度 99.997%, 双量子比特门保真度 99.800%^[3]。2023 年 6 月, Quantinuum 再次刷新了量子计算机的性能, 最新的系统模型 H1-1 的量子体积已经飙升至 524 288 (2^{19})。这些研究成果都

收稿日期: 2024-07-01

基金项目: 建信金融科技有限责任公司研究性课题 (PO3522083675, PO3523070947, PO3522083587); 成都市重点研发支撑计划重大科技应用示范项目 (2021-YF09-00114-GX)

作者简介: 蔚栋敏, 博士, 研究员, 主要从事量子计算机、量子金融方面的研究。

*通信作者 E-mail: yudongmin.zb@ccbft.com

标志着量子计算机的硬件规模在进一步扩大, 所能处理的问题难度和提供的算力都在进一步提升。

与此同时, 国内外金融科技的从业者也注意到, 量子算法在处理投资组合优化、风险价值估计和金融衍生品定价等领域展示出潜在的计算优势。因此, 量子金融这一概念应运而生, 其主要是指量子信息技术在金融领域中的相关应用^[4]。

在投资组合优化领域, 目前主要集中在如何高效地求解含有众多约束的马科维兹模型, 也称均值-方差模型^[5-6]。使用经典的拉格朗日乘子法求解均值-方差模型所得到的最优解可能不满足现实场景中的整数约束, 直接近似取整得到的结果往往并非整数约束下的最优解。而经典计算机直接求解整数约束下的均值-方差模型已被证明是 NP 难的。而现有的热启动量子近似优化算法求解投资组合优化问题过程中使用的是软约束混合算子, 算法的搜索空间充满大量非可行解, 效率有待提升。

本文提出了硬约束热启动的量子近似优化算法, 并将该方法应用于投资组合优化问题, 求得整数约束下均值-方差模型的最优解(即最优投资组合)。该算法融合了热启动量子近似优化算法和硬约束混合算子各自的优势, 不仅充分利用了经典计算机上凸优化求得的实数域上最优解的信息, 还将量子算法限制在可行域内, 提升了量子算法的求解效率和精确性。

1 马科维茨均值方差模型及其变体

投资组合优化是指应用概率论与数理统计、最优化方法以及线性代数等相关数学理论方法, 来选择一个风险和收益平衡的投资组合。简单来说, 它是一种在给定的风险水平下, 寻找能够带来最大预期收益的资产组合的过程。

马科维兹模型^[5]是由资产收益的波动性(方差)来衡量投资组合的风险, 通过优化资产组合的权重分配, 达到预期收益的同时最小化风险。马科维兹模型的核心思想是不同资产之间的价格波动可能不同步, 因此通过合理配置可以降低整个投资组合的风险。

数学上, 马科维兹模型可以表示为以下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \eta \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - (1 - \eta) \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 是决策者在各资产投资的份额向量, 其维数等于资产数 n , \mathbf{x} 的某个元素 $x_i > 0$ 代表决策

者对资产 i 持有多头份额 x_i , $x_i < 0$ 代表决策者对资产 i 持有空头份额 x_i , $x_i = 0$ 代表决策者不持仓资产 i ; $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是各资产收益率的协方差矩阵; $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 是各资产的期望收益回报率向量; $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^n$ 是 n 维的每个元素均为 1 的向量; $\eta \in [0, 1]$ 是度量投资决策者风险偏好的系数, η 越小, 表明决策者越愿意承担更高的风险以获得更高的期望收益。

对上述模型施加整数约束, 在不考虑手续费的情况下, 得到整数约束下的投资组合模型表示为:

$$\begin{aligned} \min \lambda \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - (1 - \lambda) \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{1}^T \mathbf{x} = D \\ x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\lambda \in [0, 1]$ 同样是度量投资决策者风险偏好的系数; $D \in \mathbf{Z}$ 是净投资额约束。其余变量含义与原均值-方差模型中的含义相同, 且 x_i 的取值为 $\{-1, 0, 1\}$ 。

具体而言, 整数约束下的投资组合模型将考虑投资者已有的资产组合, 模型将详细分析投资者当前的资产分布, 包括各种投资工具的比例和价值。这将有助于投资者了解他们的资产状况, 以便做出更明智的投资决策。

整数约束下的投资组合模型是一个全面、细致的投资决策工具。它能够帮助投资者在复杂的市场环境中做出最优的投资决策, 以最大化他们的收益。对求解马科维兹模型的现有算法进行分类划分, 如表 1 所示。

表 1 求解马科维兹模型的算法概览

算法	方法	
经典算法	离散	临界线算法
		二次规划
	连续	拉格朗日乘子法
量子算法	离散	混合灰色关联度法
		遗传算法
		量子变分算法
	连续	量子近似优化算法
		量子退火
		光子量子干涉伊辛机
		HHL 算法
		量子内点法

离散马科维兹模型的传统求解算法主要包括临界线算法^[7]和二次规划算法^[8]。临界线算法是一种基于有效边界理论的求解马科维兹模型的算法, 其基本思想是通过计算有效边界上的点来求解最优投资组合, 其计算复杂度取决于待选资产的数量。对

于 n 个资产, 临界线算法的计算复杂度为 $O(n^3)$ 。

二次规划算法是一种求解二次规划问题的通用方法。马科维茨模型可以转化为一个二次规划问题, 并利用数学规划中的优化技术来求解模型, 可通过各种数值优化软件实现。二次规划方法的计算复杂度取决于二次规划问题的规模。对于 n 个资产和 m 个约束条件, 二次规划方法的计算复杂度为 $O(n^3m)$ 。

求解连续马科维茨均值方差模型的经典算法主要有以下 3 种: 拉格朗日乘子法^[9]、混合灰色关联度法^[10] 和遗传算法^[11]。拉格朗日乘子法是求解约束优化问题的经典方法, 其基本思想是将约束条件转化为等式约束, 并引入拉格朗日乘子来构造拉格朗日函数, 然后, 通过求解拉格朗日函数的一阶导数条件得到最优解, 其计算复杂度取决于目标函数和约束条件的复杂度。对于连续马科维茨均值方差模型, 目标函数是一个二次函数, 约束条件是一个线性约束和若干个线性不等式约束。因此, 拉格朗日乘子法的计算复杂度为 $O(n^3)$ 。

混合灰色关联度法是一种多因素统计分析方法, 用于分析系统中某个指标受其他因素影响的相对强弱。它通过比较不同因素的变化趋势来确定它们之间的关联度。此方法在数据预处理和关联度计算上较为简单, 但具体复杂度会根据数据的规模和处理过程的详细程度而变化。

遗传算法是一种模拟生物进化的算法, 具有较强的全局搜索能力, 能够有效地求解复杂优化问题。其计算复杂度取决于种群规模、染色体长度、交叉概率、变异概率以及迭代次数。对于连续马科维茨均值方差模型, 种群规模和染色体长度与待选资产的数量成正比, 交叉概率和变异概率是常数, 迭代次数与求解精度要求有关。

上述 3 种算法都是求解连续马科维茨均值方差模型的经典算法。其中拉格朗日乘子法的计算复杂度较低, 但容易陷入局部最优解。混合灰色关联度法具有较强的全局搜索能力, 但计算复杂度较高。遗传算法具有较强的全局搜索能力和鲁棒性, 但参数设置对算法的性能影响较大。

近年来, 随着量子计算技术的快速发展, 人们开始探索利用量子计算来求解马科维茨模型。量子计算具有并行计算能力和量子纠缠等特性, 有望在求解复杂优化问题方面取得突破性进展。目前, 求解马科维茨模型的量子算法同样分为求解离散模型和连续模型两类。

求解离散模型的量子算法分为变分量子算法和量子模拟算法两类。变分量子算法主要包括量子变分算法 (variational quantum algorithms, VQA)^[12] 和量子近似优化算法 (quantum approximation optimization algorithm, QAOA)^[13-15]。VQA 是一种结合经典和量子计算优势的方法, 适用于带噪声的中型量子设备。它通过优化参数化量子电路来近似解决量子系统问题, 涉及定义损失函数、选择 ansatz、使用经典优化器调整参数、在量子计算机上运行电路, 并迭代优化直至满足终止条件。此算法特别适用于估计哈密顿量的基态能量, 是量子计算中的一个重要工具。QAOA 是一种旨在解决组合优化问题的量子优化算法, 它是变分量子算法中最常见的算法之一, 是一种特殊的量子算法, 因为它结合了经典和量子计算的优点, 以期在多项式时间内找到问题的一个“足够好”的近似解。QAOA 的工作原理是基于量子态的叠加和纠缠, 以及量子测量。算法分为构建量子态和优化参数两个主要步骤。同时, 算法的复杂度取决于问题的规模以及所需的精度。其关键特点是性能随着量子电路深度的增加而提高, 这意味着通过增加参数化门的层数, 可以获得更好的近似解。

基于量子模拟的算法主要包括量子退火 (quantum annealing, QA)^[16-18] 和光量子相干伊辛机 (coherent ising machine, CIM)^[19-21]。量子退火算法是一种利用量子隧穿效应的优化算法, 专门用于解决组合优化问题。它通过量子比特的叠加态和量子隧穿来避免局部最小值, 从而寻找全局最优解。该算法涉及构建问题哈密顿量、初始化量子系统、执行退火过程、利用量子隧穿, 最终寻找问题的全局最小值。量子退火在处理复杂优化问题方面展现出潜力, 尤其是在传统算法难以解决的情况下。

光量子相干伊辛机是一种基于光量子系统的量子计算机, 利用光子的量子特性来模拟伊辛模型并解决优化问题。它通过精确控制光子的相位和干涉来实现量子比特之间的相互作用, 从而执行量子计算。该量子计算机在解决复杂优化问题和模拟量子系统行为方面展现出潜力, 特别是在传统计算方法难以处理的情况下。光量子相干伊辛机的研究和应用, 为解决复杂优化问题和模拟量子系统行为提供了一种新的途径。随着量子计算技术的不断进步, 光量子相干伊辛机有望在未来的量子计算领域发挥重要作用。

求解连续马科维茨模型的量子算法主要包含

HHL 算法^[22]和量子内点法^[23-24]等。HHL 算法是一种用于高效解决线性方程组的量子算法。它通过将方程组的向量编码到量子态, 利用量子相位估计来估计矩阵的本征值, 然后通过控制旋转和逆量子相位估计来找到解的量子态。HHL 算法在某些条件下能够比经典算法更快地求解线性方程组, 尤其适用于稀疏矩阵和大规模问题, 对量子机器学习、数据分析和投资组合优化等领域具有重要的应用潜力。

量子内点法是一种结合量子计算和内点优化技术的算法, 用于解决带约束的优化问题。它通过量子计算的并行性和量子隧穿效应来加速求解过程, 特别适用于大规模和复杂问题。此方法将优化问题转化为量子计算机可处理的形式, 利用量子算法进行迭代求解, 以逼近最优解。量子内点法在理论上具有潜在的加速能力, 尽管实际应用仍面临诸多挑战, 但它为解决复杂优化问题提供了新的可能性。

2 整数约束下的 QAOA

2.1 建模

式 (2) 描述的整数约束下的投资组合模型映射为 QAOA 求解的问题时, 首先对原问题进行建模, 以满足 QAOA 算法的要求。对于每种资产的投资份额 x_i , 需要考虑买入 ($x_i = 1$)、卖出 ($x_i = -1$) 和不进行操作 ($x_i = 0$) 3 种情况, 因此, 对于每一个资产, 需要 2 个量子比特才能完成对应的编码, 具体的编码方式如表 2 所示。

表 2 量子比特与投资份额的对应关系

量子比特	x_i 取值
00⟩	0
01⟩	-1
10⟩	1
11⟩	0

对于 n 个资产的投资组合优化来说, 需要 $2n$ 个量子比特才能完成相应的量子编码, 以便在后续量子电路中进行操作。同时, 初态的设置也要兼顾后续量子算法操作的便利性, 因此, 对于 $2n$ 个量子比特, 进行如下的重新编码:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_+ &= (q_{11}, q_{21}, \dots, q_{n1})^T \\ \mathbf{s}_- &= (q_{12}, q_{22}, \dots, q_{n2})^T \end{aligned} \quad (3)$$

式中, \mathbf{s}_+ 和 \mathbf{s}_- 分别表示编码 n 个资产的量子比特中的第 1 个和第 2 个量子比特, 即 \mathbf{s}_+ 表示 $2n$ 个量子比特中的奇数位, \mathbf{s}_- 表示对应的为偶数位量子比特。如 \mathbf{s}_+ 中的 q_{31} 表示第 3 个资产中的第 1 个量子

比特, 并且在所有 $2n$ 个量子比特中处于第 5 位。在将所有资产进行上述编码的基础上, 利用 QAOA 对该投资组合优化问题进行求解。

一般来说, 在 QAOA 算法中, 首先对所有的量子比特作用 H 门来得到初始态 $|\psi_0\rangle$, 之后相继作用相位分离算子 U_C 和混合算子 U_B , 根据问题的规模和已有硬件的计算能力, 需要调整对相位分离算子和混合算子的层数 p , p 表示 QAOA 的电路深度。经过 QAOA 的求解, 得到最终的输出态 $|\psi_p\rangle$, $|\psi_p\rangle$ 对应了每种资产的投资份额 x_i 。通过多次计算, 求得目标函数 $f(x)$ 达到最小值的投资份额 x_i , 即求得整数约束下的投资组合模型下的最佳投资组合。

2.2 相位分离算子 U_C 的构建

相位分离算子是 QAOA 的核心组成部分之一。在 QAOA 中, 相位分离算子用于将问题的解编码到量子态的相位中。在上述整数约束下的投资组合模型中所对应的相位分离算子 $U_C(\gamma_i) = e^{-i\gamma_i C}$, 其中 γ_i 为待优化的参数, 范围为 $\gamma_i \in [0, 2\pi)$ 。对于满足整数约束下的任意投资组合 \mathbf{x}_n 和其所对应的量子态 $|\psi_n\rangle$ 有:

$$f(\mathbf{x}_n) = \langle \psi_n | C | \psi_n \rangle \quad (4)$$

式中, C 为与待求目标函数 $f(x)$ 相关的哈密顿量。

根据经验, 对于哈密顿量 C 的构建首先考虑泡利矩阵 σ_z 和单位矩阵 I :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

假设对于任意 C_i 有:

$$C_i = \sigma_z^{i1} - \sigma_z^{i2} \quad (6)$$

其中 σ_z^{ij} 可以表示为:

$$\sigma_z^{ij} = I^{\otimes(2i-3+j)} \otimes \sigma_z \otimes I^{\otimes(2n-2i+2-j)} \quad (7)$$

那么对于任意的投资组合 \mathbf{x}_n 中第 i 个元素 x_{ni} 有:

$$x_{ni} = \langle \psi_n | C_i | \psi_n \rangle \quad (8)$$

因此, 对目标函数 $f(x)$ 整理后有:

$$\tilde{\mu} = ((1-\lambda)\mu_1, (1-\lambda)\mu_2, \dots, (1-\lambda)\mu_n)^T \equiv (\tilde{\mu}_i)^T \quad (9)$$

$$\tilde{\Sigma} = \lambda \Sigma \equiv (\tilde{\sigma}_{ij})$$

同时得到哈密顿量 C 为:

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{ij} C_i C_j) - \sum_{i=1}^n \bar{\mu}_i C_i \quad (10)$$

2.3 混合算子 U_B 的构建

在 QAOA 中, 混合算子 U_B 是算法的关键组成部分, 它与相位分离算子 U_C 交替作用于量子态。

混合算子 U_B 的作用是引入量子态的变化, 使得量子系统能够在不同的可能解之间进行转换。具体来说, 与相位分离算子 U_C 类似, 混合算子 $U_B(\beta_i) = e^{-i\beta_i B}$, 同样地, β_i 也为待优化的参数。对于本文研究的整数约束下投资组合模型中, 将采用环状链接 XY-混合算子, 此时参数 β_i 的范围为 $\beta_i \in [0, \pi/2)$ 。

类似地, 哈密顿量 B 的构建将利用泡利矩阵 σ_x 、 σ_y 和单位矩阵 I :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

且有:

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= I^{\otimes(i-2)} \otimes \sigma_x \otimes I^{\otimes(n-i+1)} \\ \sigma_y^i &= I^{\otimes(i-2)} \otimes \sigma_y \otimes I^{\otimes(n-i+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

此时, 哈密顿量 B 的表达式为:

$$B = \sum_{i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}, i_2 = i_1 + 1 \text{ mod } n} \sigma_x^{i_1} \sigma_x^{i_2} + \sigma_y^{i_1} \sigma_y^{i_2} \quad (13)$$

环状链接 XY-混合算子使得最终的输出态 $|\psi_p\rangle$ 能够严格满足式 (2) 的 $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = D$ 限制条件, 这是一种硬约束。硬约束确保所有解都严格遵守问题的规则和限制, 有助于缩小搜索空间, 提升对问题的求解效率。且在满足硬约束的前提下, 找到的解通常具有更高质量。因此, 相较于软约束而言, 硬约束通常能更快地得到求解结果, 且解严格满足限制条件, 得到最优解的概率更高。

2.4 迭代优化参数

QAOA 算法的另一个重点在于如何有效地找到最优参数以最大化线路的演化能力, 同时控制计算成本。优化参数是指相位分离算子 U_C 和混合算子 U_B 中的参数 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)^T$ 及 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ 的最优值 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 和 $\boldsymbol{\beta}^*$, 优化的目标函数为式 (4)。其中, 参数的个数由线路深度 p 决定。通常来说, 线路深度 p 是一个预先给定的值, 它决定了参数量子线路的复杂性和演化能力, p 值越大, 线路越复杂, 演化能力越强, 但相应地, 所需的计算资源也越多。在实际应用中, 通常会选择一个合适的

p 值, 以在性能和成本之间达到平衡。

为了找到最优参数值, 本文采用了迭代更新的方法。具体步骤如下。

1) 初始化参数向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 。在实际操作中, 为了简化计算, 通常会将它们初始化为零向量, 即 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{p \text{ 个}}^T$ 。

2) 将初始化后的参数向量代入参数量子线路中, 对初始态 $|\psi_0\rangle$ 进行演化, 得到终态 $|\psi_p\rangle$ 。该步骤是量子线路的核心部分, 它利用参数化的量子门对初始态进行演化, 生成最终的量子态 $|\psi_p\rangle$ 。

3) 对终态 $|\psi_p\rangle$ 进行多次测量, 以获取足够的统计数据。每次测量结果都会对应一个份额向量 \mathbf{x}_i 以及相应的目标函数值 $f(\mathbf{x}_i)$ 。然后, 利用式 (4) 估计目标函数值的期望值。

4) 根据估计的目标函数期望值, 使用经典算法 (如 COBYLA、梯度下降等) 对参数向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 进行更新, 得到一组新的参数向量 $\boldsymbol{\gamma}'$ 和 $\boldsymbol{\beta}'$ 。

在确定了最优参数值 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 和 $\boldsymbol{\beta}^*$ 后, 参数量子线路将能够演化到一个最优终态 $|\psi_p^*\rangle$ 。终态所对应的 $\langle \psi_p^* | C | \psi_p^* \rangle$ 值是所有可能终态中最小的。值得注意的是, 由于量子态的叠加性和不确定性原理, 终态 $|\psi_p^*\rangle$ 可能不是单态, 这意味着对其进行多次测量可能会得到不同的结果。因此, 每次所对应的资产投资份额 \mathbf{x}^* 也会存在一定的差别。尽管存在这种不确定性, $|\psi_p^*\rangle$ 仍然能够使每次测量结果所对应的份额向量相应目标函数值的期望 $E(f(\mathbf{x}))$ 最小。

2.5 软约束热启动量子近似优化算法

在 QAOA 中, 根据约束条件的不同可以分为软约束和硬约束。软约束可以通过调整目标函数中的权重实现, 这样算法在搜索最优解的过程中可以在一定程度上违反这些约束。软约束的好处是增加了问题的可行解空间, 使得算法有更大的灵活性来探索不同的解决方案。

通常 QAOA 算法的初态都为均匀叠加态 $|\psi_0\rangle = \otimes_{i=1}^n |+\rangle$, 为了求解式 (2) 描述的整数约束下的投资组合模型, 文献 [25] 提出使用软约束热启动的 QAOA 算法来解决。

具体来说, 此方案在原来的目标函数中加入惩罚项, 因而目标函数有:

$$\min \lambda \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} - (1 - \lambda) \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} + A (\mathbf{1}^T \mathbf{x} - D)^2 \quad (14)$$

且 $A > D^2$ 。将约束条件以惩罚项的形式直接加入到目标函数中, 使得所求解有更大概率满足约束条件。

同时, 在此方案中, 提出使用经过放松的连续解作为算法的初态, 此操作也被称为热启动。软约束下的热启动初态为:

$$|\psi_0^*\rangle = \otimes_{i=1}^n R_y(\theta_i)|0\rangle \quad (15)$$

式中, $\theta_i = 2\arcsin(\sqrt{x_i^*})$ 。相对应的混合算子有:

$$B^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i^* \quad (16)$$

$$\sigma_i^* = \begin{pmatrix} 2x_i^* - 1 & -2\sqrt{x_i^*(1-x_i^*)} \\ -2\sqrt{x_i^*(1-x_i^*)} & 1 - 2x_i^* \end{pmatrix}$$

混合算子 B^* 并不能很好地保证最终的计算结果能完全满足约束条件, 因而会有不满足约束条件的最优解出现。因此, 本文提出采用硬约束混合算子来构建量子近似优化算法, 并对初态进行重新设计。

3 硬约束热启动的量子投资组合优化

本节将具体介绍将热启动和硬约束二者结合下的量子投资组合优化算法。经典连续算法利用求导可以快速得到连续的初态解, 此初态解很好地反映了最终离散解的信息, 因此, 在经典求解的基础上再进行量子算法的构造与求解, 将大大提升求解速度。同时, 又由于硬约束条件的限制, 使得量子算法所求解一定会满足限制条件。

3.1 初始态制备

本文提出的硬约束热启动 QAOA 的创新之处就在于初态制备, 在硬约束条件下的热启动初态同时也决定了此算法的优化效果。为了制备满足硬约束的热启动初态, 对式 (2) 所描述的整数约束下的投资组合模型可先利用经典的优化算法进行求解。

在经典算法中, 求解的连续马科维兹模型可以表示为:

$$\begin{aligned} \min \lambda \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - (1-\lambda) \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{1}^T \mathbf{x} = D \\ -1 \leq x_i \leq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (17)$$

对于上式可以利用已有的经典算法进行求解, 得到对应的最优解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。

接下来已经得到的最优解 \mathbf{x} 按照从大到小的顺序进行排序, 得到:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \quad (18)$$

式中, $x_1^* \geq x_2^* \geq \dots \geq x_n^*$ 。对于经过重新排序的 \mathbf{x}^* 并

没有改变对原问题的解。

同时, 规定经过重新排序后的 x_i^* 所对应的量子比特为 q_{ij}^* , $j \in \{1, 2\}$ 。如 x_3 为表示最优解的向量 \mathbf{x} 中最大的元素, 那么就有 $x_1^* = x_3$, 且对应的量子比特 q_{11}^* 表示 q_{31} 即原最优解 \mathbf{x} 中的第 3 个资产的第 1 个量子比特。

对于式 (17), 若限制条件 $D > 0$, 在本算法中, 为了更好地满足限制条件 D , 规定对于 x_i^* 中前 $|D|$ 个资产所对应的量子比特 q_{ij}^* 有:

$$q_{i1}^* = |1\rangle, \quad q_{i2}^* = |0\rangle \quad i = 1, 2, \dots, |D| \quad (19)$$

即对于前 $|D|$ 个资产, 其量子态编码为 $|10\rangle$, 所需单量子比特门 $|D|$ 个。

如果 $D < 0$, 则根据上面的规则, 有:

$$\begin{aligned} q_{i1}^* = |0\rangle, \quad q_{i2}^* = |1\rangle \\ i = n+1-|D|, n+2-|D|, \dots, n \end{aligned} \quad (20)$$

即对于后 $|D|$ 个资产, 其量子态编码为 $|01\rangle$, 所需单量子比特门 $|D|$ 个。

在执行完上述步骤后, 则剩余所有未编码的资产个数为 $m = n - |D|$ 。显而易见, 这 m 个资产的约束和为 0。根据在 \mathbf{x}^* 中, 剩余 m 个尚未分配初始态的资产从大到小进行排列, 得到:

$$\tilde{\mathbf{x}}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_m^*)^T \quad (21)$$

式中, $\tilde{x}_1^* \geq \tilde{x}_2^* \geq \dots \geq \tilde{x}_m^*$, $\mathbf{1}^T \tilde{\mathbf{x}}^* = 0$ 。

若 m 为奇数, 则规定最中间资产所对应的量子比特编码为:

$$q_{\frac{m+1}{2}1}^* \otimes q_{\frac{m+1}{2}2}^* = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

即剩余的 $m-1$ 个资产的约束和仍然为 0。

同时, 当 $D=0$ 时, 则有 $m=n$, 即所有资产的约束和为 0, 若此时 n 为奇数时, 相应的也有式 (22) 的中间资产的量子比特编码。同时, 剩下的 $m-1$ 个资产数为偶数, 对于这些资产的编码将和 m 为偶数的情况合并介绍。

若 m 为偶数时, 将这 m 个资产份额首位两两依次配对有:

$$\tilde{x}_l^* \tilde{x}_{m+1-l}^* = \{\tilde{x}_1^* \tilde{x}_m^*, \tilde{x}_2^* \tilde{x}_{m-1}^*, \dots, \tilde{x}_m^* \tilde{x}_{\frac{m}{2}+1}^*\} \quad l \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \quad (23)$$

并对资产 $\tilde{x}_l^* \tilde{x}_{m+1-l}^*$ 编码为如下包含 4 个量子比特的叠加态:

$$\tilde{q}_{l1}^* \tilde{q}_{l2}^* \tilde{q}_{(m+1-l)1}^* \tilde{q}_{(m+1-l)2}^* = \alpha |1001\rangle + \beta |0110\rangle$$

$$\alpha = \sin \left[\frac{\pi}{8} (\widetilde{x}_l^* - \widetilde{x}_{m+1-l}^* + 2) \right]$$

$$\beta = \cos \left[\frac{\pi}{8} (\widetilde{x}_l^* - \widetilde{x}_{m+1-l}^* + 2) \right] \quad (24)$$

式中, α 和 β 分别表示量子态 $|1001\rangle$ 和 $|0110\rangle$ 的概率幅。由于 $1 \geq \widetilde{x}_1^* \geq \widetilde{x}_2^* \geq \dots \geq \widetilde{x}_m^* \geq -1$, 则有:

$$2 \geq \widetilde{x}_l^* - \widetilde{x}_{m+1-l}^* \geq 0 \text{ 且 } \alpha, \beta \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \quad (25)$$

对于叠加态 $\widetilde{q}_{l1}^* \widetilde{q}_{l2}^* \widetilde{q}_{(m+1-l)1}^* \widetilde{q}_{(m+1-l)2}^*$ 可以采用如图 1 所示的量子线路图进行构造。

其中作用于第一个量子比特 $|0\rangle$ 的 $R_y(\theta)$ 表示进行 R_y 门旋转操作, 矩阵表示为:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (26)$$

其作用效果为:

$$R_y(\theta)|0\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle \quad (27)$$

对比式 (24) 中关于 α 和 β 的定义, 则有:

$$\theta = \frac{\pi}{4} (\widetilde{x}_l^* - \widetilde{x}_{m+1-l}^* + 2) \quad (28)$$

作用于第 2 个和第 3 个量子比特上的为 X 门, 另外再作用 3 个 CNOT 门共同完成叠加态 $\alpha|1001\rangle + \beta|0110\rangle$ 的构造。该初态包含了实数域上放松整数约束解的信息, 并且严格满足限制条件。至此, 通过图 1 的量子线路编码可以得到如式 (24) 所示的叠加态。因此, 每一对资产 $\widetilde{x}_l^* \widetilde{x}_{m+1-l}^*$ 编码需要 3 个单比特量子门, 3 个两比特量子门。

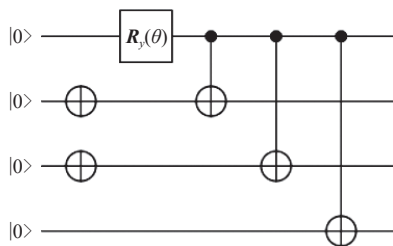


图 1 构造 $\widetilde{q}_{l1}^* \widetilde{q}_{l2}^* \widetilde{q}_{(m+1-l)1}^* \widetilde{q}_{(m+1-l)2}^*$ 的量子线路图

综上所述, 对于任意的资产个数 n , 需要 $2n$ 个量子比特进行初态编码, 量子线路图的深度为 4 层, 所需的单比特量子门的个数为:

$$n_1 = |D| + \frac{n - |D|}{2} \times 3 = \frac{3n - |D|}{2}$$

所需的两比特量子门的个数为:

$$n_2 = \frac{n - |D|}{2} \times 3 = \frac{3}{2}(n - |D|)$$

3.2 性能分析

根据以上介绍的硬约束热启动量子近似优化算法的具体初态制备步骤, 同时与经典枚举法和不考虑热启动的硬约束量子近似优化算法的计算对比, 证明了本文提出的硬约束热启动量子近似优化算法的计算优势。

具体来说, 针对式 (2) 所描述的整数约束下的投资组合模型, 日均收益率和收益率协方差数据源于 A 股 3 847 只股票 (其中已剔除单日涨跌幅过大以及缺失的股票) 的历史日收盘价计算得到。对于不同线路深度 $p=1,2,3$, 均模拟 1 000 次并求其平均值和方差, 结果如图 2 所示。

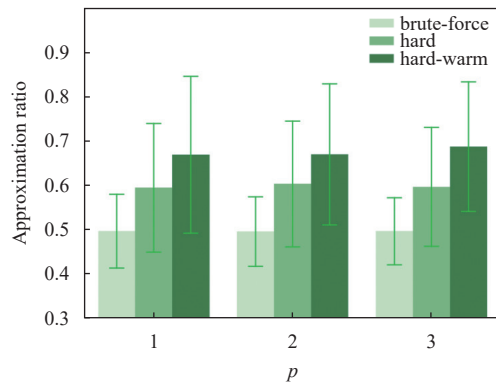


图 2 不同算法下的近似比对比

其中, 每次模拟都是从 3 847 支股票池中随机选取 10 只股票的历史数据进行计算。同时, 评价 3 种算法的计算效果的平均近似比 (approximation ratio, AR) 定义为:

$$AR = \frac{1}{m} \sum_j^m \frac{1_{x_j \in H_D} (\max_x f_m(x) - f_m(x_j))}{\max_x f_m(x) - \min_x f_m(x)} \quad (29)$$

式中, $1_{x_j \in H_D}$ 表示某次所得到的计算结果是否满足约束条件, 满足则取值为 1, 不满足则取值为 0; m 为实验总次数 1 000 次; $\max_x f_m(x)$ 和 $\min_x f_m(x)$ 分别表示理论上求得的最优解的最大值和最小值。因此可以通过近似比的大小来判断算法的计算效果, 近似比越大, 算法的求解效果越好。

由图 2 可以看出, 在不同的线路深度 p 下, 本文描述的硬约束热启动量子近似优化算法 (图中 hard-warm) 的平均近似比较经典枚举法 (图中 brute-force) 和不考虑热启动的硬约束量子近似优化算法 (图中 hard) 均展示出更优的计算效率。同时, 硬约束量子近似优化算法的计算效率也高于经

典枚举法, 也展示出量子算法在解决投资组合优化问题上的潜在优势。

为了对比本文提出的硬约束热启动量子近似优化算法与硬约束量子近似优化算法的求解效果, 仍采用 A 股 3 847 只股票的历史收盘数据, 在不同线路深度 $p=1,2,3$ 下, 均模拟 1 000 次, 所得结果如图 3 所示。

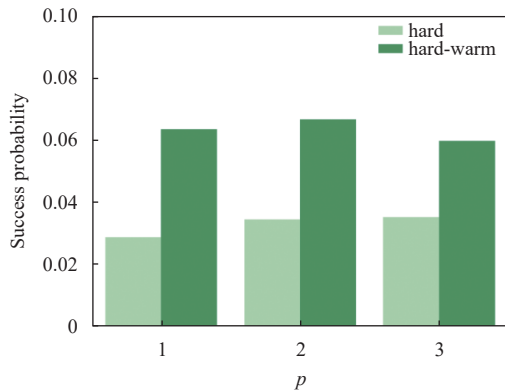


图3 两种量子近似优化算法成功率对比

从图3中可以得出, 对于任意的线路深度 $p(p=1,2,3)$, 硬约束热启动量子近似优化算法的成功率(图中 hard-warm)都远高于硬约束量子近似优化算法(图中 hard)。该计算结果也正体现了热启动的加入能够提升了原本硬约束量子近似优化算法的计算准确率。

同时, 从图3中也注意到, 当线路深度 $p=3$ 时, 硬约束热启动量子近似优化算法的成功率并没有随着线路深度的增加而增加, 反而出现了小幅度的下降。为了探究这一原因, 在仅考虑其中一次求解的过程中, 对比两种量子近似优化算法的收敛速度, 结果如图4所示。

图4中横坐标表示迭代次数, 纵坐标 $\frac{|Cost - Cost_{opt}|}{|Cost_{opt}|}$ 表示量子算法的迭代进度, Cost表示当前迭代次数下得到的解, $Cost_{opt}$ 表示量子算法最终得到的最优解, 因此当 $Cost = Cost_{opt}$ 时, 即纵坐标为0时量子算法达到收敛。

由图4可以得到, 在同一线路深度下, 硬约束热启动量子近似优化算法(图中 hard-warm)和硬约束量子近似优化算法(图中 hard)的收敛速度大致相当。对比 $p=1$ 和 $p=2$ 两种情况, 随着线路深度 p 的增加, 两种量子算法得到最优解的迭代次数呈上升趋势。然而, 当 $p=3$ 时, 两种量子算法都不能很好地收敛, 即对应的 $\frac{|Cost - Cost_{opt}|}{|Cost_{opt}|}$ 值一直不能

为0。这是由于随着线路深度的增加, 所需优化迭代的参数个数也随之增加, 从而增加了优化的难度。此结果也解释了图3中成功率下降的原因。

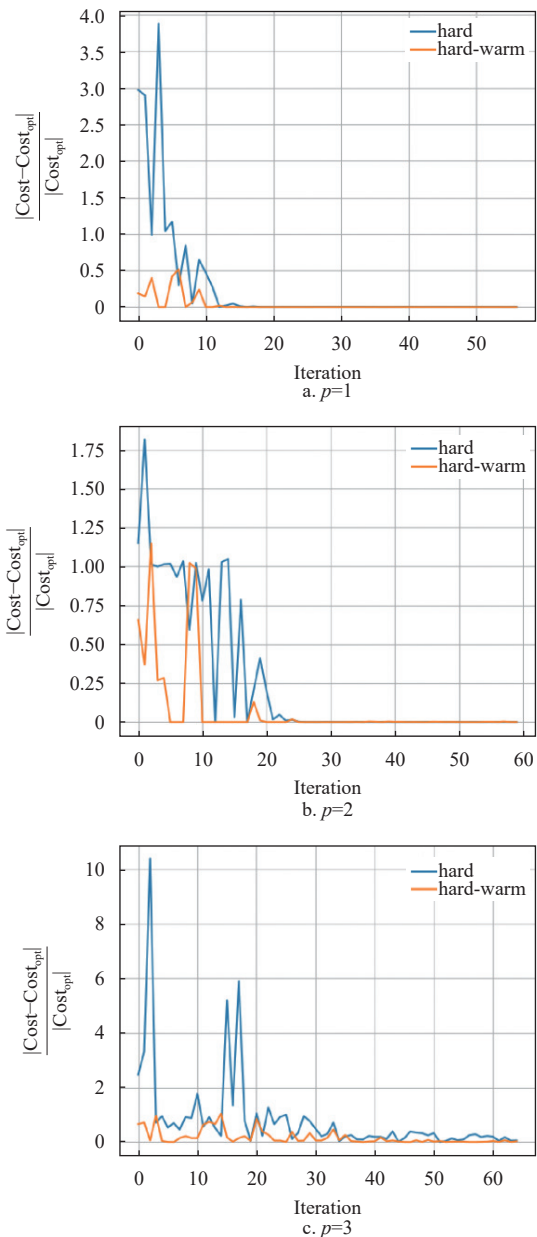


图4 不同线路深度下两种量子算法的收敛速度

4 结束语

本文基于金融领域特别关心的投资组合优化问题, 结合当下量子计算机和量子算法的发展现状, 提出将硬约束和热启动两种思想相结合的量子近似优化算法。数值模拟的结果也充分展示了本算法具有极高的计算效率, 能够快速得到离散投资组合模型的最优解。

同时也注意到, 当前量子计算机的硬件发展水平, 包括量子比特的数目、退相干时间以及量子纠

错等方面还有待进一步提高。随着量子计算技术的进一步发展,量子算法在解决投资组合优化问题上也将展示出更大的计算优势。

参考文献

- [1] CAO S R, WU B J, CHEN F S, et al. Generation of genuine entanglement up to 51 superconducting qubits[J]. *Nature*, 2023, 619(7971): 738-742.
- [2] DENG Y H, GU Y C, LIU H L, et al. Gaussian boson sampling with pseudo-photon-number-resolving detectors and quantum computational advantage[J]. *Physical Review Letters*, 2023, 131(15): 150601.
- [3] MOSES S A, BALDWIN C H, ALLMAN M S, et al. A race-track trapped-ion quantum processor[J]. *Physical Review X*, 2023, 13(4): 041052.
- [4] 金磐石. 量子信息技术在金融领域的探索实践[J]. *金融电子化*, 2022(2): 8-10.
JIN P S. Quantum information technology in the exploration and practice of the financial field[J]. *Financial Electronicization*, 2022(2): 8-10.
- [5] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. *The Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77.
- [6] FABOZZI F J, MARKOWITZ H M, KOLM P N, et al. Mean - variance model for portfolio selection[EB/OL]. [2024-03-21]. <https://doi.org/10.1002/9781118182635.efm0003>.
- [7] MARKOWITZ H. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints[J]. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, 3(1/2): 111-133.
- [8] WOLFE P. The simplex method for quadratic programming[J]. *Econometrica*, 1959, 27(3): 382.
- [9] SHAW D X, LIU S C, KOPMAN L. Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization[J]. *Optimization Methods and Software*, 2008, 23(3): 411-420.
- [10] HUANG K Y, JANE C, CHANG T. An enhanced approach to optimizing the stock portfolio selection based on modified Markowitz MV method[J]. *Journal of Convergence Information Technology*, 2011, 6(2): 226-239.
- [11] SOLEIMANI H, GOLMAKANI H R, SALIMI M H. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 5058-5063.
- [12] BARKOUTSOS P K, NANNICINI G, ROBERT A, et al. Improving variational quantum optimization using CVaR[J]. *Quantum*, 2020, 4: 256.
- [13] FARHI E, GOLDSTONE J, GUTMANN S, et al. A quantum approximate optimization algorithm[EB/OL]. [2024-06-12]. <http://arxiv.org/abs/1411.4028v1>.
- [14] VERDON G, ARRAZOLA J M, BRÄDLER K, et al. A quantum approximate optimization algorithm for continuous problems[EB/OL]. [2024-06-12]. <http://arxiv.org/abs/1902.00409v1>.
- [15] HADFIELD S, WANG Z H, O'GORMAN B, et al. From the quantum approximate optimization algorithm to a quantum alternating operator ansatz[J]. *Algorithms*, 2019, 12(2): 34.
- [16] FINNILA A B, GOMEZ M A, SEBENIK C, et al. Quantum annealing: A new method for minimizing multidimensional functions[J]. *Chemical Physics Letters*, 1994, 219(5/6): 343-348.
- [17] KADOWAKI T, NISHIMORI H. Quantum annealing in the transverse Ising model[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(5): 5355-5363.
- [18] 王宝楠, 水恒华, 王苏敏, 等. 量子退火理论及其应用综述[J]. *中国科学(物理学 力学 天文学)*, 2021, 51(8): 1-13.
WANG B N, SHUI H H, WANG S M, et al. Theories and applications of quantum annealing: A literature survey[J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2021, 51(8): 1-13.
- [19] UTSUNOMIYA S, TAKATA K, YAMAMOTO Y. Mapping of Ising models onto injection-locked laser systems[J]. *Optics Express*, 2011, 19(19): 18091-18108.
- [20] TAKATA K, UTSUNOMIYA S, YAMAMOTO Y. Transient time of an Ising machine based on injection-locked laser network[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(1): 013052.
- [21] UTSUNOMIYA S, NAMEKATA N, TAKATA K, et al. Binary phase oscillation of two mutually coupled semiconductor lasers[J]. *Optics Express*, 2015, 23(5): 6029-6040.
- [22] HARRON A W, HASSIDIM A, LLOYD S. Quantum algorithm for linear systems of equations[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(15): 150502.
- [23] YILDIRIM E A, WRIGHT S J. Warm-start strategies in interior-point methods for linear programming[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12(3): 782-810.
- [24] WU Z G, MOHAMMADISIAHROUDI M, AUGUSTINO B, et al. An inexact feasible quantum interior point method for linearly constrained quadratic optimization[J]. *Entropy*, 2023, 25(2): 330.
- [25] GGER D J, MAREVCEK J, WOERNER S. Warm-starting quantum optimization[J]. *Quantum*, 2021, 5: 479.

编辑 税红