

引用格式: 陈李, 叶芃, 杨慧芝, 等. 基于稀疏傅里叶变换的快速频谱感知方法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(2): 274-279.

CHEN L, YE P, YANG H Z, et al. Fast spectrum sensing method based on sparse FFT[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(2): 274-279.

基于稀疏傅里叶变换的快速频谱感知方法



陈李¹, 叶芃¹, 杨慧芝², 杨扩军^{1*}

(1. 电子科技大学 自动化工程学院, 成都 611731; 2. 四川建筑职业技术学院 基础教学部, 成都 610300)

摘要: 在通信、雷达等应用场景中, 常常需要对稀疏信号进行高精度的频谱运算。传统基于快速傅里叶变换的方法需要大量运算资源, 频谱分析效率低。为了解决高精度和实时性的矛盾, 该文提出了一种基于稀疏傅里叶变换的频谱分析方法, 利用延时采样的相位旋转效应, 在低采样率下实现宽带信号的快速频谱感知。实验结果显示, 这种方法在欠采样且存在混叠的稀疏信号测试场景下大幅减少了运算压力, 运算效率比 FFT 提升了 2 倍以上, 在典型的稀疏场景下, 对信号恢复精度超过 95%。

关键词: 稀疏信号; 傅里叶变换; 频谱感知; 可重构采样; 高速数据采集系统

中图分类号: TH85

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2024071

Fast spectrum sensing method based on sparse FFT

CHEN Li¹, YE Peng¹, YANG Huizhi², and YANG Kuojun^{1*}

(1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

2. Sciences Basic Teaching Department, Sichuan College of Architectural Technology, Chengdu 610300, China)

Abstract: In communication, radar, and other applications, it is often necessary to perform high-precision spectral computations on sparse signals. Traditional methods based on Fast Fourier Transform (FFT) require substantial computational resources, leading to a decrease in the efficiency of spectral analysis. To resolve the conflict between high precision and real-time requirements, this paper proposes a spectral analysis method based on Sparse Fourier Transform (SFT). By utilizing the phase rotation effect of delayed sampling, this method achieves rapid spectral perception of wideband signals at low sampling rates. Experimental results show that this approach significantly reduces computational burden in under-sampled and aliased sparse signal testing scenarios, improving computational efficiency by more than 2 times compared to FFT. In typical sparse scenarios, the signal recovery accuracy exceeds 95%.

Key words: sparse signal; FFT; spectrum sensing; reconfigurable sampling; high-speed data acquisition systems

频域稀疏信号广泛存在于通信、雷达、电子对抗等领域, 是信号采集和电子测试的常见对象^[1-2]。此类信号更强调实时性分析。随着宽带信号应用的不断增长, 对更高效的频谱分析方法的需求日益迫切^[3]。由于稀疏信号的频谱存在大量空白频段, 传统的 FFT 方法在处理这类信号时效率较低。因此, 亟需一种能够利用信号稀疏性以提升运算速度的算法。

大 O 标记法 (big O notation) 描述了算法时间

复杂度, 它通过关注输入规模 (N) 的增长对算法运行时间的影响, 提供了算法效率的上界估计。传统的离散傅里叶变换 (discrete fourier transform, DFT) 算法时间复杂度为 $O(N^2)$, 因为每一个频率成分的计算都需要对 N 个时间点进行求和, 而总共有 N 个频率成分。快速傅里叶变换通过利用 DFT 的对称性和周期性, 将 $O(N^2)$ 次计算转换为递归分治算法, 将 N 点的变换分解为多个 $N/2$ 点的变换, 最终分解为 1 点变换。每层分解的计算量是线

收稿日期: 2024-03-29

基金项目: 国家自然科学基金 (62371097)

作者简介: 陈李, 博士生, 主要从事机器学习、信号处理、智能仪器方面的研究。

*通信作者 E-mail: Yangkj@uestc.edu.cn

性的, 共有 $\log N$ 层分解, 因此 FFT 的时间复杂度为 $O(M \log N)$ ^[4], 大大提升了计算效率。

然而, FFT 的资源消耗与运算时间均只与信号长度相关。随着信号带宽的扩展, 为保持频谱分辨率, 参与运算的信号点数显著增长, 造成运算资源浪费, 拖慢了分析速度^[5]。为在 FFT 基础上进一步提升分析效率, 研究者们提出了多种优化方法。如: split-radix 算法通过分治思想^[6]降低计算复杂度; 蝴蝶变换 (butterfly transform)^[7]减少了内存访问次数; in-place 算法^[8]利用多项式乘法特性减少运算次数。然而, 这些方法的时间复杂度未能超越 $O(M \log N)$, FFT 在大点数分析时的效率问题仍未完全解决。

在进一步限定信号特征后, 可以利用信号特征提升频谱分析效率。压缩感知理论^[9]通过随机投影和稀疏表示实现频谱恢复, 减少采样率, 但需选择合适稀疏基, 且恢复过程的迭代优化增加了计算时间。子空间方法 (sub space method, SSM)^[10]通过协方差矩阵分解和特征值分析来提高频谱分辨率和抗噪性能。

稀疏傅里叶变换^[11-12]在处理频域稀疏信号时, 其速度显著高于传统 FFT。其核心思想是利用信号在频域的稀疏特性, 通过重排-加窗-降采样 FFT-重构等步骤实现信号的亚线性处理, 减少实际参与 FFT 变换的点数。然而, 该方法需要复杂的重排操作, 硬件部署较为困难。

本文提出了一种改进的基于稀疏傅里叶变换的频谱感知方法, 利用采样时延在频域的相位旋转效应实现频谱重排和频率估计。相比于传统求余操作实现重排, 该方法更简单直观, 易于在传统硬件上部署。

1 基于哈希映射的稀疏傅里叶变换

对于一个稀疏的频谱, 在噪声之外, 如果其有用的频点仅为 k 个, 则为了恰当地估计该信号, 需要的估计系数仅为 n 个。即:

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}'\|_2 \geq C \min \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_2 \quad (1)$$

式中, C 是常数; $\hat{\mathbf{x}}$ 是对一般情况的估计; $\hat{\mathbf{x}}'$ 是获得的一般情况计算结果; \mathbf{y} 是理想的 k -sparse 向量。

稀疏傅里叶变换的核心思路是通过减少参与 FFT 的采样点数, 提高稀疏信号频谱分析的速度。通过在时域对信号进行重新排列, 改变频域的分

布, 避免有效频点过于聚集。具体地, 算法中使用了随机置换 $P_{\sigma, \tau}$ 来重新排列时域信号 \mathbf{x} , 从而改变频域信号 $\hat{\mathbf{x}}$ 的分布。公式表示为:

$$y_i = G_i(P_{\sigma, \tau} \mathbf{x})_i = G_i x_{\sigma i + \tau} \quad (2)$$

式中, y_i 是重排后的时域信号的第 i 采样点; G_i 是窗函数的第 i 采样点; σ 和 τ 是随机选取的整数, 用于实现时域信号的随机排列。

接着对重排后的信号进行降采样, 减少 FFT 的计算量。算法中使用了参数 B 来对重排后的信号 \mathbf{y} 进行降采样, 降采样后的频域信号 $\hat{\mathbf{z}}$ 公式表示为:

$$\hat{z}_i = \hat{y}_i(n/B) \quad (3)$$

式中, y_i 是 \mathbf{y} 的傅里叶变换; n/B 表示降采样因子。

在完成 FFT 计算后, 由于降采样, 一个频点可能对应多个位置。通过多次重复计算并投票, 最终确定真实频点的位置。算法中利用了参数 d 来确定候选频点的数量, 每次迭代估计出 d 个候选频点, 然后通过多次迭代投票来最终确定真实频点的位置。公式表示为:

$$I = \{i \in [n] | h_{\sigma}(i) \in J\} \quad (4)$$

式中, h_{σ} 是根据频点位置确定的哈希函数; J 是 $\hat{\mathbf{z}}$ 中最大 d 频点的集合; I 是候选真实频点位置的集合。

算法会多次重复这个过程, 每次都会产生一个新的候选真实频点集合 I , 以收集候选真实频点位置, 通过迭代次数记为 L 。在完成所有位置内层循环后, 算法统计每个位置索引 i 在所有迭代中出现的次数, 即 $|r_i \in I_r|$ 。如果一个位置索引 i 在超过一半的迭代中都被检测为候选真实频点, 则算法认为该位置很可能包含一个真实的大系数。

2 基于相位旋转的改进方法

以上计算方法无法避免多次投票, 且对信号噪声有较高的敏感性, 无法在实际应用中部署, 因此本文对传统的傅里叶变换进行了改进。

区别于传统稀疏傅里叶变换采用哈希映射法, 为了更加方便硬件部署, 直接利用低采样率的 ADC 进行欠采样, 将等间隔的频点折叠到同一位置, 即完成了频谱重排和降采样。

2.1 无碰撞情况下的恢复

在不考虑频点碰撞的情况下, 此时原先属于不同位置的频点虽然会混叠到同一位置上, 但非零值

的幅度只从属于一个确定的频点, 为此就要从混叠的多个频点确定实际有效频点位置。经 FFT 变换, 每一个频点的非零幅度都可以表示为复数 A , 经过极短的一段时延 t , 该幅度的模长不变, 相位旋转 $e^{j2\pi ft}$, 该频点的复数幅度变为 $Ae^{j2\pi ft}$ 。因此可以通过两次相隔一定时延的采样构造等式。第一次获得的复数频率为 A_1 , 则第二次获得的复数频率为:

$$A_2 = A_1 e^{j2\pi ft} \quad (5)$$

可通过:

$$\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = j2\pi ft \quad (6)$$

求出真实的频点位置 f 。

当信号经历的时延超过 2π 时, 可能造成相位循环, 即:

$$\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = j2\pi f(t + 2kT) \quad (7)$$

式中, T 是高频成分的周期。由于高频信号的频率较高, 采样时延过大会影响信号的准确性。为了避免这种情况, 需要控制时钟以保证较小的采样时延, 一般应不大于信号最高频率的周期, 以避免带来不利后果。

2.2 碰撞情况下的恢复

频点碰撞的问题仍然不可忽视, 检测和还原碰撞的位置是下一步需要解决的两个问题。

定义一个参数为欠采样倍率。如果原始稀疏信号从 DC 开始需要感知的带宽为 B , 所需的奈奎斯特采样率即为 $2B$, 而以 $2B_{\text{sub}}$ 欠采样后, 频率高于 B_{sub} 的信号成分混叠到 $\text{DC} - B_{\text{sub}}$ 区间内, 此时可以认为原始信号所需的奈奎斯特采样率与欠采样条件下的奈奎斯特采样率比值为欠采样倍率, 即:

$$d_{\text{factor}} = B/B_{\text{sub}} \quad (8)$$

欠采样倍率即同一位置混叠的频点数量, 即:

$$h(f) = h(f_1) + h(f_2) + \dots + h(f_{d_{\text{factor}}}) \quad (9)$$

式中, 如果 k 是奇数, 则 $f_k = f + ((k-1)/2)f_s$; 如果 k 是偶数, 则 $f_k = (k/2)f_s - f$ 。

此时再利用时延采样的相位旋转性质, 算出两次欠采样的时间序列的 FFT 结果。如果两次欠采样的对应位置上的幅度几乎无变化, 则表明该位置只有一个非零频率。反之, 由于时延造成的相位旋转则是互相独立的, 造成幅度必然发生明显变化,

从而说明该频点有多个非零频率的碰撞。

以两个频点碰撞为例, 令未经延时的混叠频率为:

$$A = A_1 + A_2 \quad (10)$$

经过延时之后, 假设延时时间为 τ :

$$A' = A_1 e^{j2\pi f_1 \tau} + A_2 e^{j2\pi f_2 \tau} \quad (11)$$

以矩阵形式表示, 即:

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j2\pi f_1 \tau} & e^{-j2\pi f_2 \tau} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式 (12) 中只有原始幅度 A_1 和 A_2 为未知数, 求解该方程, 即可明确混叠两频点的各自幅度。

当欠采样因子增加, 同一位置混叠的频点数量增加, 则该方程组为超定方程组。此时可以通过增加若干组的延时, 或利用凸优化算法求解方程。该步骤的一般形式是:

$$\begin{bmatrix} A \\ A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi f_1 \tau_1} & e^{j2\pi f_2 \tau_1} & \dots & e^{j2\pi f_n \tau_1} \\ e^{j2\pi f_1 \tau_2} & e^{j2\pi f_2 \tau_2} & \dots & e^{j2\pi f_n \tau_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_1 \tau_m} & e^{j2\pi f_2 \tau_m} & \dots & e^{j2\pi f_n \tau_m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

凸优化是一种用于解决稀疏信号恢复问题的有效方法。常用于处理稀疏信号和欠采样信号。常见的稀疏恢复算法包括正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP)、基追踪 (basis pursuit, BP)、迭代阈值缩减算法 (iterative soft thresholding algorithm, ISTA) 和加速迭代阈值缩减算法 (fast iterative soft thresholding algorithm, FISTA) 等。

当延时组数不足, 形成超定方程组时, 可以利用这些稀疏恢复算法进行非确定性的求解。以 OMP 为例, 该算法将矩阵视为一组基向量, 通过逐步选择与残差最相关的基向量, 并确定其系数 (式 (13) 中序列 $\{A_i\}$) 逐次逼近原信号。

欠采样信号的混叠频点求解问题等效于稀疏恢复问题, 通过这些方法, 可以有效分离并恢复混叠频点的各自幅度, 从而实现较高准确性的频谱感知。

3 验证实验

本文在软件上搭建了本文算法的验证平台, 并与标准的 FFT 算法进行对比。信号的采样率为 13 GSPS, 感知的频谱带宽为 6 GHz。为了最大程度模拟真实的实验环境, 仿真信号由两个部分叠

加合成。信号的全长为 n , 由于生成测试信号为实信号, 因此其 $0\sim 2\pi$ 的非零频点位置需要关于 π 对称。为了贴近实际, 不限制测试信号初相位, 在第一部分中, 随机均匀地选择 k 个频点, 赋幅度值为随机复数, 并保证其对称性。其余频点设置为零。在第二部分, 在第一奈奎斯特域随机选择 k 个频点, 并根据欠采样倍率因子的大小, 在高阶奈奎斯特域相应位置设置镜像频点, 确定频点定位后, 在各个位置随机设置复数幅度, 从而保证合成后的信号存在混叠情况。在此基础上, 对信号添加不同水平的噪声, 以研究噪声对恢复效果的影响。

图 1 展示了长度为 8 192, 稀疏度 $K=8$, 其中有两个频点存在碰撞的一次频谱感知结果。在 SFDR 约为 -50 dB 的情况下, 采用一组时延采样, 以较小的矩阵运算代价实现了快速的信号频谱感知。

3.1 单次感知实验

图 1 为信号长度为 8 192, 稀疏度为 10 的信号的一次变换结果。可以看出在稀疏度接近 1% 的情况下, 能够实现精确的信号频谱感知。

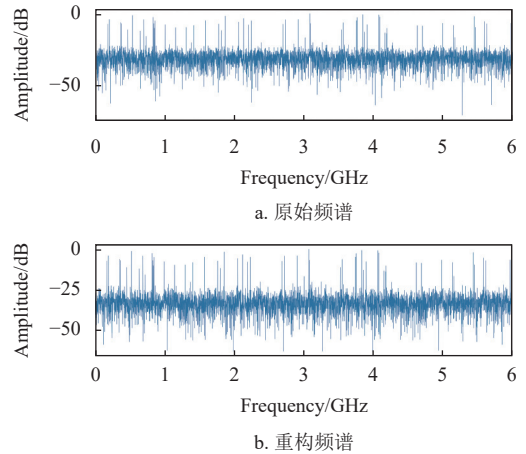


图 1 一次 SFT 感知的恢复结果与原始信号对比

3.2 运行时间对重要参数的敏感性

如图 2 所示, 在实验中将信号长度设置为 $2^{10}\sim 2^{17}$ 的一系列变量, 调整稀疏度 K_1 为 1%~5%、混叠频点数量 K_2 为 2~8 个, 噪声水平设置为 $-50\sim -5$ dB, 并与快速傅里叶变换的运行时间进行对比。其中每一行分别显示了不同混叠频点数量、噪声水平和稀疏度下, 稀疏傅里叶变换与快速傅里叶变换的运行时间对比。

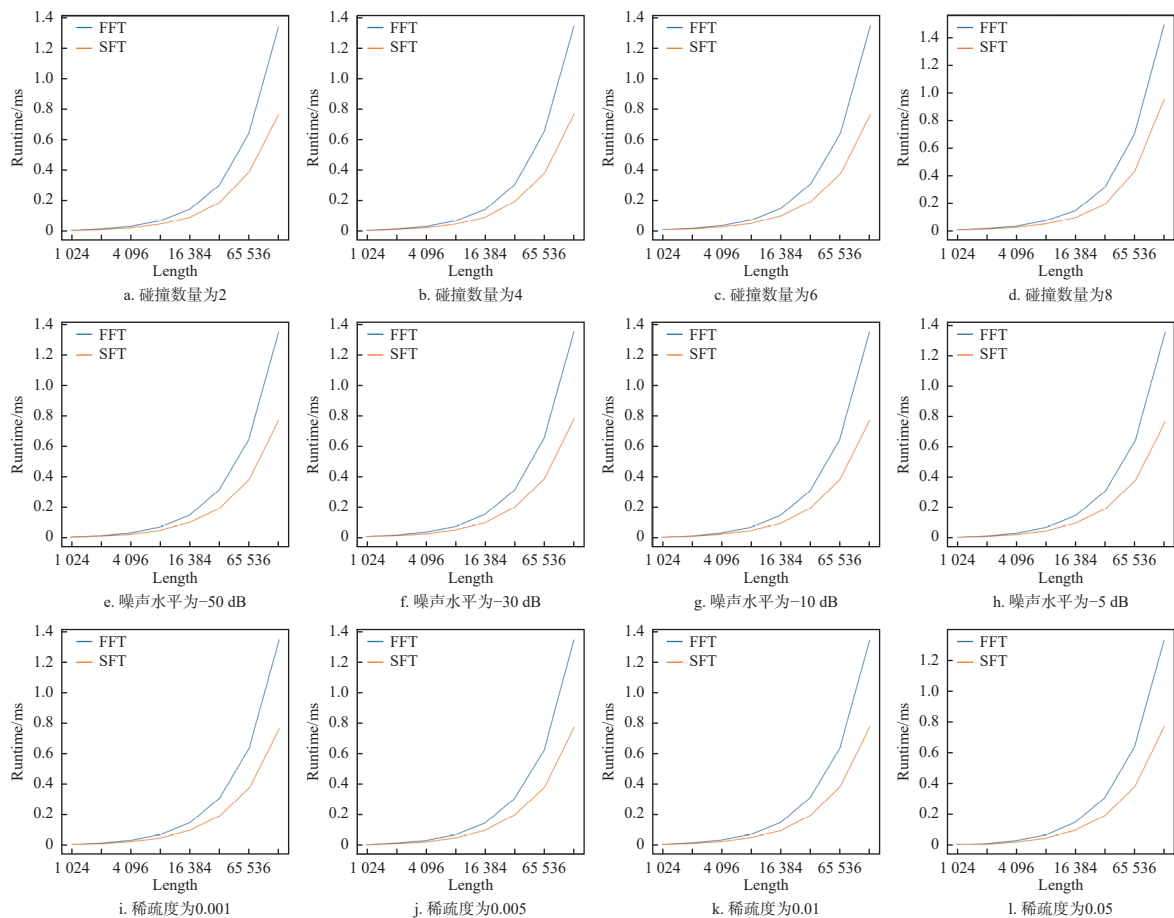


图 2 不同混叠情况、噪声水平、稀疏度条件下的运行时间对比

结果显示,在实验设置的所有条件组合下,稀疏傅里叶变换相对于 FFT 都具有速度优势。FFT 由于具有 $O(N \log N)$ 的时间复杂度,其运行时间仅和信号长度有关,而稀疏傅里叶变换在典型的频域稀疏信号的频谱分析领域,具有两倍以上速度优势。

在不同的混叠频点数量 (2, 4, 6, 8)、不同噪声水平 (-50 dB, -30 dB, -10 dB, -5 dB) 和稀疏度 (0.01%, 0.1%, 1%, 10%) 的情况下,对比稀疏傅里叶变换与快速傅里叶变换的运行时间。在多种条件下,稀疏傅里叶变换均表现出比 FFT 更高的计算效率。

在调整稀疏度和混叠频点数量的实验中,稀疏傅里叶变换都表现出了比 FFT 更快的计算效率。通过添加不同程度的白噪声,将信号的信噪比设定为 -50~-5 dB。固定稀疏度为 1%,碰撞频点数量 $K_2 = 8$ 。可以看出在不同 SNR 条件下,稀疏傅里叶变换的运行时间稳定,优于同条件下的 FFT,证明该方法在计算效率上的优势并未随信号质量变化而削弱。

3.3 检测精度

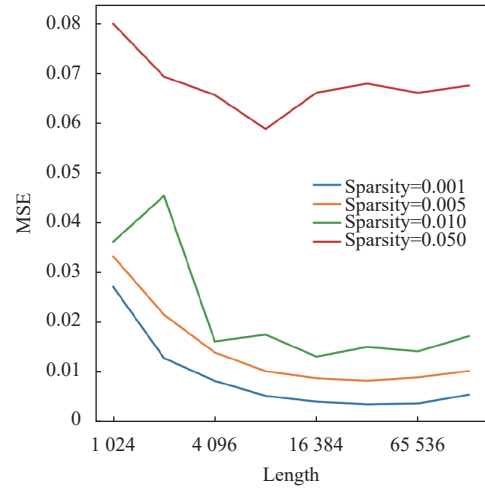
在对比了运行时间后,也计算了稀疏傅里叶变换对原始频谱恢复的精确度。保持采样率、噪声等其他参数不变,在不同的稀疏度或混叠频谱误差之下观察信号恢复的均方误差,如图 3 所示。可以看出在不同的稀疏度水平下,绝对均方误差 (MSE) 随着信号长度增加都保持了相对的稳定,但当稀疏度超过 5% 时, MSE 有一定程度的退化。随着稀疏性的减弱,信号的恢复误差水平会上升。而在不同的混叠程度下,随着信号长度的增加, MSE 能收敛到一个稳定的水平上,随着信号长度的增加,混叠频点数量对恢复精度的影响逐渐变小。

在频谱感知场景中,频点能否正确感知到,有时比恢复精度更为关键,因此本文分别计算了其精确度 (Precision)、召回率 (Recall) 和 F1-score,其中, F1-score 是两者的调和平均数:

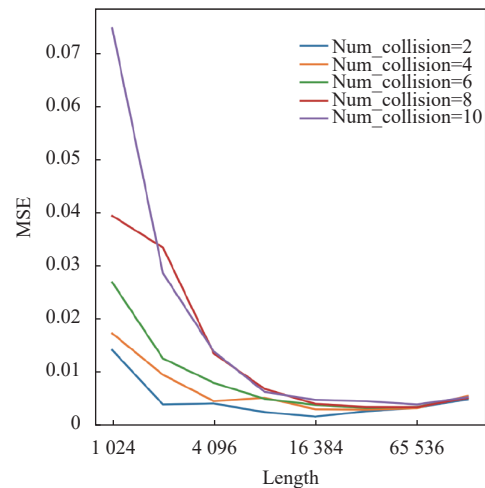
$$F1 = \frac{Precision + Recall}{Precision \times Recall} \quad (14)$$

图 4 展示了 F1-score 的结果。由于 F1-score 综合考虑了阳性和阴性样本点不均衡时,假阳性和假阴性的存在,因此一般以 F1-score 作为预测精度的公认指标,本文以 F1-score 表示在不同程度的干扰水平下,正确识别出非零频点位置的精确度。可以看出,在调整稀疏性的实验中,稀疏度未达 10% 时, F1-score 均在 94% 以上,这说明 SFT 算法在大多数稀疏信号频谱感知场景中都有很好的性能。在调整混叠频点数量的实验中, F1-score 也基本保

持在了 94% 以上。而相对于噪声的实验中,当噪底保持在 -30 dB 以下时, F1-score 都达到了 95% 以上。实验结果证明了该算法在感知频谱的精确度上具有相当程度的可靠性。

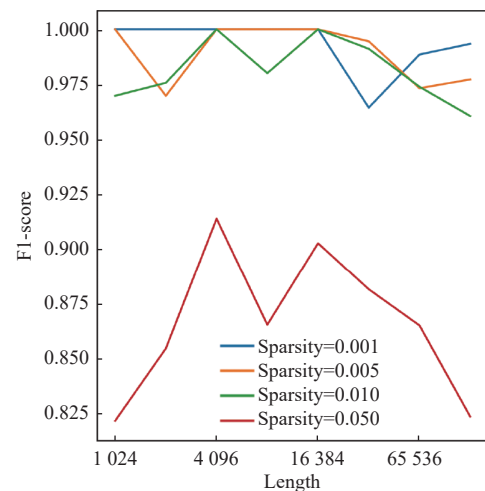


a. 均方误差 VS 稀疏度



b. 均方误差 VS 混频

图 3 SFT 算法的均方误差 (MSE)



a. 不同稀疏度下

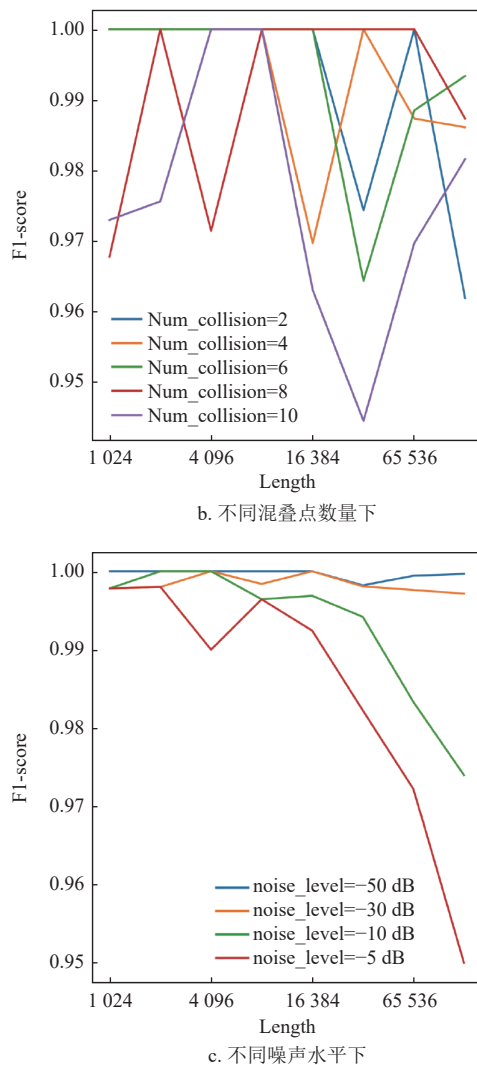


图4 恢复精度 (F1-score) 对比

4 结束语

本文提出了一种用于通信信号、雷达信号等领域稀疏信号快速频谱分析的算法。在一定程度的信号稀疏度下, 信号的分析速度超过传统的快速傅里叶分析算法。相比于传统的基于哈希映射的算法, 本文算法能够适应现有的时间交替采样架构, 利用多次采样的时延产生的相位旋转现象, 以较低指标的采样硬件, 实现宽带信号频谱感知, 提升了算法在硬件上的可用性, 在对时效性要求更高的多域同步分析、快速频谱感知等领域的应用中具有重要的潜在价值。在本文仿真中, 当信号稀疏度达到 10% 时, 对 FFT 依然保持了速度优势, 在并非严格稀疏、更加贴近实际采样的应用场景中, 基于相位旋转的稀疏傅里叶变换仍然能够实现快速的频谱感知, 验证结果与理论分析相符。

参考文献

- [1] LI J, ZHANG J, WANG X, et al. Multidomain analysis and nth-order synchronous reference vector adaptive control of the doubly salient motor[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(8): 6570-6580.
- [2] PATIL S S, PATIL S S, PATIL S S. Software implementation of FFT algorithms and analysis of their computational complexity[C]//2018 International Conference on Electrical, Electronics, Communication, Computer, and Optimization Techniques (ICEECCOT). [S.l.]: IEEE, 2018: 1-6.
- [3] WANG Z, WANG X, LI J, et al. High performance and resource efficient FFT processor based on CORDIC algorithm[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2022, 2022(1): 1-15.
- [4] RAHMAN M A, HASSANIEH A, AMIN M G, et al. Sparse frequency-domain channel estimation for OFDM-based radar systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(16): 4197-4212.
- [5] RAO X, LAU V K N. Sparse Bayesian learning for DOA estimation with mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(4): 959-969.
- [6] CHEN Y, CHEN C, CHEN C. The split-radix fast Fourier transforms with radix-4 butterfly units[C]//2013 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference. [S.l.]: IEEE, 2013: 1-6.
- [7] FERREIRA G, SANTANA G, PAIM G, et al. Low-power fast Fourier transform hardware architecture combining a split-radix butterfly and efficient adder compressors[J]. *IET Computers & Digital Techniques*, 2021, 15(1): 1-11.
- [8] MITRA S K, BHATTACHARYA S S, SWARTZLANDER E E. An in-place FFT architecture for real-valued signals[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2013, 60(10): 652-656.
- [9] ZHANG Y, ZHANG Y, LIU Y, et al. Low energy consumption compressed spectrum sensing algorithm based on semi-tensor product in cognitive radio network[J]. *Sensors*, 2020, 20(5): 1-17.
- [10] KUMAR R, VERMA P K. Signal space estimation: application to subspace spectrum analysis[C]//2018 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI). [S.l.]: IEEE, 2018: 1-5.
- [11] HASSANIEH H, INDYK P, KATABI D, et al. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform[C]//Proceedings of the 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. [S.l.]: SIAM, 2012: 1183-1194.
- [12] HASSANIEH H, INDYK P, KATABI D, et al. Nearly optimal sparse Fourier transform[C]//Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. [S.l.]: ACM, 2012: 563 - 578.