

引用格式: 孙东霖, 冀腾宇. 融合矩阵分解和全连接张量网络分解的鲁棒张量填充方法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(5): 763-775.
SUN D L, JI T Y. A robust tensor completion method integrating matrix factorization and fully-connected tensor network decomposition[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(5): 763-775.

融合矩阵分解和全连接张量网络分解的 鲁棒张量填充方法



孙东霖¹, 冀腾宇^{2*}

(1. 长安大学 理学院, 西安 710064; 2. 西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710072)

摘要: 矩阵与张量填充旨在估计缺失数据, 广泛应用于图像修复、推荐系统等。全连接张量网络 (FCTN) 分解因其新颖的结构和优良的性能而受到广泛关注。然而, 该类方法对初始秩依赖很大。为了解决这一问题, 引入 Frobenius 范数约束 FCTN 因子, 使其与 FCTN 分解共同促进目标张量的低秩性。该方法在初始秩选择不当的情况下仍具有较强的鲁棒性。为求解该非凸优化问题, 设计了一种基于近端交替最小化的算法。大量仿真数据和真实数据的实验结果表明, 该方法不仅优于多种先进张量分解方法, 而且在初始秩设定敏感性方面也明显优于现有的 FCTN 方法。

关键词: 张量分解; 鲁棒性; 图像修复; 近端交替最小化

中图分类号: TN919.8; O183

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2025100

A robust tensor completion method integrating matrix factorization and fully-connected tensor network decomposition

SUN Donglin¹ and JI Tengyu^{2*}

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2. School of Mathematical and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The fully-connected tensor network (FCTN) decomposition has attracted significant attention due to its novel structure and superior performance. However, the effectiveness of this type of method heavily depends on the choice of initial ranks. To address this issue, the Frobenius norm constraint is introduced to FCTN factor tensor to promote the low-rank property of the target tensor. As a result, the proposed method remains robust even when the initial ranks are improperly set. To solve the resulting non-convex optimization problem, a proximal alternating minimization algorithm is designed. Extensive experiments on both synthetic and real-world data demonstrate that the proposed method not only outperforms several state-of-the-art tensor decomposition approaches but also exhibits significantly less sensitivity to the choice of initial ranks compared to existing FCTN-based methods.

Key words: tensor decomposition; robustness; image inpainting; proximal alternating minimization

在高维数据填充领域中^[1-2], 张量作为一种关键工具, 已受到学术界与工业界的广泛关注。此类问题的难点与核心主要聚焦于如何构建适宜的张量分解形式以及定义合适的秩, 以此来有效地挖掘各模态之间的关联性。与矩阵秩存在统一明确的定义不同, 张量秩的定义尚未形成标准化的统一形式。常见的张量秩定义方法包括 CANDECOMP/PARAFAC

(CP) 分解^[3]、Tucker 分解^[4-6]、张量奇异值分解 (tensor singular value decomposition, t-SVD)^[7-8]、张量列车 (tensor train, TT) 分解^[9] 以及张量环 (tensor ring, TR) 分解^[10] 等。这些分解方式各具特点, 分别从不同角度建模张量的相关结构, 在低秩张量填充 (low-rank tensor completion, LRTC) 任务中发挥了重要作用^[11-12]。

收稿日期: 2025-05-12

基金项目: 国家自然科学基金 (12001059); 教育部重点实验室开放基金 (EMCAE202403)

作者简介: 孙东霖, 主要从事高性能科学计算、图像处理等方面的研究。

*通信作者 E-mail: tengyu.ji@nwpu.edu.cn

CP 分解是矩阵奇异值分解 (SVD) 在张量领域的拓展, 将张量表示为若干个秩 1 张量之和。基于 CP 秩的方法已成功应用于低秩张量填充、图像修复等问题^[13-15]。然而, 目前缺乏有效的 CP 秩凸松弛函数, 因此这些方法通常先设定初始秩, 再计算 CP 分解近似以重建原始张量^[16]。与矩阵秩受限于行或列的最小维度不同, CP 秩可能超过各维度的最大值, 这使得其确定较为困难, 且相关计算问题属于 NP 难问题^[17]。

Tucker 分解则将一个 N 阶张量表示为一个核心张量与 N 个因子矩阵的乘积。基于 Tucker 秩的方法可通过将张量秩转化为多个矩阵秩之和来构造优化模型, 降低了高阶结构所导致的复杂性^[18-19]。此外, Tucker 分解在低秩张量近似问题上表现出色^[20], 用于实时交通流预测等实际场景中^[21]。然而, 随着张量阶数的不断上升, Tucker 分解的参数数量呈现出迅速增长的趋势, 这在一定程度上影响了其在高阶张量中的应用效率。

近年来, 为应对高阶张量填充问题, 多种基于张量网络的分解方法应运而生。文献 [17] 提出了张量列车分解, 此分解将一个 N 阶张量分解为 $N-2$ 个三阶张量和 2 个矩阵的乘积。然而, TT 分解因首尾为矩阵、中间为三阶张量的结构限制, 若对张量进行模态转置操作, 其分解结构会发生变化, 影响其表示能力和灵活性^[22-26]。为克服这一限制, 文献 [19] 提出了张量环分解。张量环分解将一个 N 阶张量表示为 N 个三阶张量的乘积, 使得该分解对模态的循环排列保持不变, 并可用环状结构图表示^[27-31]。相较于 TT 分解, TR 分解具有更强的表达灵活性, 但仍存在局限性, 即仅能捕捉相邻因子之间的相关性, 难以刻画任意模态间的联系^[32]。

为全面提升 TR 等分解的表示能力, 文献 [32] 提出了全连接张量网络 (fully-connected tensor network, FCTN) 分解方法。该方法将一个 N 阶张量分解为 N 个 N 阶因子张量的乘积, 每个因子张量均与其余所有 $N-1$ 个因子张量相连接, 从而能够有效地建模任意两个模态之间的内部关联性^[32-33]。FCTN 的秩由一个包含 $N(N-1)/2$ 个元素的向量表示, 在遥感图像云层去除等图像处理中已得到实际应用^[34]。然而, 与 TT 和 TR 分解类似, FCTN 方法的性能对初始秩高度敏感。由于 FCTN 秩向量元素较多, 准确设定张量的 FCTN 秩难度较大, 参数

调节代价相对较高。

针对初始秩设定过高时模型性能下降的问题, 本文提出对 FCTN 因子张量利用 Frobenius 范数约束, 进而构建鲁棒 FCTN (robust FCTN, RFCTN) 张量填充模型。该范数通过刻画因子张量在各模态上的纤维 (fiber) 结构约束目标张量的低秩性, 无需奇异值分解, 从而降低计算复杂度。在 RFCTN 模型中, 当初始秩低于真实秩时, FCTN 结构可有效提取低秩特征; 而当初始秩高于真实秩时, 因子张量的 Frobenius 范数正则化有助于压缩秩结构, 从而增强模型的鲁棒性。为求解该模型, 本文设计了一种基于近端交替最小化 (proximal alternating minimization, PAM) 的优化算法。

1 相关工作

FCTN 分解^[32] 将一个 N 阶张量 \mathcal{U} 分解为一组 N 阶因子张量, 定义如下:

$$\mathcal{U}(i_1, i_2, \dots, i_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{r_{i,j}=1}^{R_{i,j}} \mathcal{G}_1(i_1, r_{1,2}, \dots, r_{1,N}) \cdots \mathcal{G}_n(i_n, r_{1,n}, r_{2,n}, \dots, r_{n-1,n}, r_{n,n+1}, \dots, r_{n,N}) \cdots \mathcal{G}_N(i_N, r_{1,N}, r_{2,N}, \dots, r_{N-1,N})$$

式中, $\mathcal{G}_n \in \mathbb{R}^{I_n \times \prod_{q=1}^{n-1} R_{q,n} \times \prod_{p=n+1}^N R_{n,p}}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 是因子张量, 维度均为 N 阶, 跟目标张量维度一致; FCTN 秩为 $\mathbf{R} = (R_{1,2}, \dots, R_{1,N}, R_{2,3}, \dots, R_{2,N}, \dots, R_{N-1,N}) \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$, 其元素记为 $R_{i,j}$; 张量 \mathcal{U} 中的第 (i_1, i_2, \dots, i_N) 个元素记为 $\mathcal{U}(i_1, i_2, \dots, i_N)$, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_n, \mathcal{G}_N$ 中元素表示类似。基于此, FCTN 分解可表示为若干个 FCTN 秩为 1 的张量之和, 形式如下:

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{r_{i,j}=1}^{R_{i,j}} g_1(:, r_{1,2}, \dots, r_{1,N}) \circ \cdots \circ g_n(:, r_{1,n}, r_{2,n}, \dots, r_{n-1,n}, r_{n,n+1}, \dots, r_{n,N}) \circ \cdots \circ g_N(:, r_{1,N}, r_{2,N}, \dots, r_{N-1,N}),$$

式中, $g_n(:, r_{1,n}, \dots, r_{n-1,n}, r_{n,n+1}, \dots, r_{n,N}) \in \mathbb{R}^{I_n}$ 表示 g_n 的第 $(r_{1,n}, \dots, r_{n-1,n}, r_{n,n+1}, \dots, r_{n,N})$ 个模 1 纤维; \circ 表示向量的外积。为便于书写和理解, FCTN 分解形式定义为 $\mathcal{U} = \text{FCTN}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N) = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^N)$, 如果所有的因子张量都参与了收缩 (见文献 [32] 定义 5), 则简记为 $\mathcal{U} = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^N) = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\})$ 。

基于 FCTN 分解, 得到如下张量填充模型:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{U}, \{\mathcal{G}_n\}} \frac{1}{2} \|\mathcal{U} - \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\})\|_{\text{F}}^2 \\ & \text{s.t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

式中, $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 表示矩阵和张量的 Frobenius 范数。上述模型重建的目标张量的低秩结构是通过先验给定的初始 FCTN 秩来约束。这意味着欲取得理想的重建成果, 必须对 FCTN 的秩进行合理的初始化操作。然而, 仅依靠观测数据的先验知识来确定这一秩的值, 面临着诸多挑战与难点。

2 图像修复模型和算法

2.1 RFCTN 模型

在经典的 FCTN 模型中, 挖掘目标张量的低秩结构依赖于预设秩, 初始秩的设定成为准确提取低秩特征的唯一途径。然而, 初始秩的初值对最终的重建结果有着直接影响, 这使得基于 FCTN 的方法对初始秩极为敏感。为解决这一问题, 本文引入 Frobenius 范数对 FCTN 因子张量进行约束, 提出了一种鲁棒 FCTN (RFCTN) 模型:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{U}, \{\mathcal{G}_n\}} \frac{1}{2} \|\mathcal{U} - \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\})\|_{\text{F}}^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{2} \|\mathcal{G}_n\|_{\text{F}}^2 \\ & \text{s.t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{F}) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mu > 0$ 是正则化参数, 用于平衡 FCTN 分解与因子张量 Frobenius 范数这两项之间的权重。由于该模型可以通过这两项共同确保目标张量具备低秩结构, 因此提出的模型对初始秩具有较强的鲁棒性: 一方面, 可以通过设定 FCTN 的初始秩 (RFCTN 中的第 1 项) 来控制目标张量的低秩性; 另一方面, 通过各因子张量的 Frobenius 范数 (RFCTN 中的第 2 项) 约束目标张量各个模纤维间的相关性, 进而控制目标张量的低秩性。具体而言, 当 FCTN 初始秩较小时, FCTN 分解能够有效捕捉张量的低秩特征; 而当初始秩高于真实秩时, 因子张量的 Frobenius 范数有助于强化目标张量的低秩结构, 从而提升模型在不同初始秩设定下的鲁棒性。

定理 1 给定 N 阶张量 \mathcal{U} 具有 FCTN 分解 $\mathcal{U} = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\})$, 则以下不等式成立:

$$\|\mathcal{U}\|_* := \sum_{n=1}^N \|\mathcal{U}_{(n)}\|_* \leq N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\mathcal{G}_n\|_{\text{F}}^2 \right)^{N/2}$$

证明: 由文献 [32] 定理 4 可知, $\mathcal{U}_{(1)} = \mathbf{G}_{1,(1)} \mathcal{M}_1$, 其中 $\mathcal{M}_1 = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\}, \mathcal{G}_1)$ 是一个大小为 $\times_{i=2}^N (I_i \times R_{1,i})$ 的 $2N-2$ 阶张量。根据矩阵核范数的

性质, 有:

$$\|\mathcal{U}_{(1)}\|_* \leq \|\mathbf{G}_{1,(1)}\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_1\|_{\text{F}} = \|\mathcal{G}_1\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_1\|_{\text{F}} \quad (2)$$

这里张量 \mathcal{M}_1 可分解为 $\mathcal{M}_{1,\widehat{2}} = \text{FCTN}(\{\mathcal{G}_n\}, \mathcal{G}_1) / \{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^2$ 和 \mathcal{G}_2 , 其中 $\mathcal{M}_{1,\widehat{2}}$ 是大小为 $\times_{i=3}^N (I_i \times R_{1,i} \times R_{2,i})$ 的张量, 具有以下关系:

$$\mathcal{M}_{1,(2)} = \mathbf{G}_{2,(2)} \mathcal{M}_{1,\widehat{2},[n_1:n_2]}$$

式中, $\mathcal{M}_{1,(2)}$ 是大小为 $I_2 R_{1,2} \times \prod_{i=3}^N (I_i R_{1,i})$ 的矩阵, 为 \mathcal{M}_1 的模 2 展开; $\mathbf{G}_{2,(2)}$ 是大小为 $I_2 R_{1,2} \times \prod_{i=3}^N R_{2,i}$ 的矩阵, 为 \mathcal{G}_2 的模 2 展开; $\mathcal{M}_{1,\widehat{2},[n_1:n_2]}$ 是大小为 $\prod_{j=3}^N R_{2,j} \times \prod_{i=3}^N (I_i R_{1,i})$ 的矩阵, 是 $\mathcal{M}_{1,\widehat{2}}$ 的广义张量展开, $n_1 = (3, 6, \dots, 3N-6)$, $n_2 = (1, 2, 4, 5, \dots, 3N-8, 3N-7)$ 。因此,

$$\|\mathcal{M}_{1,(2)}\|_{\text{F}} \leq \|\mathbf{G}_{2,(2)}\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_{1,\widehat{2},[n_1:n_2]}\|_{\text{F}}$$

上式等价于:

$$\|\mathcal{M}_1\|_{\text{F}} \leq \|\mathcal{G}_2\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_{1,\widehat{2}}\|_{\text{F}} \quad (3)$$

定义 $\mathcal{M}_{1,k}$ 的 FCTN 分解因子张量为 $\{\mathcal{G}_n\}_{n=k+1}^N$, 即 $\mathcal{M}_{1,k} = \text{FCTN}(\mathcal{G}, \{\mathcal{G}_n\}_{n=k+1}^N)$ 。由式 (3) 可知:

$$\|\mathcal{M}_{1,\widehat{2}}\|_{\text{F}} \leq \|\mathcal{G}_3\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_{1,\widehat{3}}\|_{\text{F}}$$

$$\|\mathcal{M}_{1,\widehat{3}}\|_{\text{F}} \leq \|\mathcal{G}_4\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_{1,\widehat{4}}\|_{\text{F}}$$

⋮

$$\|\mathcal{M}_{1,\widehat{N-2}}\|_{\text{F}} \leq \|\mathcal{G}_{N-1}\|_{\text{F}} \|\mathcal{M}_{1,\widehat{N-1}}\|_{\text{F}} =$$

$$\|\mathcal{G}_{N-1}\|_{\text{F}} \|\mathcal{G}_N\|_{\text{F}} \quad (4)$$

结合式 (2)~式 (4), 可得:

$$\|\mathcal{U}_{(1)}\|_* \leq \prod_{i=1}^N \|\mathcal{G}_i\|_{\text{F}}$$

利用广义张量转置定义, 对任意 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ 有:

$$\|\mathcal{U}_{(n)}\|_* \leq \prod_{i=1}^N \|\mathcal{G}_i\|_{\text{F}} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

根据算术-几何平均不等式, 上式可重写为:

$$\|\mathcal{U}_{(n)}\|_* \leq \left(\prod_{i=1}^N \|\mathcal{G}_i\|_{\text{F}}^2 \right)^{\frac{1}{N}} \leq \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathcal{G}_i\|_{\text{F}}^2 \right)^{\frac{N}{2}}$$

因此, 张量 \mathcal{U} 的核范数被限制为:

$$\|\mathbf{U}\|_* := \sum_{n=1}^N \|\mathbf{U}_{(n)}\|_* \leq N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{G}_i\|_F^2 \right)^{\frac{N}{2}}$$

根据定理 1, 因子张量 $\{\mathbf{G}_n\}_{n=1}^N$ 的 Frobenius 范数之和是目标张量的 Tucker 核范数的上界。这意味着, 因子张量的 Frobenius 范数之和可以作为一种替代方法来约束张量低秩结构, 并使所提出的方法相较于没有因子正则化的方法更加稳健, 这在实验部分中得到了证明。

2.2 PAM 算法

为求解所建模型, 首先引入如下指示函数:

$$\phi_{\mathbb{S}}(\mathbf{U}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{U} \in \mathbb{S} \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$

式中, $\mathbb{S} = \{\mathbf{U} : \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{U}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{F})\}$ 。模型 (1) 可以重新表述为如下的无约束优化问题:

$$\min_{\mathbf{U}, \{\mathbf{G}_n\}} \frac{1}{2} \|\mathbf{U} - \text{FCTN}(\{\mathbf{G}_n\})\|_F^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{2} \|\mathbf{G}_n\|_F^2 + \phi_{\mathbb{S}}(\mathbf{U}) \quad (5)$$

由于式 (5) 是非凸问题且包含耦合变量, 采用近端交替最小化 (PAM) 算法进行求解。为简化表示, 将式 (5) 中的目标函数表示为:

$$f(\mathbf{U}, \{\mathbf{G}_n\}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{U} - \text{FCTN}(\{\mathbf{G}_n\})\|_F^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{2} \|\mathbf{G}_n\|_F^2 + \phi_{\mathbb{S}}(\mathbf{U})$$

因此, 变量 $\{\mathbf{G}_n\}$ 和 \mathbf{U} 可以通过如下策略交替更新:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_n^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{G}_n} f(\mathbf{U}, \{\mathbf{G}_k^{t+1}\}_{k=1}^{n-1}, \mathbf{G}_n, \{\mathbf{G}_k^t\}_{k=n+1}^N) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{G}_n - \mathbf{G}_n^t\|_F^2 \\ \mathbf{U}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{U}} f(\mathbf{U}, \{\mathbf{G}_n^{t+1}\}_{n=1}^N) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{U} - \mathbf{U}^t\|_F^2 \end{cases}$$

式中, $\rho > 0$ 为近端参数; \mathbf{G}_n^t 和 \mathbf{U}^t 表示第 t 次迭代更新的结果。

更新 \mathbf{G}_n : 给定一个固定的 n , 根据文献 [32] 中定理 1, \mathbf{G}_n 可以通过求解如下子问题更新:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n,(1)}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{G}_{n,(1)}} & \frac{1}{2} \left\| \mathbf{U}_{(n)}^t - \mathbf{G}_{n,(1)} \mathbf{M}_{n,[m_1:m_2]} \right\|_F^2 + \\ & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{G}_{n,(1)}\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{G}_{n,(1)} - \mathbf{G}_{n,(1)}^t \right\|_F^2 \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{U}_{(n)}$ 是 \mathbf{U} 的模 n 展开; $\mathbf{G}_{n,(1)}$ 是 \mathbf{G}_n 的模 1 展开; $\mathbf{M}_{n,[m_1:m_2]}$ 是 $\mathcal{M}_n = \text{FCTN}(\{\mathbf{G}_n\}, / \mathbf{G}_n)$ 的广义张量展开, $m_1 = (2, 4, \dots, 2N-2)$, $m_2 = (1, 3, \dots, 2N-3)$ 。

显然, 该子问题有闭式解:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n,(1)}^{t+1} = & \left(\mathbf{U}_{(n)}^t \mathbf{M}_{n,[m_2:m_1]} + \rho \mathbf{G}_{n,(1)}^t \right) \times \\ & \left(\mathbf{M}_{n,[m_2:m_1]} \mathbf{M}_{n,[m_2:m_1]} + (\rho + \mu) \mathbf{I}_n \right)^{-1} \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{M}_{n,[m_2:m_1]}$ 是 $\mathbf{M}_{n,[m_1:m_2]}$ 的转置; \mathbf{I} 是大小为 $\prod_{i \neq n} R_{n,i}$ 的单位矩阵, 如果 $n > i$, 有 $R_{n,i} = R_{i,n}$ 。最后, 因子张量 \mathbf{G}_n 可以通过如下更新:

$$\mathbf{G}_n^{t+1} = \text{Fold}_1(\mathbf{G}_{n,(1)}^{t+1}) \quad (6)$$

更新 \mathbf{U} : \mathbf{U} 子问题可以通过以下闭式解求解:

$$\mathbf{U}^{t+1} = \mathcal{P}_{\Omega^c} \left(\frac{\text{FCTN}(\{\mathbf{G}_n^{t+1}\}) + \rho \mathbf{U}^t}{1 + \rho} \right) + \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{F}) \quad (7)$$

式中, Ω^c 是 Ω 的补集。

2.3 计算复杂度分析

对于一个 N 阶观测张量 $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{I \times I \times \dots \times I}$, 为了便于分析, 假设 RFCTN 模型中的最大 FCTN 秩设置为 R 。本文方法的计算复杂度分为两部分: 更新 \mathbf{G}_n 和更新 \mathbf{U} 的复杂度。在式 (6) 中, 更新 \mathbf{G}_n 的计算复杂度为 $O(N \sum_{k=2}^N \mathbf{I}^k R^{k(N-k)+k-1} + N \mathbf{I}^{N-1} R^{2(N-1)} + N R^{3(N-1)})$ 。在式 (7) 中, 更新 \mathbf{U} 的计算复杂度为 $O\left(\sum_{k=2}^N \mathbf{I}^k R^{k(N-k)+k-1}\right)$ 。因此, 算法 1 中每次迭代的总计算复杂度为 $O\left(N \sum_{k=2}^N \mathbf{I}^k R^{k(N-k)+k-1} + N \mathbf{I}^{N-1} R^{2(N-1)} + N R^{3(N-1)}\right)$ 。

算法 1 RFCTN: 鲁棒全连接张量网络方法

输入: 观测数据 \mathcal{F} , 被采样元素的位置集合 Ω , FCTN 秩上限 R^{\max} , FCTN 初始秩 R^0 , 以及近端参数 $\rho = 0.1$, 正则化参数 $\mu = 0.1$ 。

初始化: $\mathbf{U}^0 = \mathcal{F}$, $\mathbf{G}_n^0 \in \mathbf{U}(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots, N$

While $\varepsilon > \text{tol}$ 且 $t < 3000$

更新 \mathbf{G}_n^t : 利用式 (6);

更新 \mathbf{U}^t : 利用式 (7);

更新相对误差: $\varepsilon = \|\mathbf{U}^{t+1} - \mathbf{U}^t\|_F / \|\mathbf{U}^t\|_F$;

If $\varepsilon < 0.01$

$R = \min(R + 1, R^{\max})$;

End if

End while

输出: 恢复数据 \mathbf{U}

3 实验

评估使用的数据有仿真数据 (四阶和五阶张

量)与真实数据(彩色视频与高光谱视频)。对比方法包括5种基于不同张量分解策略的算法: HaLRTC (Tucker 分解)^[11]、t-SVD (张量奇异值分解)^[35]、TT (张量 train 分解)^[26]、TRLRF (张量环分解)^[29]及 FCTN^[32]。

对于仿真数据, 利用恢复张量 $\hat{\mathcal{U}}$ 与真实张量 \mathcal{U} 之间的相对均方误差 (relative squared error, RSE) 来衡量恢复性能, 定义: $RSE = \|\hat{\mathcal{U}} - \mathcal{U}\|_F / \|\mathcal{U}\|_F$ 。RSE 值越小表示恢复效果越好。

对于真实数据, 采用平均峰值信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) 与平均结构相似性指标 (structural similarity index measure, SSIM) 作为定量评估指标, PSNR 和 SSIM 值越高表明重建质量越好。

采样率 (sampling rate, SR) 定义为张量 \mathcal{U} 中被采样元素数与总元素数之比, 表示为: $SR = |\Omega|/|\mathcal{U}|$, 其中 Ω 表示被采样元素位置的集合, $|\cdot|$ 表示支持集 (support set)。所有实验在 MATLAB 2020a 实现, 硬件配置如下: Intel (R) Xeon (R) CPU E5-2 680 v2 @ 2.80 GHz 和 96 GB 内存。

3.1 初始秩鲁棒性分析

3.1.1 无噪声仿真数据集

由于张量列 (TT) 分解是张量环 (TR) 分解和 FCTN 分解的特例, 因此仿真数据采用 TT 分解方式生成, 并使用 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布对因子张量进行随机初始化。测试中共设计了两个仿真数据集: 一个为 $20 \times 20 \times 20 \times 20$ 的四阶张量, 对应的 TT 秩为 (10, 80, 10); 另一个为 $12 \times 12 \times 12 \times 12$ 的五阶张量, 对应的 TT 秩为 (8, 48, 48, 8)。

对于 N 阶张量, 其 FCTN 秩是一个长度为 $N(N-1)/2$ 的向量。为简化实验设置, 将该向量中所有元素设置为相同的值。停止准则设定为相邻两次迭代之间的相对误差不超过给定的阈值 5×10^{-5} 。本小节考虑如下 4 种不同的采样率: 5%、10%、15% 和 20%。图 1 展示了在不同初始秩条件下, 本文方法对仿真数据的敏感性分析结果。结果表明, 在各类采样率和初始秩条件下, 所提 RFCTN 方法整体优于 FCTN 方法。此外, 对于不同的采样率, FCTN 方法的重建相对均方误差随着初始秩的增大而上升, 而所提 RFCTN 方法在初始秩变化下表现出更强的鲁棒性。

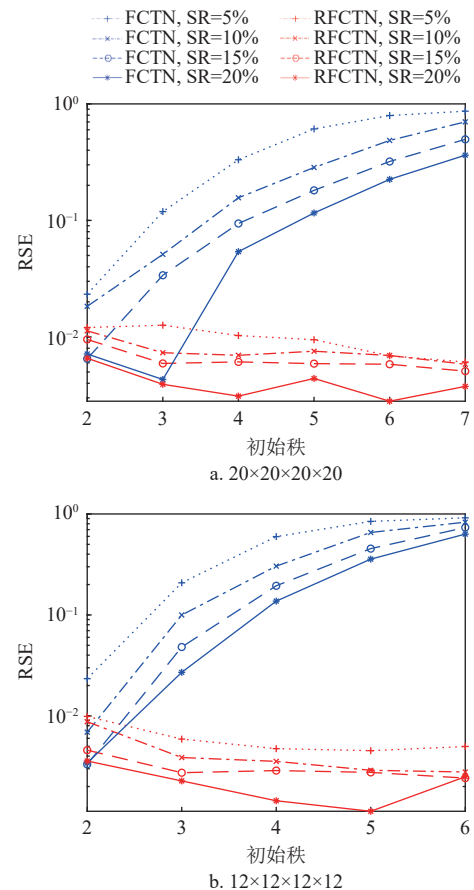


图1 不同初始秩和采样率下仿真数据集的相对均方误差结果

3.1.2 无噪声真实数据

本小节采用视频数据 akiyo (源于: <http://trace.eas.asu.edu/yuv/>) 和高光谱视频 (hyperspectral video, HSV) (源于: <http://openremotesensing.net/kb/data/>) 对 FCTN 方法和所提 RFCTN 方法在初始秩选择上的敏感性进行评估。

所使用的视频 akiyo 取自原始数据的前 50 帧, 其大小为 $144 \times 176 \times 3 \times 50$; 高光谱视频 (HSV) 数据的大小为 $60 \times 60 \times 20 \times 20$ 。为全面评估 FCTN 方法和 RFCTN 方法对初始秩的鲁棒性, 本小节设置了 4 种采样率: 5%、10%、15% 和 20%。在初始秩的设定上, akiyo 视频的取值范围为 {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; HSV 的取值范围为 {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}。图 2 展示了在不同初始秩下, akiyo 和 HSV 的 PSNR 和 SSIM 结果。

实验结果表明, 随着初始秩的增加, FCTN 和 RFCTN 两种方法的 PSNR 和 SSIM 值先提升后趋于平稳。具体而言, 对于 akiyo 视频数据, 当初始秩超过 4 (SR=5%)、6 (SR=10% 和 15%) 或者 7 (SR=20%) 时, FCTN 方法的性能开始下降; 而 RFCTN 方法在达到一定初始秩后, 其 PSNR 和

SSIM 值保持相对稳定。对于 HSV 数据，当初始秩超过 5 (SR=5%)、6 (SR=10% 和 15%) 或者 7 (SR=20%) 时，FCTN 方法同样表现出性能下降的趋势。尤其在 SR=5% 和 10% 的情况下，当

初始秩设置为 8 时，FCTN 方法几乎无法实现有效重建。相比之下，所提出的 RFCTN 方法在不同采样率和初始秩设定下表现出更强的稳定性与鲁棒性。

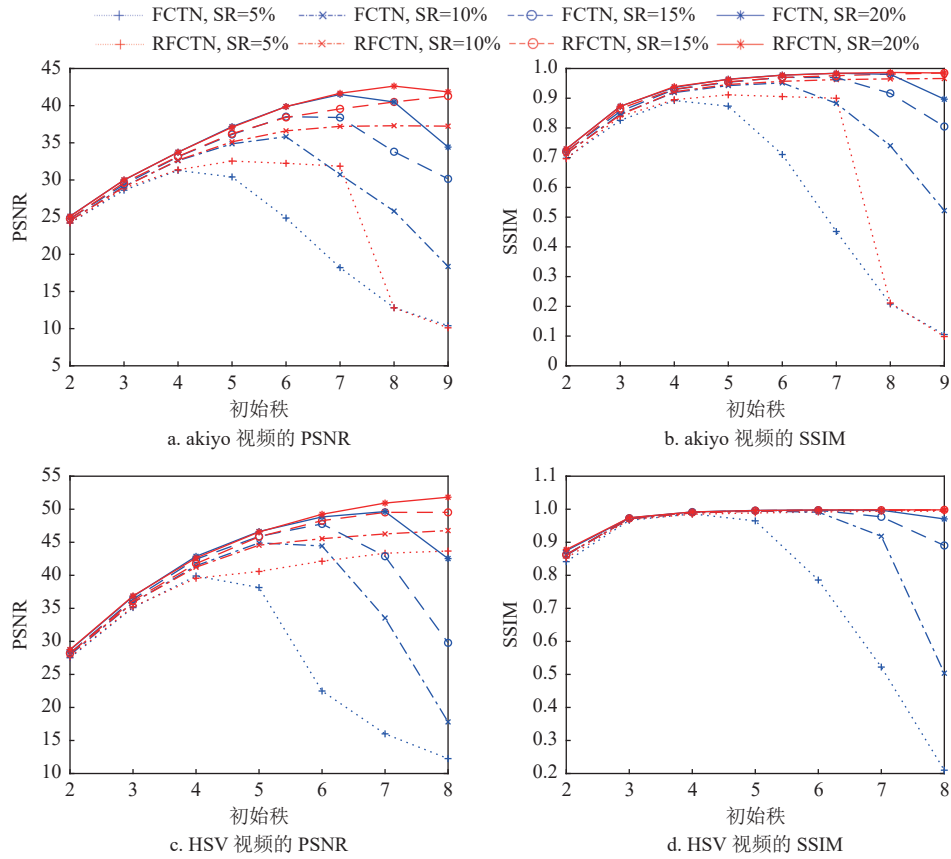
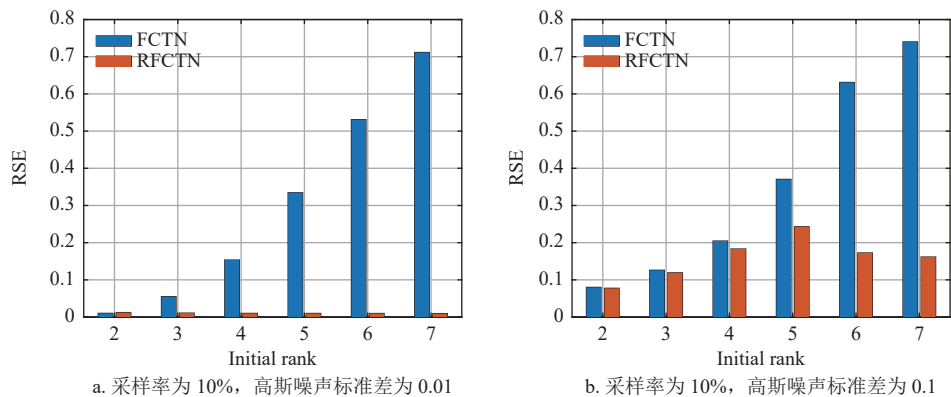


图 2 不同初始秩和不同采样率下真实数据的 PSNR 和 SSIM 结果

3.1.3 含噪数据

为进一步测试所提出的 RFCTN 方法对初始秩的鲁棒性，本文测试了被高斯噪声污染的仿真数据和真实数据修复对初始秩的敏感性。仿真数据使用前面所测试的大小为 $20 \times 20 \times 20 \times 20$ 的四阶张量，元素大小范围为 $[0, 1]$ ，添加的高斯噪声标准差为

0.01 和 0.1。图 3 展示了 FCTN 和 RFCTN 方法对不同采样率和不同噪声水平下的仿真数据关于不同初始秩 RSE 恢复结果。从图中可以看到，对于不同的采样率和不同噪声水平下的仿真数据，本文提出的 RFCTN 的结果的相对误差都比 FCTN 好，并且对不同的初始秩比 FCTN 更具鲁棒性。



a. 采样率为 10%，高斯噪声标准差为 0.01

b. 采样率为 10%，高斯噪声标准差为 0.1

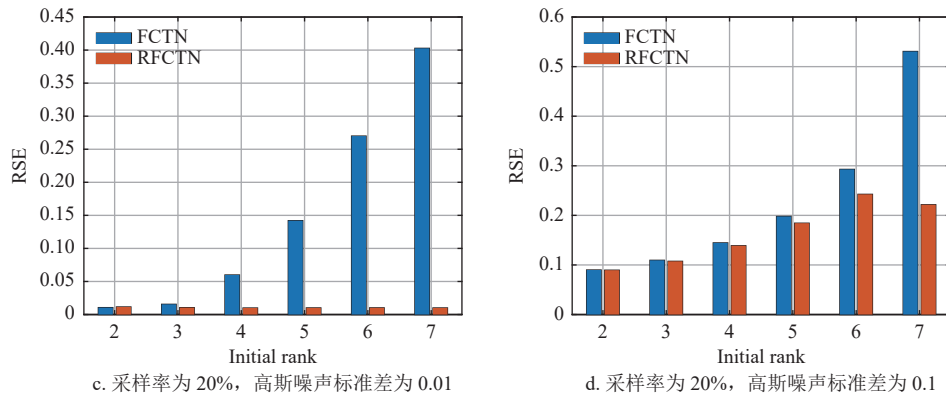


图 3 不同采样率和不同噪声水平下仿真数据关于不同初始秩的相对均方误差结果

对于真实数据, 本文对 HSV 数据添加不同标准差的高斯噪声进行测试, 其中该数据进行了归一化, 即元素取值范围为 $[0, 1]$, 所添加的高斯噪声的标准差为 0.005 和 0.01。图 4 和图 5 分别展示了 FCTN 和 RFCTN 方法对于不同采样率和不同噪声水平下的 HSV 数据关于不同初始秩的 PSNR 和 SSIM 恢复结果。从图中可以看到, 对于不同的采

样率和不同噪声水平下的 HSV 数据, 随着初始秩的增加, 本文提出的 RFCTN 的 PSNR 和 SSIM 结果先提升, 然后保持稳定, 而 FCTN 方法的 PSNR 和 SSIM 结果先提升, 到一定值后再下降, 即 RFCTN 对不同的初始秩比 FCTN 更鲁棒。此外, 对于不同采样率和不同噪声水平的恢复结果, RFCTN 均优于 FCTN 方法。

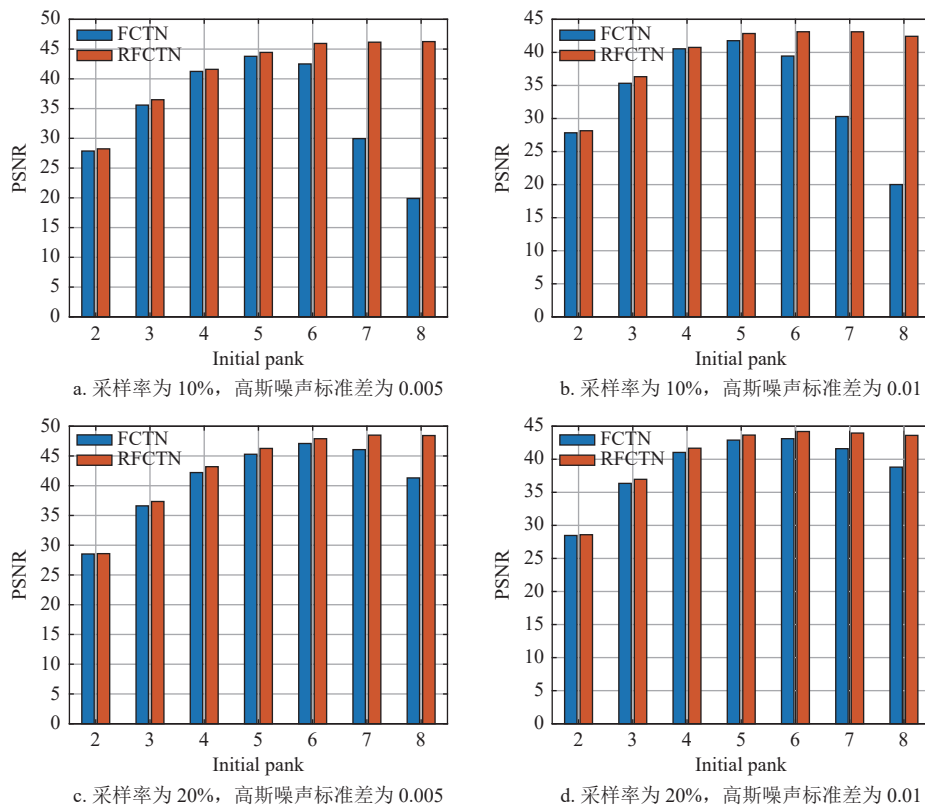


图 4 不同采样率和不同噪声水平下 HSV 数据关于不同初始秩的 PSNR 结果

3.1.4 小结

通过以上对仿真数据、彩色视频和高光谱视频的实验分析, 总结出如下结论。

- 1) 因子张量的 Frobenius 范数有助于提升 FCTN

方法的鲁棒性。当初始秩较小时 (如在 akiyo 和 HSV 数据中, 初始秩小于 6), RFCTN 和 FCTN 方法的重建性能相近, 说明所提模型中的 FCTN 分解项占主导作用; 而当初始秩较大时 (如初始秩

大于 6)，RFCTN 中引入的 Frobenius 正则项能够强化目标张量的低秩结构，从而提升整体鲁棒性。此外，从 FCTN 的结果可以看出，当初始秩设置过

大时，仅依赖 FCTN 分解项无法实现有效的重建，其性能显著下降。这是由于 FCTN 在秩选取不当时容易过拟合观测数据，损害重建质量。

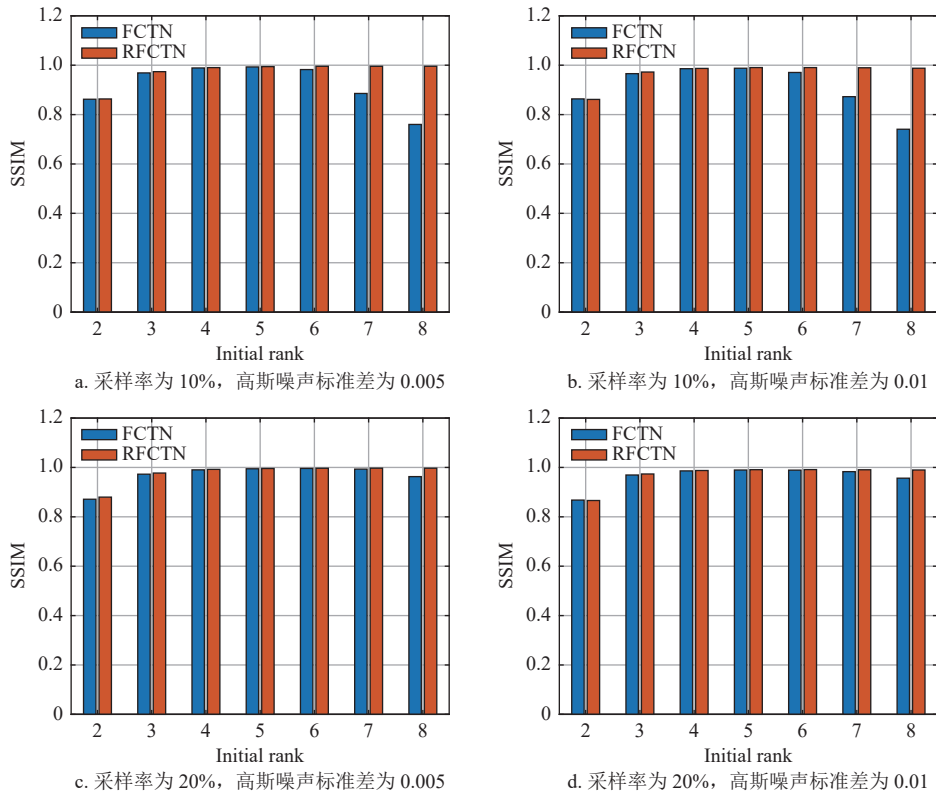


图 5 不同采样率和不同噪声水平下 HSV 数据关于不同初始秩的 SSIM 结果

2) RFCTN 在高采样率下展现出更强的鲁棒性。对于高采样率（如 akiyo 数据中，采样率大于等于 10%）下，RFCTN 方法对初始秩的敏感性较低，重建结果稳定；而 FCTN 方法在初始秩增大时性能明显下降。对于低采样率情形（如 SR=5%），尽管两种方法的性能均随初始秩的增加而变差，但在相同初始秩下，所提 RFCTN 方法始终优于 FCTN 方法。结果表明，在低采样率下应优先选择较小的初始秩。这是因为当观测数据极度缺失时，只有在目标张量具有明显低秩特性的前提下（即初始秩设得足够小），模型才能成功提取有效结构，实现高质量重建。

3) RFCTN 在不同数据集与采样率条件下均表现出优越的鲁棒性。基于上述分析，建议在低采样率条件下，无论采用 RFCTN 还是 FCTN，都应选择较小的初始秩以确保重建效果；而在高采样率情况下，虽然增加初始秩可进一步提升 RFCTN 的性能，但对 FCTN 反而可能产生负面影响。基于此，引入动态秩调整策略，以提升算法的适应能力和重建质量。具体而言，可将初始秩设为全 1 向量，并

在迭代过程中根据误差变化逐步更新秩，直至达到预设的最大秩阈值。因此，本文所有实验均采用该秩更新策略。

3.2 图像修复

本节将通过仿真数据、彩色视频和高光谱视频 (HSV) 对所提出的方法进行全面评估，并与现有的低秩张量填充方法进行了对比分析，以验证其有效性。

3.2.1 仿真数据

与前一节设置一致，初始秩向量设为全 1 向量，并采用秩更新策略，最大秩上限从集合 {2, 3, 4, 5, 6, 7} 中选择。

表 1 展示了在采样率为 5%、10%、15% 和 20% 时，两个数据集的重建相对均方误差 (RSE) 结果。对于每个采样率，最佳结果用粗体突出显示，次优结果用下划线表示。从表中可以明显看出，所提 RFCTN 方法在不同采样率下均获得最优的 RSE。特别是在低采样率（如 5%）的情况下，RFCTN 的重建误差相比其他方法好出一个数量级，充分体现了其修复性能的优越性。

表 1 不同方法在仿真数据集上的重建相对均方误差对比

方法	20×20×20×20				12×12×12×12×12			
	5%	10%	15%	20%	5%	10%	15%	20%
观测数据	0.975 3	0.949 1	0.922 0	0.894 5	0.974 8	0.948 9	0.922 3	0.894 6
HaLRTC	0.933 3	0.814 7	0.014 8	0.011 8	0.966 1	0.734 9	0.635 4	0.426 3
t-SVD	0.486 0	0.029 3	0.013 7	<u>0.0064</u>	<u>0.0247</u>	0.015 2	0.010 6	0.008 2
TT	0.099 8	0.105 0	0.115 3	0.088 9	0.091 8	0.058 7	0.006 5	0.007 9
TRLRF	0.092 0	0.072 8	<u>0.0099</u>	0.010 3	0.106 7	0.067 3	0.008 0	0.005 6
FCTN	<u>0.0436</u>	<u>0.0046</u>	0.003 1	0.002 3	0.045 2	<u>0.0094</u>	<u>0.0017</u>	<u>0.0013</u>
RFCTN	0.009 1	0.003 7	0.003 1	0.002 3	0.005 4	0.002 8	0.001 6	0.001 2

3.2.2 真实数据

针对真实数据, 本文选用 3 个彩色视频和一个高光谱视频 (HSV) [36] 对所提方法的有效性进行评估。

测试所用的彩色视频是 akiyo、container 和 carphone, 每个视频的大小为 144×176×3×50。观测数据通过对原视频进行随机采样获得, 采样率设置为 5%、10%、15% 和 20%。初始秩的上限从集合 {5, 6, 7, 8, 9, 10} 中选取。表 2 展示了不同采样率下, 各方法在视频修复任务中的 PSNR 和 SSIM 结

果。可以观察到, 尽管在 SR=5% 时, RFCTN 在 akiyo 和 container 视频上的 SSIM 值略低于最优值, 但差异甚微; 同时, 该方法在 PSNR 值方面表现最优。在其他数据集和采样率条件下, 所提 RFCTN 方法均取得了最优的 PSNR 和 SSIM 值, 优于其他对比方法。此外, 图 6 展示了 container 视频在不同方法下的重建视觉结果, 并且在每幅图像下方附加了对应的局部放大区域, 直观体现了所提方法在细节恢复方面的优势。

表 2 不同方法在彩色视频数据集上的定量指标结果对比

数据	方法	5%		10%		15%		20%	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
akiyo	观测数据	7.28	0.015 6	7.52	0.024 6	7.76	0.032 3	8.03	0.040 1
	HaLRTC	11.16	0.330 7	17.67	0.546 8	24.24	0.754 8	27.59	0.853 4
	t-SVD	32.03	0.928 6	35.76	0.967 2	38.05	0.979 2	39.95	0.985 6
	TT	26.09	0.753 3	28.14	0.798 8	30.48	0.877 4	31.89	0.909 0
	TRLRF	31.69	0.897 4	34.59	0.942 3	35.42	0.952 2	35.96	0.925 1
	FCTN	<u>32.68</u>	0.917 5	<u>37.53</u>	<u>0.9681</u>	<u>40.39</u>	<u>0.9814</u>	<u>42.34</u>	<u>0.9876</u>
	RFCTN	33.24	<u>0.9263</u>	38.36	0.972 9	41.17	0.984 3	43.23	0.989 5
container	观测数据	4.60	0.006 6	4.83	0.011 1	5.08	0.016 0	5.34	0.021 2
	HaLRTC	8.51	0.153 7	14.67	0.359 5	21.12	0.699 1	25.22	0.844 0
	t-SVD	28.81	0.895 8	34.91	0.958 7	37.59	0.972 5	39.71	0.979 9
	TT	23.66	0.751 1	26.02	0.825 1	27.39	0.864 1	29.11	0.892 8
	TRLRF	27.01	0.853 0	32.75	0.921 6	33.67	0.931 8	34.10	0.937 3
	FCTN	<u>29.76</u>	0.884 0	<u>36.70</u>	<u>0.9597</u>	<u>40.61</u>	<u>0.9772</u>	<u>41.66</u>	<u>0.9802</u>
	RFCTN	29.80	<u>0.8873</u>	37.67	0.966 1	40.99	0.978 9	42.28	0.982 6
carphone	观测数据	6.83	0.014 1	7.06	0.023 2	7.31	0.031 3	7.57	0.039 7
	HaLRTC	10.69	0.290 5	16.87	0.504 1	22.64	0.698 4	25.66	0.804 0
	t-SVD	27.18	0.798 8	29.36	0.857 4	30.75	0.887 6	31.93	0.908 7
	TT	24.59	0.690 1	25.77	0.752 9	26.57	0.784 6	30.56	0.875 8
	TRLRF	27.87	0.793 4	30.18	0.864 7	30.88	0.882 6	34.38	0.929 8
	FCTN	<u>28.29</u>	<u>0.8053</u>	<u>30.56</u>	<u>0.8780</u>	<u>32.40</u>	<u>0.9068</u>	<u>34.52</u>	<u>0.9319</u>
	RFCTN	28.67	0.814 7	31.45	0.883 0	33.46	0.916 5	34.96	0.934 4

测试所用的 HSV 是一个大小为 60×60×20×20 的 4 阶张量。由于 HSV 数据在各个维度之间具有较强的相关性, 进一步考察其在极低采样率下的重建性能, 设置的采样率为 0.5%、1%、5% 和 10%。

秩上限从集合 {4, 5, 6, 7, 8} 中选取。表 3 展示了不同采样率下不同方法的 PSNR 和 SSIM 结果。从表中可以看出, 与所有对比方法相比, RFCTN 方法在所有采样率下均取得了最佳的 PSNR 和 SSIM 结

果。在较高采样率（如 $SR=10\%$ ）的情况下，由于 HSV 数据本身具备显著的低秩结构，RFCTN 和 FCTN 方法均能实现较好的重建效果，且二者性能接近。然而，在较低采样率（如 $SR=0.5\%$, 1% , 5% ）下，RFCTN 方法显著优于其他方法，表现出更强的鲁棒性和重建能力。图 7 展示了其中某一个波段

在不同方法下的恢复结果，并在每幅图像下方附加了对应的局部放大区域。从这些图中看出，RFCTN 的重建结果波段更平滑，边缘更清晰，视觉质量显著优于其他方法。即使在极低的采样率下（如 $SR=0.5\%$, 1% ），RFCTN 方法仍能有效抑制噪声并保留更多的图像细节，表现出卓越的重建效果。

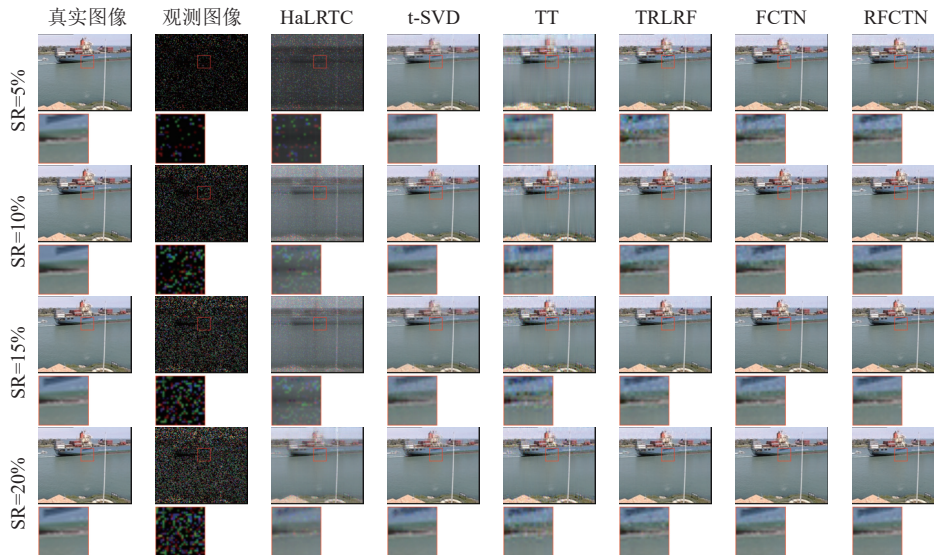


图 6 不同方法不同采样率下 container 视频的定性恢复结果（为便于可视化，每幅图像的底部均绘制了放大区域）

表 3 不同方法在 HSV 数据集上的定量指标结果对比

方法	0.5%		1%		5%		10%	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
观测数据	8.21	0.002 7	8.24	0.004 3	8.42	0.016 0	8.65	0.030 2
HaLRTC	8.22	0.003 2	8.26	0.006 4	9.84	0.131 8	13.11	0.342 0
t-SVD	8.68	0.036 7	9.66	0.092 3	13.17	0.287 1	40.38	0.988 9
TT	22.98	0.706 5	25.58	0.775 7	27.75	0.850 6	35.12	0.948 9
TRLRF	23.04	<u>0.7222</u>	26.01	0.800 4	39.00	0.982 6	42.81	0.992 4
FCTN	<u>23.97</u>	0.758 3	<u>28.92</u>	<u>0.8641</u>	<u>40.99</u>	<u>0.9879</u>	<u>47.29</u>	<u>0.9966</u>
RFCTN	25.31	0.758 3	30.00	0.902 6	42.52	0.992 9	47.33	0.996 8

3.3 参数和收敛性分析

本节将讨论所提出的 RFCTN 方法在不同近端参数 ρ 和正则化参数 μ 初始值下的性能表现。测试数据选用 akiyo 视频，采样率设定为 5%、10%、15% 和 20%。实验中近端参数 ρ 的取值设为 10^{-5} 、 10^{-4} 、 10^{-3} 、 10^{-2} 、 10^{-1} ，正则化参数 μ 的取值为 10^{-5} 、 10^{-4} 、 10^{-3} 、 10^{-2} 、 10^{-1} 、0.3、0.5、0.7、0.9。通过系统实验，分析这些参数对模型性能的影响以及算法的收敛行为。

图 8 展示了在不同近端参数和正则化参数初始值下的 PSNR 和 SSIM 结果。从图中可以看出，对于不同初始近端参数，所提方法在 PSNR 和 SSIM 指标上的差异较小，表明其对参数 ρ 具有良好的鲁

棒性。对于正则化参数的不同初始值，恢复结果的 SSIM 值变化不大，PSNR 值仅在一定的小范围内波动，也进一步验证了所提方法对正则化参数 μ 的初始化具有一定的鲁棒性。从实验结果可以得出如下结论：对于具有较高采样率的数据，建议将正则化参数 μ 初始化为较小的数值（如 0.1）；而对于较低采样率的数据，较大的正则化参数初值（如 0.3）更有利于模型的重建效果。在本文的所有实验中，为简便起见，统一将近端参数 ρ 和正则化参数 μ 设置为 0.1。综上，RFCTN 方法不仅能够不同参数设置下保持优异的重建性能，而且对参数初始值具有良好的鲁棒性，显著降低了参数调节的复杂度和成本。

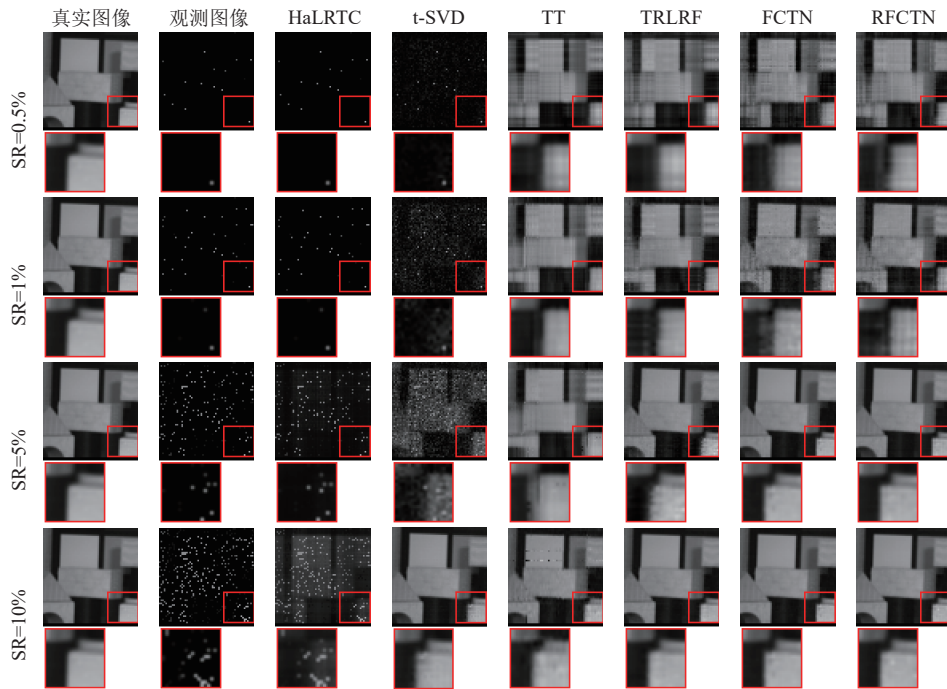


图 7 不同方法不同采样率下 HSV 的定性恢复结果 (为方便可视化, 每幅图像的底部均绘制了放大区域)

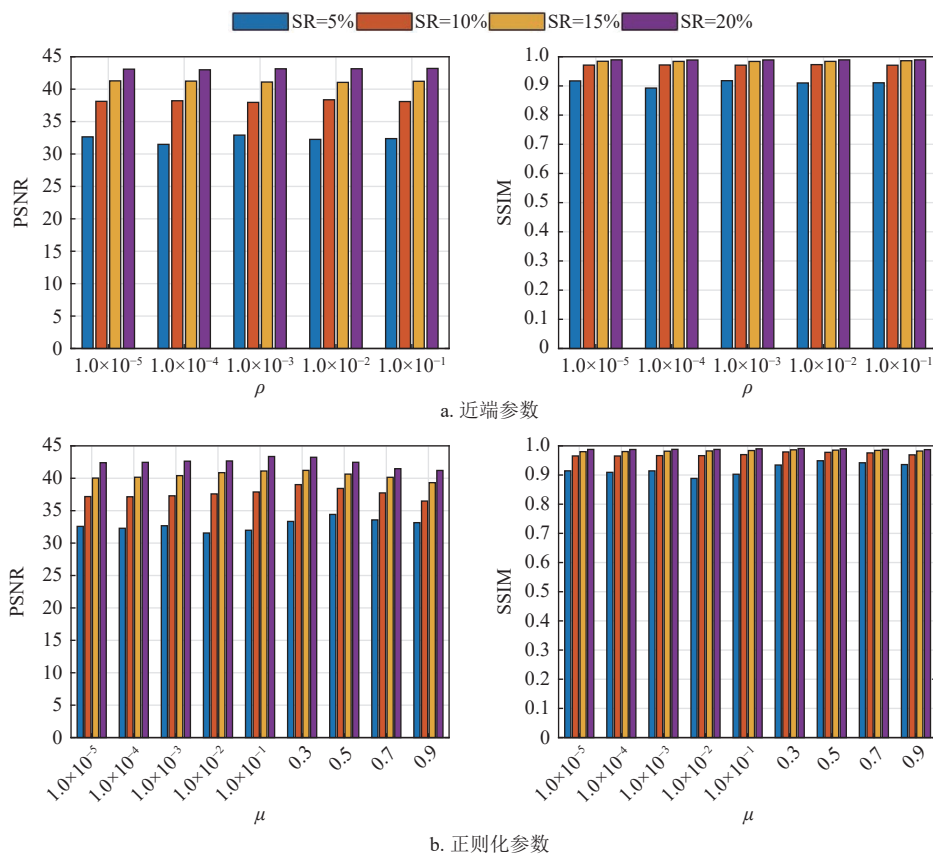


图 8 akiyo 视频对参数的敏感性分析

接下来通过研究连续两次迭代中目标张量的相对变化 (relative change between two successive estimated tensors, RelCha) 来分析所提出 RFCTN

方法的收敛性。图 9 展示了在不同参数和不同采样率条件下, akiyo 视频的 RelCha 随迭代次数的变化趋势。从图中可以看出, 尽管在初始迭代阶

段 RelCha 曲线可能存在一定波动，但总体呈下降趋势，随着迭代次数的增加逐渐趋于稳定。这表

明所提出的 RFCTN 方法在数值上具有良好的收敛性。

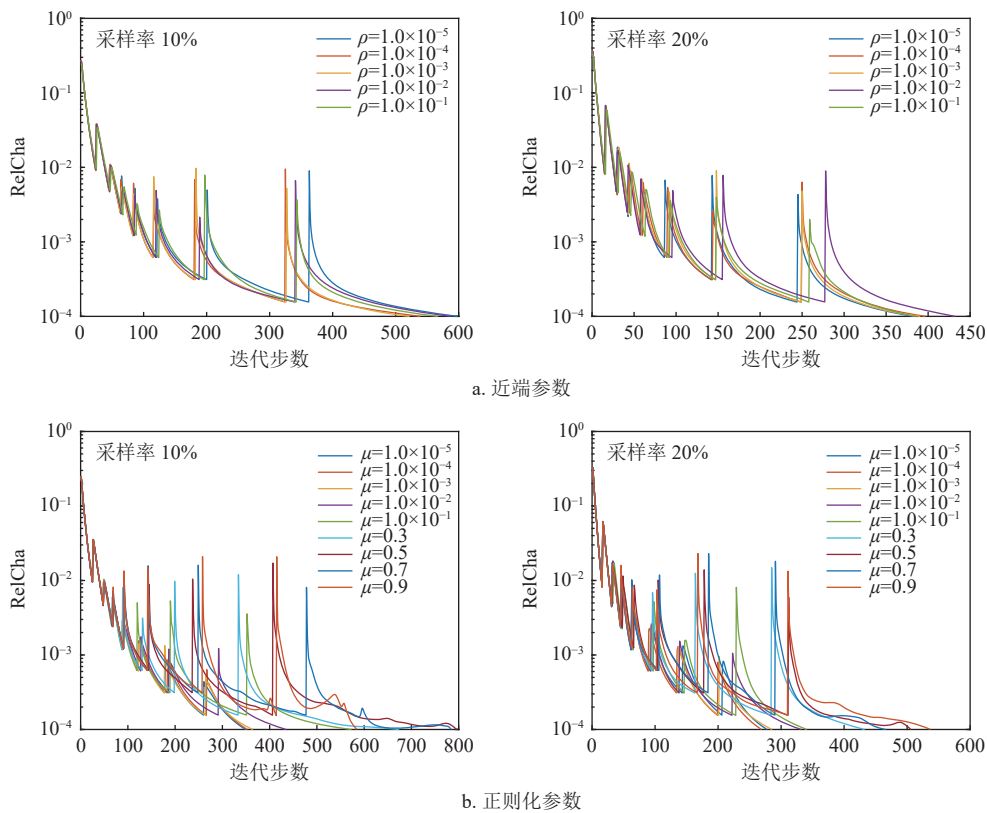


图 9 akiyo 的 RelCha 随迭代次数在不同参数不同采样率上的变化趋势

4 结束语

本文针对全连接张量网络 (FCTN) 分解方法对初始秩严重依赖的问题，提出了一种通过 Frobenius 范数对因子张量进行正则化的方法。因子张量的 Frobenius 范数正则具有类似于核范数的低秩增强效果，且无须依赖奇异值分解运算。为求解该模型，设计了一种基于近端交替最小化策略的优化算法。在多个数据集及不同采样率下的实验结果表明，本文方法相较于 FCTN 方法对初始秩具有更强的鲁棒性。此外，在重建性能方面，本方法在定量和定性指标上均比现有先进方法更具竞争力。

参考文献

- [1] LUO Y, ZHAO X, LI Z, et al. Low-rank tensor function representation for multidimensional data recovery[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2024, 46: 3351-3369.
- [2] JI T Y, ZHAO X L, SUN D L. Low-rank tensor completion method for implicitly low-rank visual data[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 1162-1166.
- [3] KOLDA T G, BADER B W. Tensor decompositions and applications[J]. *SIAM Review*, 2009, 51: 455-500.
- [4] CHE M, WEI Y, YAN H. An efficient randomized algorithm for computing the approximate tucker decomposition[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, 88: 1-29.
- [5] BAI M, ZHANG X, NI G, et al. An adaptive correction approach for tensor completion[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2016, 9: 1298-1323.
- [6] LUO Y, ZHAO X, MENG D. Revisiting nonlocal self-similarity from continuous representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2025, 47(1): 450-468.
- [7] LU C, FENG J, CHEN Y, et al. Tensor robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank tensors via convex optimization[J]. *IEEE Computer Society*, 2017, DOI:10.1109/CVPR.2016.567.
- [8] JIANG Q, ZHAO X L, LIN J, et al. Superpixel-based robust tensor low-rank approximation for multimedia data recovery[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2023, 277: 110812.
- [9] OSELEDETS I V. Tensor-train decomposition[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, 33: 2295-2317.
- [10] YUAN L, LI C, MANDIC D, et al. Tensor ring decomposition with rank minimization on latent space: An efficient approach for tensor completion[EB/OL]. [2024-10-11]. <https://arxiv.org/pdf/1809.02288>.
- [11] LIU J, MUSIALSKI P, WONKA P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35: 1716-1730.

- Intelligence*, 2013, 35: 208-220.
- [12] ZHANG X. A nonconvex relaxation approach to low-rank tensor completion[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 30: 1659-1671.
- [13] ACAR E, DUNLAVY D M, KOLDA T G, et al. Scalable tensor factorizations with missing data[C]//SIAM International Conference on Data Mining. [S.l.]: SIAM, 2010: 701-712.
- [14] ACAR E, DUNLAVY D M, KOLDA T G, et al. Scalable tensor factorizations for incomplete data[J]. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2011, 106: 41-56.
- [15] XUE J, ZHAO Y, HUANG S, et al. Multilayer sparsity-based tensor decomposition for low-rank tensor completion[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, 33(11): 6916-6930.
- [16] LIU Y, LONG Z, HUANG H, et al. Low CP rank and tucker rank tensor completion for estimating missing components in image data[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2020, 30: 944-954.
- [17] HILLAR C J, LIM L H. Most tensor problems are NP-hard[J]. *Journal of the ACM*, 2013, 60: 45.
- [18] SHI C, HUANG Z, WAN L, et al. Low-rank tensor completion based on log-det rank approximation and matrix factorization[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 80: 1888-1912.
- [19] CAO W, WANG Y, YANG C, et al. Folded-concave penalization approaches to tensor completion[J]. *Neurocomputing*, 2015, 152: 261-273.
- [20] XU Y, HAO R, YIN W, et al. Parallel matrix factorization for low-rank tensor completion[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2015, 9: 601-624.
- [21] XU Z, LV Z, CHU B, et al. Fast autoregressive tensor decomposition for online real-time traffic flow prediction[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2023, 282: 111125.
- [22] IMAIZUMI M, MAEHARA T, HAYASHI K. On tensor train rank minimization: Statistical efficiency and scalable algorithm[C]//The 31st Conference on Neural Information Processing Systems Foundation. [S.l.]: ACM, 2017: 3933-3942.
- [23] BIGONI D, ENGSIG-KARUP A P, MARZOUK Y M. Spectral tensor-train decomposition[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2016, 38: A2405-A2439.
- [24] LU C, FENG J, CHEN Y, et al. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, 42: 925-938.
- [25] DING M, HUANG T Z, JI T Y, et al. Low-rank tensor completion using matrix factorization based on tensor train rank and total variation[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 81: 941-964.
- [26] BENGUA J A, PHIEN H N, TUAN H D, et al. Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26: 2466-2479.
- [27] ZHAO Q, SUGIYAMA M, YUAN L, et al. Learning efficient tensor representations with ring-structured networks[C]//2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. [S.l.]: IEEE, 2019: 8608-8612.
- [28] WANG W, AGGARWAL V, AERON S. Efficient low rank tensor ring completion[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. [S.l.]: IEEE, 2017: 5698-5706.
- [29] YUAN L, LI C, MANDIC D, et al. Tensor ring decomposition with rank minimization on latent space: An efficient approach for tensor completion[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. [S.l.]: AAAI, 2019, 33: 9151-9158.
- [30] YU J, LI C, ZHAO Q, et al. Tensor-ring nuclear norm minimization and application for visual: Data completion[C]//2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. [S.l.]: IEEE, 2019: 3142-3146.
- [31] HUANG H, LIU Y, LIU J, et al. Provable tensor ring completion[J]. *Signal Processing*, 2020, 171: 107486.
- [32] ZHENG Y B, HUANG T Z, ZHAO X L, et al. Fully-connected tensor network decomposition and its application to higher-order tensor completion[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. [S.l.]: AAAI, 2021, 35: 11071-11078.
- [33] ZHENG Y B, ZHAO X L, ZENG J, et al. SVDinsTN: A tensor network paradigm for efficient structure search from regularized modeling perspective[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. [S.l.]: IEEE, 2024: 26254-26263.
- [34] ZHENG W J, ZHAO X L, ZHENG Y B, et al. Spatial-spectral-temporal connective tensor network decomposition for thick cloud removal[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2023, 199: 182-194.
- [35] ZHANG Z, AERON S. Exact tensor completion using t-SVD[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65: 1511-1526.
- [36] MIAN A, HARTLEY R. Hyperspectral video restoration using optical flow and sparse coding[J]. *Optics Express*, 2012, 20: 10658-10673.