

引用格式: 密铁宾, 冯密宇, 邵睿初, 等. 集群天线阵列: 从确定性到随机建模 [J]. 电子科技大学学报, 2026, 55(1): 65-76.
MI T B, FENG M Y, SHAO R C, et al. Swarm antenna arrays: From deterministic to stochastic modeling[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2026, 55(1): 65-76.



集群天线阵列: 从确定性到随机建模

密铁宾^{1*}, 冯密宇¹, 邵睿初¹, 曾操², 邱才明¹

(1. 华中科技大学电子信息与通信学院, 武汉 430074; 2. 西安电子科技大学雷达信号处理全国重点实验室, 西安 710071)

摘要: 集群天线阵列由部署于无人平台的分布式天线单元构成, 为无线感知与通信提供了前所未有的灵活性与环境适应性。然而, 分布式架构及无人平台位置的随机扰动削弱了多天线的协同增益, 对实现相干信号合成构成了严峻挑战。集群天线的空间拓扑结构、平台的位置扰动以及天线规模对信号聚合性能的影响机理尚不明确。该文从确定性与随机性双重视角出发, 探究集群天线阵列实现波束赋形的可行性。首先, 针对多线性形式的集群天线阵列结构, 构建了理论分析框架, 推导了该类天线拓扑在波束合成过程中产生栅瓣的充要条件。对于双线性天线阵列, 在不引入栅瓣的前提下, 可放宽经典的半波长间距约束。该结论突破了传统均匀线性阵列设计中关于栅瓣抑制必须满足半波长间距的固有准则。随后, 系统研究了天线位置扰动对波束赋形性能的影响。结果表明, 天线的位置扰动将导致主瓣增益下降, 主瓣增益的衰减无法通过单纯增加天线规模予以有效补偿; 相反, 增大天线规模的主要作用在于抑制旁瓣电平的波动方差, 提升波束方向图的稳定性。最后, 基于欧几里得随机矩阵的谱分析方法, 研究了大规模无序天线阵列中涌现的确定性行为。当天线位置服从某种完全随机的空间分布时, 其对应的欧几里得随机矩阵经验谱分布在天线数量趋于无穷时, 几乎必然收敛于一个确定性极限。该结果揭示了无序天线阵列结构中蕴含的内在规律性, 为后续大规模无序天线阵列的建模与性能分析提供了必要的数学工具。

关键词: 集群天线阵列; 阵列方向图; 波束赋形; 相位补偿; 扰动; 欧几里得随机矩阵

中图分类号: TN958.92 文献标志码: A DOI: 10.12178/1001-0548.2025214

Swarm antenna arrays: From deterministic to stochastic modeling

MI Tiebin^{1*}, FENG Miyu¹, SHAO Ruichu¹, ZENG Cao², and QIU Caiming¹

(1. School of Electronic Information and Communications, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Swarm antenna arrays, composed of spatially distributed antennas mounted on unmanned agents, offer substantial flexibility for wireless sensing and communication. However, their reconfigurable architecture, susceptibility to collisions, and inherently stochastic nature present significant challenges to achieving collaborative gain. This paper investigates the feasibility of achieving coherent beamforming in such systems from both deterministic and stochastic perspectives. First, a rigorous theoretical framework is developed to characterize the necessary and sufficient conditions for the emergence of grating lobes in multiple linear configurations and further show that for dual linear arrays, the classical half-wavelength spacing constraint can be safely relaxed without introducing spatial aliasing. Second, a theoretical analysis, supported by empirical validation, is presented and demonstrated that coherent gain can be approximately preserved under realistic positional perturbations. The proposed results reveal that spatial perturbations introduce measurable degradation in the main lobe, an effect that cannot be mitigated merely by increasing the number of antennas. Instead, the primary benefit of scaling lies in reducing the variance of perturbation-induced fluctuations. Finally, the emergent deterministic behavior of large-scale disordered arrays is examined by analyzing the spectral properties of the associated Euclidean random matrices. These results provide new theoretical foundations and practical design guidelines for enabling coherent functionality in swarm antenna arrays.

Key words: swarm antenna arrays; array pattern; beamforming; phase compensation; perturbation; Euclidean random matrix

收稿日期: 2025-10-30

基金项目: 国家自然科学基金 (12141107); 武汉市重点研发计划 (2024050702030100)

作者简介: 密铁宾, 博士, 主要从事无线通信、智能超表面、阵列信号处理与空间采样理论方面的研究。

*通信作者 E-mail: mitiebin@hust.edu.cn

无人平台凭借其固有的灵活性、机动性与环境适应能力,已成为无线感知与通信领域的变革性使能技术^[1-2]。近期研究表明,无人飞行器作为集感知与通信功能于一体的多功能平台展现出巨大潜力^[3-4]。借助其高机动性,无人飞行器可动态构建高质量的视距链路^[5],从而有效支撑高效数据中继^[6-7]、信道探测^[8-9]以及广域无线覆盖^[10]等关键任务。在无线感知方面,无人飞行器已被广泛应用于信源定位^[11-12]与无线环境地图构建^[13-14],其核心技术通常包括基于接收信号强度的指纹识别^[15]、到达时间估计^[16]以及到达角估计^[17]。在通信应用中,搭载基站的无人飞行器已在灾后应急通信、偏远地区临时覆盖等场景中得到广泛研究^[18-19]。

无人平台凭借其良好的经济性与操作简易性,易于以集群形式部署^[20-21]。在面向无线感知与通信的应用场景中,一种极具前景的天线系统范式是“集群天线阵列”(swarm antenna array)——即由多个无人平台各自搭载独立天线单元,协同构建大规模、空间分布式且可重构的天线阵列^[22-26]。该架构作为一种新型可重构天线系统,显著拓展了传统天线阵的空间自由度与功能边界。

根据应用场景与任务需求的差异,集群天线阵列的协同增益可从两个不同的理论视角进行研究。在面向通信的应用中,集群天线系统可被视为经典 MIMO 架构的扩展^[20, 23, 26]。该视角依托通信领域的研究理论工具,重点开展系统容量分析、信道估计与网络性能的评估。另一类方法聚焦天线阵列的物理本质,将集群天线阵列视为一个在电磁意义上紧密耦合的整体系统,着重研究波长尺度下的阵内相干增益^[22, 24-25, 27]。在此框架下,通常结合电磁理论、阵列信号处理与统计建模解析等方法,系统探究集群拓扑结构对协同增益的影响。相较于第一类方法,该视角更为底层,基于第一性原理的研究范式,利用基础电磁与信号理论^[28-29],直接分析空间拓扑对天线阵列核心性能表征——辐射方向图的影响,从而深化对大规模集群天线阵列中确定性行为的理解。

本文研究集群天线阵列实现相干波束赋形的可行性。在传统阵列处理理论中,对于均匀线阵或面阵,存在一条基本设计准则——半波长间距约束,其核心作用是抑制栅瓣、防止空间谱的采样混叠^[30]。在集群天线的实际部署中,为降低无人平台间的碰撞风险,天线单元间距无法过小。由此引出一个基

础的尚未被充分研究的问题:能否在不引入栅瓣的前提下,放宽半波长间距约束?第二个问题源于天线单元的位置扰动。与传统位置固定且精确校准的阵列不同,集群天线阵列部署于可自由运动的无人平台,阵列拓扑具有不确定性。天线位置抖动会削弱相干信号的叠加性能,导致辐射方向图出现随机波动,波束赋形性能恶化。如何定量刻画位置不确定性对系统性能的影响,对集群天线阵列的鲁棒设计至关重要。此外,在某些应用场景中,无人平台在给定空间区域内呈随机分布,形成完全无序的阵列拓扑。当天线单元位置服从特定的随机分布(如均匀分布)时,尽管天线单元的空间位置具有完全随机性,其宏观统计特性(如相关矩阵的谱分布)却在天线数量趋于无穷时几乎必然收敛于某一确定性极限,呈现出显著的规律性。这一现象体现了大规模系统的核心优势:微观层面的随机性可诱导宏观层面有序性的涌现。该规律为大规模无序集群天线阵列的性能建模与理论分析提供了可用的数学工具。

本文主要研究内容如下。

1) 栅瓣存在的充分必要条件。针对多线性阵列拓扑结构,构建了严格的理论分析框架,系统推导了栅瓣出现的充要条件,并进一步给出了各线性子阵内部单元间距及其首单元相对位置的显式约束表达式。一个关键发现是:对于双线性阵列,在不引入空间混叠(即栅瓣)的前提下,经典半波长间距准则可放宽。该结果突破了传统均匀线阵设计中“单元间距不超过半波长”的固有约束,为构建拓扑更灵活的集群天线提供了理论支撑。

2) 空间扰动导致波动的统计分析。通过理论分析证明了天线单元存在位置扰动的情况下,集群天线阵列的相干增益仍可近似保持。显式刻画了辐射方向图的波动与关键参数(如位置扰动方差、单元间距)之间的定量依赖关系。结果表明,空间位置扰动将导致主瓣增益出现损失,且该损失无法通过增加天线单元数量予以补偿;阵列规模扩大的收益在于有效抑制由扰动引起的旁瓣电平波动的方差,提升波束赋形的稳定性。

3) 大规模无序天线阵列涌现的确定性行为。针对大规模无序的天线阵列,本文通过分析与无线信道关联的欧几里得随机矩阵,证明了当天线单元在给定三维空间区域内服从均匀随机分布时,其特征值的经验谱分布在天线数量趋于无穷时几乎必然

收敛于某一确定性极限谱。该结果揭示了尽管天线单元在微观层面具有完全的空间随机性, 阵列在宏观尺度上涌现出了稳定的统计有序性。这一涌现规律为大规模无序天线阵列的建模和分析提供了可用的数学工具与理论基础。

1 波动方程与格林函数

考虑一个理想点源, 以各向同性方式均匀辐射能量。在此情形下, 描述波传播的三维波动方程可简化为仅依赖于径向距离的一维形式^[31]:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) \quad (1)$$

式中, r 表示场点到源点的距离; c 为波在介质中的传播速度; 波函数记为 $\psi(r; t)$, 显式体现对空间变量 r 和时间变量 t 的依赖关系。式 (1) 的解为:

$$\psi(r; t) = \frac{f(ct - r)}{r}$$

该解描述一个以恒定速度 c 从源向外传播的球面波, 其波形由任意函数 f 决定。对于单频谐振波, 波函数取复指数形式:

$$\psi(r; t) = \frac{E_0}{r} e^{j(\Omega t - 2\pi r/\lambda)} = \frac{e^{-j2\pi r/\lambda}}{r} E_0 e^{j\Omega t} \quad (2)$$

式中, E_0 表示源的振幅。

由式 (2) 可见, 谐振球面波可分解为时间因子 $e^{j\Omega t}$ 与空间传播项 $\frac{e^{-j2\pi r/\lambda}}{r}$ 两部分。其中, 空间项 (相差一个常数因子) 为自由空间中亥姆霍兹方程的格林函数。众所周知, 自由空间非齐次亥姆霍兹方程的基本解 (即格林函数) 具有如下形式:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-j2\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|/\lambda}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (3)$$

式中, $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$ 表示观测点 \mathbf{r} 与源 \mathbf{r}' 之间的欧氏距离。格林函数刻画了单位复振幅点源在自由空间中任意点所激发的场。

2 集群天线阵列相干波束赋形的确定性模型

本文重点探索集群天线阵列实现相干波束赋形的可行性。为聚焦核心机理, 首先考虑简化场景: 假设所有天线单元与目标均位于同一平面, 如图 1 所示。该假设不失一般性, 因其完整保留了波束赋形的关键机理——正如均匀线阵可视为均匀面阵在单一维度上的投影, 二维集群天线阵列亦能有效表征三维阵列的主要特性。

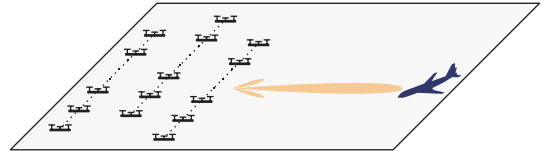


图1 二维集群天线阵列

2.1 远场区域中的协同波束赋形

根据图 2 所示的几何关系, 第 n 个天线单元与目标之间的距离 r_n 可表示为:

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{(r \sin \theta - x_n)^2 + (r \cos \theta - y_n)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 - 2rx_n \sin \theta - 2ry_n \cos \theta + x_n^2 + y_n^2} = \\ &= r \sqrt{1 - 2 \frac{x_n \sin \theta + y_n \cos \theta}{r} + \frac{x_n^2 + y_n^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

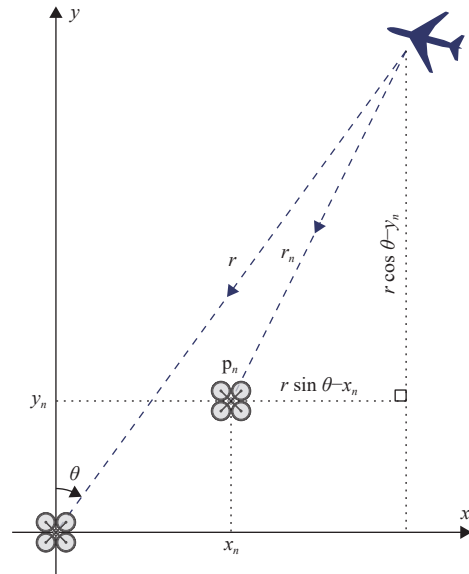


图2 天线与目标间的几何关系示意图

在远场条件下, 满足 $x_n \sin \theta + y_n \cos \theta \ll r$, 即 $(x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r \ll 1$ 。此时, 利用泰勒展开 $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$, 并忽略高阶项, 可得:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 2 \frac{x_n \sin \theta + y_n \cos \theta}{r} + \frac{x_n^2 + y_n^2}{r^2}} &\approx \\ 1 - \frac{x_n \sin \theta + y_n \cos \theta}{r} + \frac{x_n^2 + y_n^2}{2r^2} &\approx \\ 1 - \frac{x_n \sin \theta + y_n \cos \theta}{r} & \quad (5) \end{aligned}$$

将式 (5) 代入式 (4), 最终得到 r_n 的远场近似表达式:

$$r_n \approx r - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)$$

当波束在远场区域进行相干叠加时, 式 (2) 与式 (3) 中由 $1/r$ 项所表征的幅度衰减在各天线单元近

似相等, 可视为常数。令 w_n 表示施加于第 n 个天线单元的权重, 那么叠加波束在方向 θ 的归一化响应可表示为:

$$f_{\mathbf{w}}(\theta) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N w_n e^{j2\pi[x_n \sin\theta + y_n \cos\theta]/\lambda} \quad (6)$$

式中, 函数 $f_{\mathbf{w}}(\cdot)$ 的下标 \mathbf{w} 表示波束方向图由该权重向量确定, 归一化因子 $1/\sum_{n=1}^N |w_n|$ 确保对任意方向 θ , 均有 $|f_{\mathbf{w}}(\theta)| \leq 1$ 。

如果将权重设置为:

$$w_n = |w_n| e^{-j2\pi[x_n \sin\theta_s + y_n \cos\theta_s]/\lambda} \quad (7)$$

则阵列在方向 θ_s 处的归一化响应满足 $f_{\mathbf{w}}(\theta_s) = 1$, 表明波束主瓣指向 θ_s 。其物理本质在于: 该权重通过引入与天线单元位置相关的共轭相位, 有效补偿了各天线单元因空间分布不同导致的在 θ_s 方向产生的传播相位差, 从而实现叠加。一种被广泛采用的权重是令所有单元等幅激励, 即 $|w_n| = 1$, 此时权重简化为:

$$w_n = e^{-j2\pi[x_n \sin\theta_s + y_n \cos\theta_s]/\lambda} \quad (8)$$

尽管存在其他权重设计策略 (如基于优化准则或自适应波束形成的算法), 鉴于相位差补偿方法形式简洁便于分析, 本文后续的分析将采用此方案。

2.2 多线性阵列拓扑与栅瓣存在的充要条件

作为线阵的自然推广, 多线性阵列拓扑是集群天线阵列最具代表性的构型之一。在此拓扑中, 天线单元沿若干直线排列。尽管结构简单, 多线性阵列仍能有效反映波束扫描能力与方向图合成的关键特性。多线性阵列拓扑为分析更复杂集群天线系统提供了重要的理论基础和分析范式。

在均匀线阵中, 抑制栅瓣是一项基本设计约束。栅瓣源于波前在空间上的周期性采样, 表现为方向图中非期望的极大值。旁瓣会引入角度模糊, 并削弱主瓣的能量集中度, 显著劣化阵列的方向性性能。为避免栅瓣, 经典设计准则要求相邻单元间距不超过半波长, 即 $d \leq \lambda/2$ 。本文研究多线性阵列构型下栅瓣存在的充要条件。

定义 1 栅瓣 设 $f_{\mathbf{w}}(\cdot)$ 为归一化波束方向图函数, 满足 $|f_{\mathbf{w}}(\theta)| \leq 1$ 对所有 θ 都成立, 存在 θ_s 使得 $|f_{\mathbf{w}}(\theta_s)| = 1$ 。若存在 $\theta_g \neq \theta_s$ (模 2π) 使得:

$$|f_{\mathbf{w}}(\theta_g)| = 1$$

则称方向图 $f_{\mathbf{w}}(\cdot)$ 在 θ_g 处存在栅瓣。更一般地, 对于某个区间 (θ_1, θ_2) , 若存在非平凡映射 $\mathfrak{M}(\cdot)$,

使得对所有的 \mathbf{w} 及任意 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ 满足:

$$f_{\mathbf{w}}(\theta) = f_{\mathbf{w}}(\mathfrak{M}(\theta))$$

则称 $f_{\mathbf{w}}(\cdot)$ 对区间 (θ_1, θ_2) 呈现周期性, $\mathfrak{M}(\cdot)$ 称为周期映射。如果 $\theta_s \in (\theta_1, \theta_2)$ 并满足 $|f_{\mathbf{w}}(\theta_s)| = 1$, 那么该方向图在区间 $(\mathfrak{M}(\theta_1), \mathfrak{M}(\theta_2))$ 内同时存在栅瓣。

对于图 3 所示的多线性阵列拓扑, 式 (6) 中的波束方向图可以简化为:

$$f_{\mathbf{w}}(\theta) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N_1} |w_{1,n}| + \dots + \sum_{n=1}^{N_M} |w_{M,n}|} \times \left(\sum_{n=1}^{N_1} w_{1,n} e^{j2\pi(n-1)d_1 \sin\theta/\lambda} + e^{j2\pi[x_{2,1} \sin\theta + y_{2,1} \cos\theta]/\lambda} \sum_{n=1}^{N_2} w_{2,n} e^{j2\pi(n-1)d_2 \sin\theta/\lambda} + \dots + e^{j2\pi[x_{M,1} \sin\theta + y_{M,1} \cos\theta]/\lambda} \sum_{n=1}^{N_M} w_{M,n} e^{j2\pi(n-1)d_M \sin\theta/\lambda} \right) \quad (9)$$

需要注意的是, 上式中的 $e^{j2\pi[x_{M,1} \sin\theta + y_{M,1} \cos\theta]}$ 项仅仅依赖于阵列首单元位置, 复指数函数 $e^{j2\pi(n-1)d_M \sin\theta/\lambda}$ 只与各子阵单元间距有关。

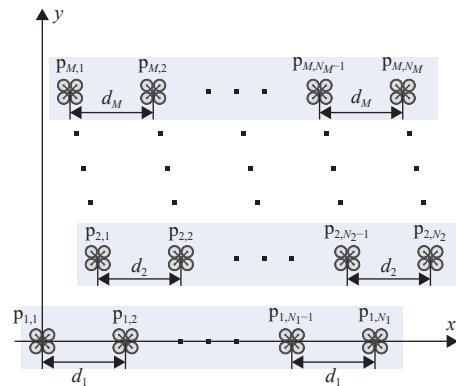


图 3 多线性阵列拓扑结构示意图

定理 1 多线性阵列的波束方向图 $f_{\mathbf{w}}(\cdot)$ 对区间 (θ_1, θ_2) 呈现周期性的充分必要条件是: 存在非平凡映射 $\mathfrak{M}(\cdot)$, 对所有 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ 和 $i = 1, 2, \dots, M$ 满足:

$$(C1) \quad \frac{d_i(\sin\theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta)))}{\lambda} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

以及对所有 $l = 2, 3, \dots, M$ 满足:

$$(C2) \quad \frac{x_{l,1}(\sin\theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta))) + y_{l,1}(\cos\theta - \cos(\mathfrak{M}(\theta)))}{\lambda} \in \mathbb{Z}$$

证明: 必要性证明如下。函数 $f_{\mathbf{w}}(\theta)$ 可表示为一系列复指数函数的加权和, 见式 (9)。假设存在

非平凡映射 $\mathfrak{M}(\theta) \neq \theta$, 使得对任意权向量 \mathbf{w} 均有 $f_{\mathbf{w}}(\theta) = f_{\mathbf{w}}(\mathfrak{M}(\theta))$, 各复指数基函数在 θ 与 $\mathfrak{M}(\theta)$ 处必须逐项相等。具体而言, 对 $n_1 = 1, 2, \dots, N_1$, 有:

$$e^{j2\pi(n_1-1)d_1 \sin \theta / \lambda} = e^{j2\pi(n_1-1)d_1 \sin(\mathfrak{M}(\theta)) / \lambda} \quad (10)$$

对 $l = 2, 3, \dots, M$ 及 $n_l = 1, 2, \dots, N_l$, 有:

$$e^{j2\pi(x_{l,1} \sin \theta + y_{l,1} \cos \theta) / \lambda} e^{j2\pi(n_l-1)d_l \sin \theta / \lambda} = e^{j2\pi(x_{l,1} \sin(\mathfrak{M}(\theta)) + y_{l,1} \cos(\mathfrak{M}(\theta))) / \lambda} e^{j2\pi(n_l-1)d_l \sin(\mathfrak{M}(\theta)) / \lambda} \quad (11)$$

当 $n_l = 1$ 时, 式(11)中与 $n_l - 1$ 相关的复指数因子均为1, 因此对 $l = 2, 3, \dots, M$ 可得:

$$e^{j2\pi(x_{l,1} \sin \theta + y_{l,1} \cos \theta) / \lambda} = e^{j2\pi(x_{l,1} \sin(\mathfrak{M}(\theta)) + y_{l,1} \cos(\mathfrak{M}(\theta))) / \lambda} \quad (12)$$

进一步, 对 $n_l = 2, 3, \dots, N_l$ 有:

$$e^{j2\pi(n_l-1)d_l \sin \theta / \lambda} = e^{j2\pi(n_l-1)d_l \sin(\mathfrak{M}(\theta)) / \lambda} \quad (13)$$

由式(10)与式(13)可知, 对每个 $i = 1, 2, \dots, M$,

$$\frac{d_i(\sin \theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta)))}{\lambda} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

同理, 由式(12)得, 对 $l = 2, 3, \dots, M$, 有:

$$\frac{x_{l,1}(\sin \theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta))) + y_{l,1}(\cos \theta - \cos(\mathfrak{M}(\theta)))}{\lambda} \in \mathbb{Z}$$

对于充分性, 若(C1)与(C2)成立, 根据复指数本身的周期性, 式(9)中对应 θ 与 $\mathfrak{M}(\theta)$ 的复指数项相等, 故对任意权向量 \mathbf{w} 均有:

$$f_{\mathbf{w}}(\theta) = f_{\mathbf{w}}(\mathfrak{M}(\theta))$$

条件(C1)规定了各子阵列内部单元间距必须满足的周期性要求, 而条件(C2)则约束了各子阵列首单元的相对位置。栅瓣的出现需同时满足(C1)与(C2)。条件(C1)进一步表明, 栅瓣存在的必要条件是任意两线阵单元间距之比 d_i/d_j 必须为有理数。换言之, 只要存在某对子阵列使得 d_i/d_j 为无理数, 就无法实现全局相位对齐, 这种阵列拓扑天然抑制了栅瓣的产生。

2.3 双线性阵列拓扑

为了深入理解定理1, 本文分析了一种由两个子阵列构成的双线性阵列拓扑结构, 且假设这两个子阵列具有相同的单元间距(即 $d_1 = d_2 = d$), 如图4所示。在此情形下, 条件(C1)与(C2)可简化为:

$$\frac{d}{\lambda}(\sin \theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta))) = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (14)$$

以及

$$\frac{x_{2,1}}{\lambda}(\sin \theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta))) + \frac{y_{2,1}}{\lambda}(\cos \theta - \cos(\mathfrak{M}(\theta))) = q \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

式中, $(x_{2,1}, y_{2,1})$ 表示第2个子阵列首单元相对于第1个子阵列首单元的位置坐标。

由式(14)可得:

$$\sin \theta - \sin(\mathfrak{M}(\theta)) = \frac{p}{d/\lambda}$$

同理, 由式(15)可得:

$$\cos \theta - \cos(\mathfrak{M}(\theta)) = \frac{qd/\lambda - px_{2,1}/\lambda}{(d/\lambda)(y_{2,1}/\lambda)}$$

将两式联立可得:

$$\left(\frac{p}{d/\lambda}\right)^2 + \left(\frac{qd/\lambda - px_{2,1}/\lambda}{(d/\lambda)(y_{2,1}/\lambda)}\right)^2 = 2 - 2\cos(\theta - \mathfrak{M}(\theta)) \quad (16)$$

利用式(16)可以得到非周期性波束方向图的一个充分条件。

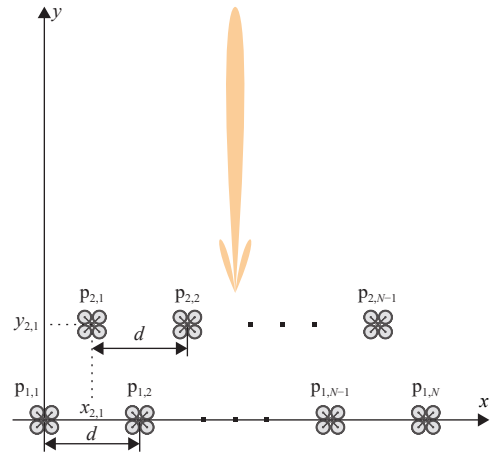


图4 双线性阵列拓扑结构示意图

定理2 给定两个具有相同单元间距 d 的线性子阵列构成的双线性集群天线阵列, 第2个子阵列的首单元相对于第1个子阵列首单元的位置为 $(x_{2,1}, y_{2,1})$ 。若对所有 $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 及 $q \in \mathbb{Z}$ 均满足:

$$(C3) \quad \left(\frac{p}{d/\lambda}\right)^2 + \left(\frac{qd/\lambda - px_{2,1}/\lambda}{(d/\lambda)(y_{2,1}/\lambda)}\right)^2 > 4$$

则该阵列的波束方向图是非周期的, 不存在栅瓣。

证明: 如果条件(C3)成立, 那么一定不存在映射 $\mathfrak{M}(\theta)$ 满足式(16)。即不存在映射 $\mathfrak{M}(\theta)$ 能够同时满足式(14)与式(15)。因此, 波束方向图不具有周期性, 栅瓣亦不可能出现。需要指出的是, 经典的半波长间距准则亦可由条件(C3)推出。从(C3)的第一个平方项可知, 一旦 $d < \lambda/2$, 无论坐标 $(x_{2,1}, y_{2,1})$ 取何值, 条件(C3)均自动成立。也就是说, 当子阵列单元间距小于半波长时, 无论双线性阵列的间距是多少, 波束方向图均无周期性, 栅瓣被天然抑制。这是经典均匀线阵采用 $d \leq \lambda/2$ 间距以避免栅瓣的理论在多子阵列场景下的自然推广。

定理2的核心启示在于, 在双线性集群天线阵列中, 经典的“半波长”间距准则并非抑制栅瓣的必要条件。条件(C3)表明, 即使单元间距大于半

波长, 只要子阵列的相对位置 $(x_{2,1}, y_{2,1})$ 经适当选取, 仍可有效避免栅瓣的产生。该结论显著拓展了集群天线阵列拓扑的设计空间。

为了验证半波长限制的可突破性, 取单元间距 $d=0.8\lambda$, 第二列子阵首单元的横向坐标为 $x_{2,1}=0.4\lambda$, 若其纵坐标满足:

$$y_{2,1} < \frac{1}{\sqrt{9.75}} \approx 0.3203$$

则条件 (C3) 对任意 $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 及 $q \in \mathbb{Z}$ 均成立。为便于说明, 取 $y_{2,1}=0.32\lambda$ 。此时, 第二个子阵列首单元 $p_{2,1}$ 与第一个子阵列首单元 $p_{1,1}$ 之间的欧氏距离约为 0.5122λ , 已超过半波长, 如图 5 所示。

为验证该阵列拓扑下波束方向图无栅瓣, 进行如下数值实验: 第一线阵包含 50 个天线单元, 第二线阵包含 49 个单元; 阵列权重按式 (8) 选取, 扫描角 θ_s 在区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内变化。对应的扫描波束方向图如图 6 所示。从图中可见整个扫描范围内未出现栅瓣。尽管在某些扫描角度下存在较高的旁瓣电平, 但这些旁瓣并不满足栅瓣的定义 (即方向图在非扫描方向上出现与主瓣幅度相当的周期性重复), 因此不属于栅瓣。

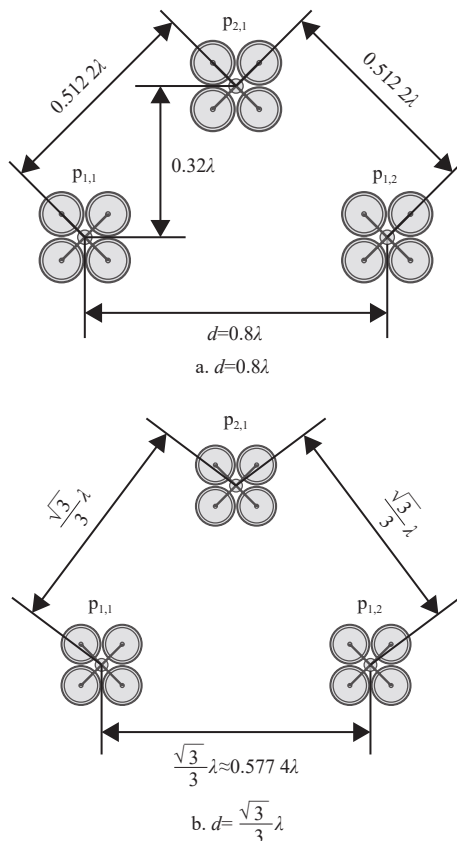


图 5 经典半波长间距约束的放宽

如果将两子阵列首单元约束为正三角构型, 如图 5b 所示, 取 $d = \sqrt{3}\lambda/3 \approx 0.5774\lambda$, $x_{2,1} = \sqrt{3}\lambda/6 \approx$

0.2887λ , $y_{2,1}=0.5\lambda$ 。对于任意 $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 与 $q \in \mathbb{Z}$, 均有:

$$\left(\frac{p}{d/\lambda}\right)^2 + \left(\frac{qd/\lambda - px_{2,1}/\lambda}{(d/\lambda)(y_{2,1}/\lambda)}\right)^2 = 3p^2 + (2q-p)^2 \geq 4$$

等号仅在 $p=1, q=0$ 或 $p=1, q=1$ 时成立。对应的扫描波束方向图示于图 7, 可见整个扫描范围内无栅瓣。该例进一步说明, 在双线性阵列拓扑中, 经典半波长限制不再是抑制栅瓣的必要条件, 可以适当放宽。

需要进一步指出的是, 定理 1 与定理 2 并未对映射 $\mathfrak{M}(\cdot)$ 施加任何限制。在实际中, 角域通常被限定在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 范围内。这意味着, 对于某些阵列拓扑, 即使条件 (C3) 不满足, 所产生的栅瓣也可能位于感兴趣范围之外, 从而在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 观测不到。对这一现象的深入分析超出本文的研究范围, 此处仅通过一个示例予以说明。

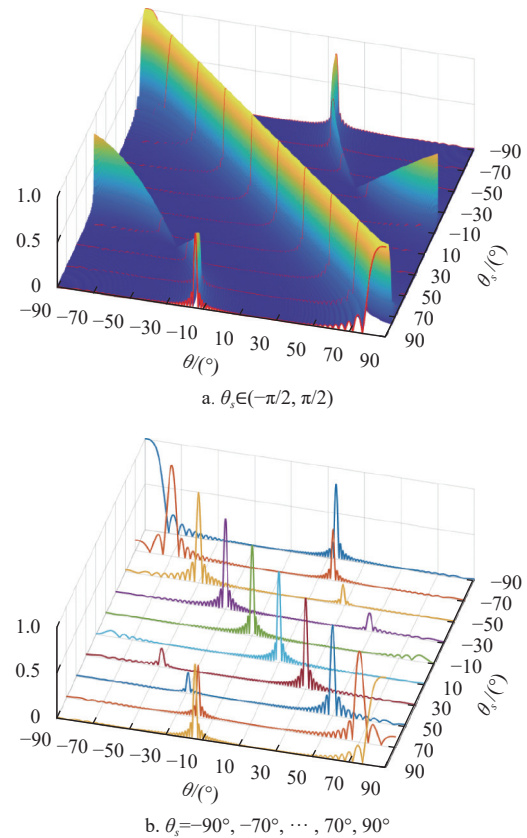
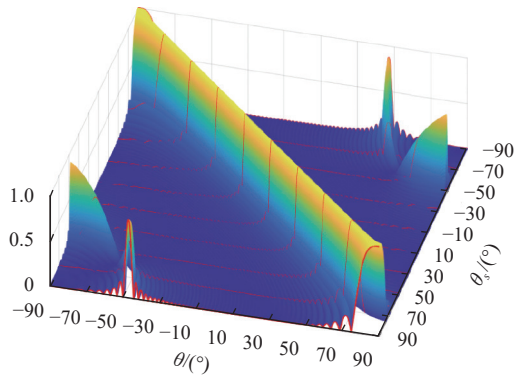
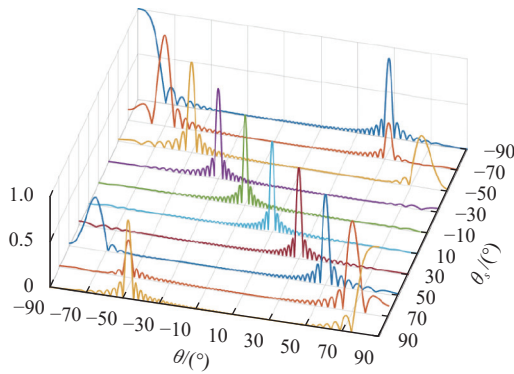
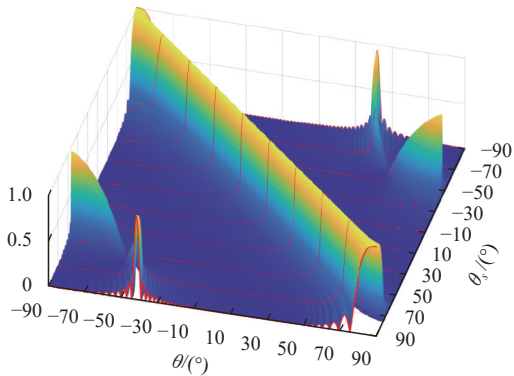
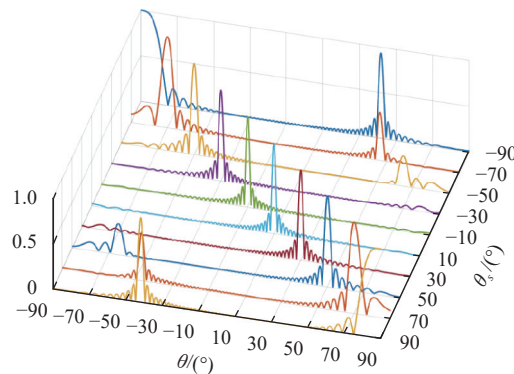


图 6 双线性阵列波束方向图, $d=0.8\lambda$, $x_{2,1}=0.4\lambda$ 与 $y_{2,1}=0.32\lambda$

依然保持正三角拓扑, 但将边长增至 $d=0.6\lambda > \sqrt{3}\lambda/3$ (同步放大 $x_{2,1}$ 与 $y_{2,1}$ 确保几何相似性), 对 $p=1, q=0$ 及 $p=1, q=1$, (C3) 不再成立。然而, 图 8 的数值结果表明, 在感兴趣的角域视场 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内仍未观测到栅瓣。这一现象说明, 即使 (C3) 不满足, 只要潜在的栅瓣方向落在感兴趣视场之外, 仍可保持无栅瓣特性。

a. $\theta_s \in (-\pi/2, \pi/2)$ b. $\theta_s = -90^\circ, -70^\circ, \dots, 70^\circ, 90^\circ$ 图7 双线性阵列波束方向图, $d = \sqrt{3}\lambda/3$ 、 $x_{2,1} = \sqrt{3}\lambda/6$ 与 $y_{2,1} = 0.5\lambda$ a. $\theta_s \in (-\pi/2, \pi/2)$ b. $\theta_s = -90^\circ, -70^\circ, \dots, 70^\circ, 90^\circ$ 图8 双线性阵列波束方向图, 首单元呈正三角构型, $d = 0.6\lambda$

3 天线位置扰动引发的波束方向图波动

在集群天线阵列中, 由机械振动与环境因素引起的天线单元位置扰动是另一项不可忽视的挑战。此类位置偏差会破坏信号的相干叠加, 进而在辐射方向图中引入随机波动。本节将系统分析此类扰动对波束方向图的影响。

考虑扰动情况下的方向图函数 $\tilde{f}_w(\theta)$, 其表达式为:

$$\tilde{f}_w(\theta) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N w_n e^{j2\pi[(x_n + \Delta x_n) \sin \theta + (y_n + \Delta y_n) \cos \theta]/\lambda} \quad (17)$$

一个合理的假设是扰动 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T$ 服从某一特定的概率分布。为便于分析, 采用式(7)所定义的相位补偿权重设计, 该设计可确保在无扰动情况下, 阵列响应在指向方向 θ_s 的实现相干叠加。在此权重选择下, $\theta = \theta_s$ 处的受扰响应可简化为:

$$\tilde{f}_w(\theta_s) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N |w_n| e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda} \quad (18)$$

下面将分析 $\tilde{f}_w(\theta_s)$ 的统计特性。

定理3 设扰动 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T$ 服从二元高斯分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma_n)$, 那么扰动方向图 $\tilde{f}_w(\cdot)$ 在指向方向 θ_s 处的期望与方差分别为:

$$E[\tilde{f}_w(\theta_s)] = \frac{1}{\sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N |w_n| \times \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}\right) \quad (19)$$

$$\text{Var}[\tilde{f}_w(\theta_s)] = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^N |w_n|\right)^2} \sum_{n=1}^N |w_n|^2 \times \left(1 - \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}\right)\right) \quad (20)$$

证明: 首先计算复指数项 $e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}$ 的期望。该期望为随机向量 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T$ 的特征函数。由于 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_n)$, 根据多元高斯分布的特征函数, 可得:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}\right] = \\ & \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

将上述结果代入式 (18), 并利用期望的线性, 即可得到式 (19) 所示的期望。

下面计算 $\tilde{f}_w(\theta_s)$ 的方差。由于各天线单元的位置扰动相互独立, 且权重为确定性常数, 由方差的可加性可得:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{f}_w(\theta_s)] &= \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^N |w_n|^2\right)^2} \sum_{n=1}^N |w_n|^2 \times \\ & \text{Var}\left[e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}\right] \end{aligned} \quad (22)$$

根据:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}\right] &= \mathbb{E}\left[\left|e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}\right|^2\right] - \\ & \left|\mathbb{E}\left[e^{j2\pi(\Delta x_n \sin \theta_s + \Delta y_n \cos \theta_s)/\lambda}\right]\right|^2 = \\ & 1 - \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

即可得到式 (20), 证明完毕。

下面研究阵列方向图在非指向方向的统计特性。与指向方向信号的相干叠加不同, 非指向方向上的响应呈现出更复杂的模式。

对于式 (17) 中的复指数项, 如果位置扰动 Δx_n 与 Δy_n 足够小, 可以利用一阶泰勒展开对该项进行线性近似, 那么:

$$\tilde{f}_w(\theta) \approx f_w(\theta) + \underbrace{\frac{j2\pi}{\lambda \sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N (w_n e^{j2\pi[x_n \sin \theta + y_n \cos \theta]/\lambda}) (\sin \theta \Delta x_n + \cos \theta \Delta y_n)}_{\Delta f_w(\theta)} \quad (24)$$

$$\mathbb{E}[\Delta f_w(\theta)] = \mathbb{E}\left[\frac{j2\pi}{\lambda \sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N (w_n e^{j2\pi[x_n \sin \theta + y_n \cos \theta]/\lambda}) (\sin \theta \Delta x_n + \cos \theta \Delta y_n)\right] = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta f_w(\theta)] &= \text{Var}\left[\frac{j2\pi}{\lambda \sum_{n=1}^N |w_n|} \sum_{n=1}^N (w_n e^{j2\pi[x_n \sin \theta + y_n \cos \theta]/\lambda}) (\sin \theta \Delta x_n + \cos \theta \Delta y_n)\right] = \\ & \frac{(2\pi)^2 \sum_{n=1}^N |w_n|^2 \text{Var}[\sin \theta \Delta x_n + \cos \theta \Delta y_n]}{\lambda^2 \left(\sum_{n=1}^N |w_n|\right)^2} = \frac{(2\pi)^2 \sum_{n=1}^N |w_n|^2 \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}{\lambda^2 \left(\sum_{n=1}^N |w_n|\right)^2} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & e^{j2\pi[(x+\Delta x) \sin \theta + (y+\Delta y) \cos \theta]/\lambda} \approx e^{j2\pi[x \sin \theta + y \cos \theta]/\lambda} \\ & (1 + j2\pi/\lambda \sin \theta \Delta x + j2\pi/\lambda \cos \theta \Delta y) \end{aligned}$$

上述一阶近似代入式 (17), 得到阵列响应的扰动模型 $\tilde{f}_w(\theta) \approx f_w(\theta) + \Delta f_w(\theta)$, 如式 (24) 所示, 其中 $f_w(\theta)$ 表示理想 (无扰动) 阵列方向图, $\Delta f_w(\theta)$ 表征由空间位置扰动引入的方向图偏差。该模型的关键优势在于将无扰动响应与扰动引起的失真项显式解耦, 便于对性能损失进行解析分析。定理 4 给出了偏差项 $\Delta f_w(\theta)$ 的统计特性。

定理 4 设各天线单元的位置扰动满足 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_n)$ 。当扰动足够小, 对任意 $\theta \neq \theta_s$, 由位置扰动引起的方向图偏差 $\Delta f_w(\theta)$ 近似服从零均值复高斯分布, 其方差为:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta f_w(\theta)] &= \\ & \frac{(2\pi)^2 \sum_{n=1}^N |w_n|^2 \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Sigma_n \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}{\lambda^2 \left(\sum_{n=1}^N |w_n|\right)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

证明: 由式 (24) 可知, 对于任意 $\theta \neq \theta_s$, 方向图偏差 $\Delta f_w(\theta)$ 是各单元位置扰动 Δx_n 与 Δy_n 的线性函数。由于 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_n)$, 其线性组合仍服从高斯分布。因此, $\Delta f_w(\theta)$ 为零均值复高斯随机变量。其均值为零可由式 (25) 直接得出。方差由独立高斯变量线性组合的方差可加性, 并结合式 (26) 的推导, 即可得到式 (23)。

为了直观阐述定理 3 与定理 4 的物理意义, 考虑如下场景, 采用式 (8) 所示的相位补偿策略, 即取 $|w_n| = 1 (n = 1, 2, \dots, N)$, 并假设各单元在 x 与 y 方向的位置扰动相互独立。在此条件下, 可得如下推论。

推论 1 设各天线单元的位置扰动满足 $[\Delta x_n, \Delta y_n]^T \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$, 且采用式 (8) 所示的相位补偿策略。则扰动方向图 $\tilde{f}_w(\cdot)$ 在指向方向 θ_s 处的期望与方差分别为:

$$E[\tilde{f}_w(\theta_s)] = \exp(-2\pi^2\sigma^2/\lambda^2) \quad (27)$$

$$\text{Var}[\tilde{f}_w(\theta_s)] = \frac{1}{N} (1 - \exp(-4\pi^2\sigma^2/\lambda^2)) \quad (28)$$

式中, N 为天线单元总数。

对非指向方向 $\theta \neq \theta_s$, 当扰动足够小, 方向图偏差 $\Delta f_w(\theta)$ 近似为零均值复高斯随机变量, 其方差为:

$$\text{Var}[\Delta f_w(\theta)] = \frac{(2\pi)^2}{N} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 \quad (29)$$

进一步, 其尾概率满足如下亚高斯型界:

$$P(|\Delta f_w(\theta)| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2 N}{2(2\pi)^2(\sigma/\lambda)^2}\right) \quad (30)$$

证明: 将条件 $|w_n| = 1 (n = 1, 2, \dots, N)$ 及 $\Sigma_n = \sigma^2 I$ 代入定理 3 与定理 4 中均值与方差表达式, 即可得到式 (27)~式 (29)。进一步地, 由于 $\Delta f_w(\theta)$ 为零均值复高斯随机变量, 式 (30) 可由复高斯变量的亚高斯性质导出。

定理 3、定理 4 与推论 1 的意义在于, 显式揭示了位置扰动对阵列方向图的影响机制, 特别是主瓣增益衰减与非指向方向响应偏差如何依赖于关键系统参数: 天线数 N 、波长 λ 、扰动强度 σ^2 以及权重。特别地, 式 (19) 与式 (27) 表明, 空间扰动会在指向方向 θ_s 上引起主瓣增益的确定性衰减; 该衰减主要由扰动强度 σ^2 决定, 并且无法通过增加天线单元数量予以补偿。相比之下, 扩大阵列规模的主要收益体现在方向图在抑制非指向方向 (如旁瓣区域) 波动的方差: 如式 (28) 与式 (29) 所示, 方向图波动的方差以 $1/N$ 的速率衰减。换言之, 随着阵列规模扩大, 方向图在非主瓣区域的统计行为趋于更加稳定。

为验证天线位置扰动对阵列方向图的影响, 本文对图 5b 所示的正三角形阵列拓扑结构进行了仿真。具体来说, 对于每个天线单元, 在 x 和 y 方向上分别引入独立的高斯位置扰动, 标准差均为 0.1λ 。仿真结果如图 9 所示, 尽管在整个扫描范围内方向图出现了随机波动, 但主瓣指向与方向图的

整体形态基本保持不变。

为验证天线单元数对阵列方向图的影响, 对 $N = 159, 199, 239, 279$ 这 4 种取值分别进行 500 次独立试验, 记录方向图的绝对误差 $|f_w(\theta) - \tilde{f}_w(\theta)|$ 并计算均值。平均误差如图 10 所示。结果表明, 随着单元数量增加, 非指向方向的随机波动显著减弱。值得注意的是, 在指向方向 $\theta_s = 0^\circ$ 处, 绝对误差水平基本保持不变, 并不随 N 增大而减小, 这与式 (27) 的理论预测一致, 进一步验证了指向方向的增益降低由扰动强度决定, 无法通过扩容阵列予以缓解。

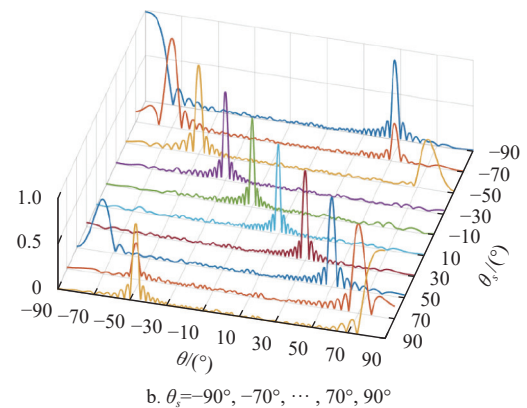
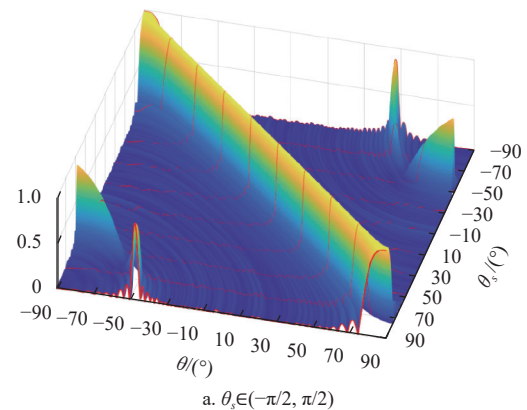


图 9 双线性阵列波束方向图, 首单元呈正三角构型, $d = \sqrt{3}\lambda/3$

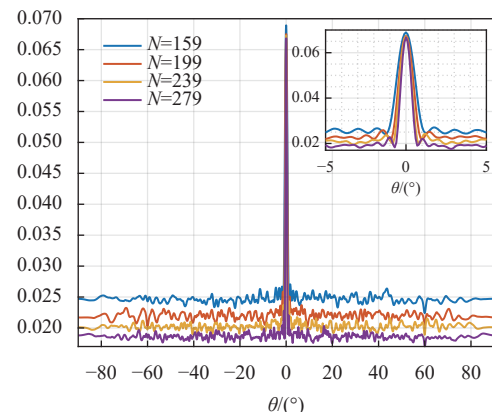


图 10 方向图绝对误差

4 无序天线阵列中的涌现确定性行为

本节探讨与大规模无序天线阵列相关的欧几里得随机矩阵所呈现的“渐近确定性行为”——这一特性尚未被广泛研究，却可能在通信与感知任务的性能分析中发挥重要的作用。在若干实际场景中，天线单元的位置在给定区域内随机分布，如图 11 所示。尽管天线位置微观上具有完全随机性，某些宏观统计量却展现出确定性规律，在阵列规模趋于无穷时几乎必然收敛于确定性极限。这一现象体现了大规模随机系统的典型特征——微观随机性孕育宏观有序性，此类涌现规律不仅揭示了无序系统的内在结构，也为大规模无序天线阵列的建模与性能分析提供了有效的数学工具。

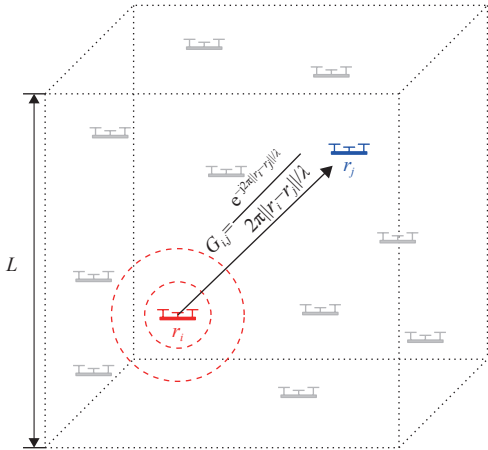


图 11 大规模无序天线阵列示意图： N 个天线单元均匀随机分布于边长为 L 的立方体

定义 2 欧几里得随机矩阵 设集群天线阵列由 N 个天线单元组成，其位置随机分布于三维正立方体 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ 内。各天线单元的位置 $\mathbf{r}_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 相互独立，且服从 \mathcal{V} 上的均匀分布。该阵列对应的欧几里得随机矩阵 $\mathbf{G}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 定义为：

$$G_N(i, j) = \begin{cases} \frac{\exp(-j2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda)}{-2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

对比式 (3) 可知，欧几里得随机矩阵的非对角元素与自由空间中的格林函数仅相差一个常数因子，因而可表征自由空间中的传播信道。换言之，该矩阵可视为阵列所在空间信道在离散位置上的采样矩阵。欧几里得随机矩阵可分解为实部与虚部。对任意 $i \neq j$ ，有：

$$G_N(i, j) = C_N(i, j) + jS_N(i, j) = \frac{\cos(-2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda)}{-2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda} + j \frac{\sin(-2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda)}{-2\pi\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|/\lambda}$$

一项关键的理论结果表明，在满足适当统计假设条件下，当天线单元数量 $N \rightarrow \infty$ 时，实部矩阵 C_N 与虚部矩阵 S_N 的经验谱分布几乎必然收敛于某一确定的极限分布。

定义 3 经验谱分布 设 $\mathbf{M}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 为 Hermitian 矩阵，其经验谱分布定义为：

$$\mu_{\mathbf{M}_N}(x) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{\lambda_i(\mathbf{M}_N) \leq x\}}$$

式中， $\lambda_1(\mathbf{M}_N) \leq \lambda_2(\mathbf{M}_N) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{M}_N)$ 表示 \mathbf{M}_N 的特征值； $I_{\{\cdot\}}$ 为指示函数。

在下述命题中，记 L 为立方体区域 \mathcal{V} 的边长，并定义天线密度为 $\rho = N/L^3$ 。

命题 1 设 S_N 为欧几里得随机矩阵 \mathbf{G}_N 的虚部，令 $\beta = 2.8N/(2\pi L/\lambda)^2$ 。若 $\beta < 1$ ，则当 $N \rightarrow \infty$ ， S_N 的经验谱分布几乎必然收敛于 Marčenko-Pastur 分布，其概率密度函数为：

$$d\mu(x) = \frac{1}{2\pi\beta x} \sqrt{(x-a)^+(b-x)^+}$$

式中， $a = (1 - \sqrt{\beta})^2$ ； $b = (1 + \sqrt{\beta})^2$ ； $a^+ = \max(0, a)$ 。当 $\beta > 1$ 时，Marčenko-Pastur 分布不再能准确刻画 S_N 的渐近行为。

对于实部矩阵 C_N ，在低密度极限 $\rho\lambda^3 \ll 1$ 且 $\beta \ll 1$ 时，其经验谱分布几乎必然收敛于以 0 为中心、半径为 $2\sqrt{\beta}$ 的 Wigner 半圆律，对应的密度函数为：

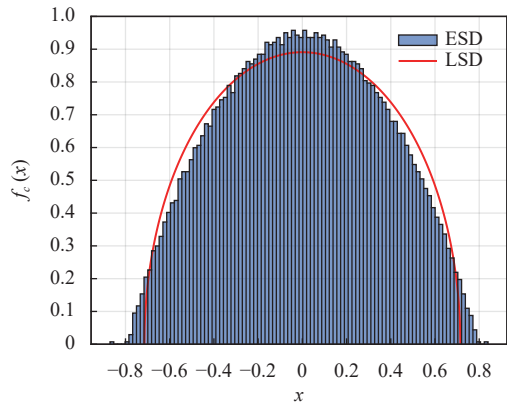
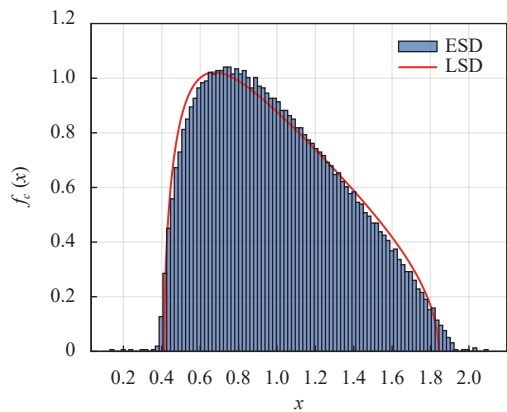
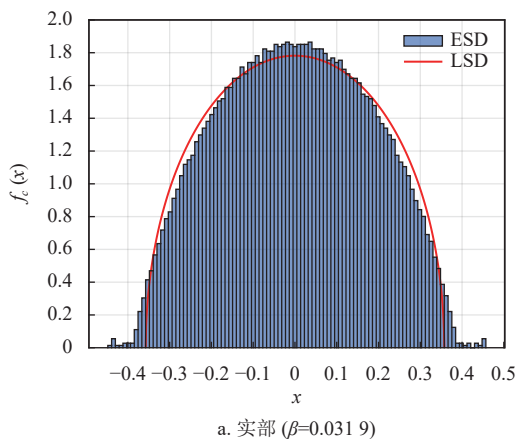
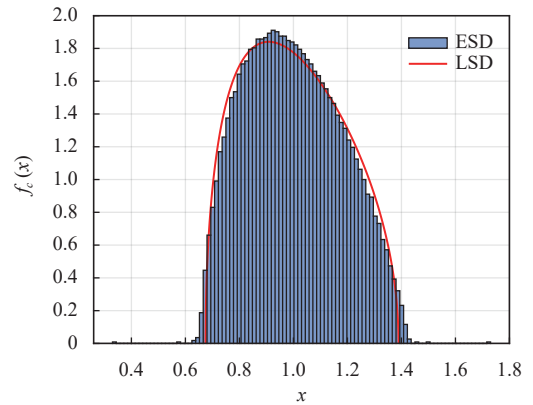
$$d\mu(x) = \frac{\sqrt{4\beta - x^2}}{2\pi\beta}$$

而在 $\rho\lambda^3 \ll 1$ 但 $\beta \gg 1$ 的情形下， C_N 的经验谱分布则收敛于标准 Cauchy 分布，其密度函数为：

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

该命题的严格证明在数学上较为复杂，已超出本文的研究范畴，详细推导可参见文献 [32]。为验证欧几里得随机矩阵所呈现的确定性谱行为，本文在如下参数设置下开展数值实验：载波频率设为 $f = 1$ GHz，对应波长 $\lambda = 0.3$ m，天线单元总数固

定为 $N = 8000$, 并均匀分布于边长分别为 $L = 20\text{ m}$ 与 $L = 40\text{ m}$ 的立方体区域 \mathcal{V} 内。在此基础上, 分别计算矩阵实部 C_N 与虚部 S_N 的经验谱分布, 并与相应的极限谱律进行对比。结果如图 12 与图 13 所示。在各自对应的参数范围内, 经验谱分布与 Wigner 半圆律及 Marčenko-Pastur 分布高度吻合, 验证了前述渐近理论的有效性。

a. 实部 ($\beta=0.1277$)b. 虚部 ($\beta=0.1277$)图 12 欧几里得随机矩阵经验谱分布及极限谱分布 ($L=20\text{ m}$)a. 实部 ($\beta=0.0319$)b. 虚部 ($\beta=0.0319$)图 13 欧几里得随机矩阵经验谱分布及极限谱分布 ($L=40\text{ m}$)

5 结束语

本文研究了在确定性布局与随机位置扰动条件下, 集群天线阵列实现相干波束赋形的可行性。理论分析表明, 在多重线性阵列结构中, 传统半波长间距约束可被显著放宽, 且不会引发栅瓣。尽管空间扰动会导致主瓣增益有所下降, 阵列仍能近似维持其相干增益。进一步地, 通过欧几里得随机矩阵经验谱分布的渐近收敛特性, 本文在高度无序的阵列构型中揭示出一种涌现的统计规律。上述结果不仅为集群天线阵列的鲁棒波束赋形奠定了新的理论基础, 也为面向未来无线系统的大规模阵列设计提供了工程启示。

参考文献

- [1] ZENG Y, ZHANG R, LIM T J. Wireless communications with unmanned aerial vehicles: Opportunities and challenges[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2016, 54(5): 36-42.
- [2] MOZAFFARI M, SAAD W, BENNIS M, et al. A tutorial on UAVs for wireless networks: Applications, challenges, and open problems[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2019, 21(3): 2334-2360.
- [3] MU J, ZHANG R, CUI Y, et al. UAV meets integrated sensing and communication: Challenges and future directions[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2023, 61(5): 62-67.
- [4] MENG K, WU Q, XU J, et al. UAV-enabled integrated sensing and communication: Opportunities and challenges[J]. *IEEE Wireless Communications*, 2024, 31(2): 97-104.
- [5] SABZEHALI J, SHAH V K, DHILLON H S, et al. 3D placement and orientation of mmwave-based UAVs for guaranteed los coverage[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2021, 10(8): 1662-1666.

- [6] ZENG Y, ZHANG R, LIM T J. Throughput maximization for UAV-enabled mobile relaying systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(12): 4983-4996.
- [7] ZHAN P, YU K, SWINDLEHURST A L. Wireless relay communications with unmanned aerial vehicles: Performance and optimization[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(3): 2068-2085.
- [8] KHUWAJA A A, CHEN Y, ZHAO N, et al. A survey of channel modeling for UAV communications[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2018, 20(4): 2804-2821.
- [9] MAO K, ZHU Q, WANG C X, et al. A survey on channel sounding technologies and measurements for UAV-assisted communications[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, 73: 8004624.
- [10] LI X, YAO H, WANG J, et al. A near-optimal UAV-aided radio coverage strategy for dense urban areas[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(9): 9098-9109.
- [11] LI Z, GIORGETTI A, KANDEEPAN S. Multiple radio transmitter localization via UAV-based mapping[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(9): 8811-8822.
- [12] ZHANG W, ZHANG W. An efficient UAV localization technique based on particle swarm optimization[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2022, 71(9): 9544-9557.
- [13] LIU W, CHEN J. UAV-aided radio map construction exploiting environment semantics[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2023, 22(9): 6341-6355.
- [14] ZENG Y, XU X, JIN S, et al. Simultaneous navigation and radio mapping for cellular-connected UAV with deep reinforcement learning[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2021, 20(7): 4205-4220.
- [15] SOLTANI N, REUS-MUNS G, SALEHI B, et al. RF fingerprinting unmanned aerial vehicles with non-standard transmitter waveforms[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, 69(12): 15518-15531.
- [16] ZHANG Y, WANG R, LIU E. Cooperative UAVs placement optimization for best multistatic time-of-arrival localization in 5G networks[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2025, 24(4): 3561-3574.
- [17] JIANG H, ZHANG Z, WANG C X, et al. A novel 3D UAV channel model for a 2G communication environments using AOD and AOA estimation algorithms[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2020, 68(11): 7232-7246.
- [18] ZHANG C, ZHANG L, ZHU L, et al. 3D deployment of multiple UAV-mounted base stations for UAV communications[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, 69(4): 2473-2488.
- [19] LYU J, ZENG Y, ZHANG R, et al. Placement optimization of UAV-mounted mobile base stations[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 21(3): 604-607.
- [20] MOZAFFARI M, SAAD W, BENNIS M, et al. Wireless communication using unmanned aerial vehicles (UAVs): Optimal transport theory for hover time optimization[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(12): 8052-8066.
- [21] YUAN Z, JIN J, SUN L, et al. Ultra-reliable IOT communications with UAVs: A swarm use case[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2018, 56(12): 90-96.
- [22] NAMIN F, PETKO J S, WERNER D H. Analysis and design optimization of robust aperiodic micro-UAV swarm-based antenna arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(5): 2295-2308.
- [23] MOZAFFARI M, SAAD W, BENNIS M, et al. Communications and control for wireless drone-based antenna array[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2018, 67(1): 820-834.
- [24] DIAO J. Unmanned aerial vehicles swarm-based distributed phased arrays for grating lobe mitigation and collision avoidance[J]. *IEEE Open Journal of Antennas and Propagation*, 2022, 3: 1264-1272.
- [25] DIAO J M, DEBNATH B, BEGUM M M, et al. Experimental demonstration of flying UAV swarm-based reconfigurable yagi-uda antennas[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2025, 73(5): 2971-2978.
- [26] ZHANG C, SUN G, WU Q, et al. UAV swarm-enabled collaborative secure relay communications with time-domain colluding eavesdropper[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2024, 23(9): 8601-8619.
- [27] TUZI D, DELAMOTTE T, KNOPP A. Satellite swarm-based antenna arrays for 6G direct-to-cell connectivity[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 36907-36928.
- [28] ROCCA P, OLIVERI G, MAILLOUX R J, et al. Unconventional phased array architectures and design methodologies-A review[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2016, 104(3): 544-560.
- [29] NANZER J A, MGHABGHAB S R, ELLISON S M, et al. Distributed phased arrays: Challenges and recent advances[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2021, 69(11): 4893-4907.
- [30] VAN TREES H L. Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.
- [31] HECHT E. Optics[M]. [S.l.]: Pearson Education India, 2012.
- [32] SKIPETROV S, GOETSCHY A. Eigenvalue distributions of large euclidean random matrices for waves in random media[EB/OL]. [2025-06-25]. <https://arxiv.org/pdf/1007.1379>.