

引用格式: 文舸一. 天线优化设计的理论与实践 [J]. 电子科技大学学报, 2026, 55(1): 3-26.

WEN G Y. Theory and practice in optimal antenna design[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2026, 55(1): 3-26.

天线优化设计的理论与实践



文舸一*

(南京信息工程大学应用电磁学研究中心, 南京 210044)

摘要: 该文基于作者个人的研究经历, 综述天线优化设计的理论及其应用, 内容涵盖天线通用理论、单天线设计、阵列天线综合 3 个方面。首先讨论了媒质储能、天线储能以及天线增益带宽积上限, 这些内容构成天线设计的理论基础和准则。其次介绍了单天线设计的两种方法: 基于天线储能分析的谐振模式理论和用于金属天线辐射特性分析的细线模型理论。最后阐述了设计阵列天线的最大功率传输效率法, 包括无约束、加权、带约束 3 种形式, 及其在无线输能、方向图赋形等方面的应用。

关键词: 天线储能; 天线设计准则; 天线谐振模式; 电小天线; 细线模型; 最大功率传输效率法; 天线阵列综合
中图分类号: TN82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.12178/1001-0548.2025191

Theory and practice in optimal antenna design

WEN Geyi*

(Research Center of Applied Electromagnetics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: Based on the author's personal research experience, this paper introduces the theory and applications of antenna optimization design, with content covering the general theory of antennas, single-antenna design and array-antenna synthesis. The stored energies in medium and the stored energies of antenna as well as the upper bounds of the gain-bandwidth product are first introduced, thereby providing theoretical basis and guidelines for antenna design. Second, two fundamental theories of single-antenna design are expounded, including the resonant mode theory which is based on the stored energies of antenna, and the thin wire model theory for the analysis of radiation characteristics of metallic antennas. Finally, the method of maximum power transmission efficiency for array-antenna synthesis is elaborated, covering the unconstrained, weighted, and constrained formulations and their applications in the wireless power transmission and pattern synthesis.

Key words: stored energies of antenna; guidelines for antenna design; resonant modes for antenna; electrically small antenna; thin wire models; the method of maximum power transmission efficiency; antenna array synthesis

天线作为电磁能量收发装置, 是进出无线系统的门户。从电路观点来看, 天线是连接馈线与球面波导(即自由空间)的多端口匹配网络; 从场的观点来看, 天线是将馈线中的传播模式变换成球面波导中多个传播模式的模式变换器。随着近年来无线技术的快速发展, 信息系统正沿着无线化、小型化、传输容量最大化和运行智能化的方向加速发展, 从而衍生出大量的天线设计难题, 使得天线这门古老的学科正焕发出勃勃生机, 新的设计理论和

技术不断涌现。这一新形势对天线工程师的知识体系与创新能力提出了更高的要求。天线工程师必须在基础理论与工程实践上做到融会贯通, 才能在技术上有所发明。

天线设计可分为分析与综合。天线分析是在已知天线结构与激励的情况下(如天线的几何形状、尺寸、材料、工作频率、馈电方式与馈电点位置等), 通过理论建模、数值计算或实验测量, 研究其电磁辐射过程, 从而获得天线的辐射场分布、增

收稿日期: 2025-09-22

基金项目: 国家自然科学基金(61971231)

作者简介: 文舸一, 博士, 教授, 主要从事微波、天线方面的研究。

*通信作者 E-mail: wgy@nuist.edu.cn

益、带宽、输入阻抗、极化等性能参数。天线分析可用于检验天线设计的合理性,分析结构参数对性能的影响,是天线综合的基础或前奏。天线综合是根据给定的天线辐射性能指标,如方向图形状、增益、带宽、极化等,反向求取天线结构参数与激励方式的过程,属于天线分析的逆问题,通常归结为带各种约束机制的性能优化。给定天线性能指标后,如何选择天线种类、几何结构都有很大的任意性,从而给天线工程师留有很大的想象空间。为了获得唯一解,必须对天线的综合要求作具体界定。天线的分析与综合有解析法与数值法两大类。解析法是指基于已知的解析公式或经验公式来分析或综合天线。数值法则指利用数值计算方法,如有限元、矩量法、时域有限差分法等对天线进行分析或综合,是目前天线设计最常用的方法。

从构成数量上,天线可分为单天线与阵列天线(或多天线)两大类,前者是后者的基础,两者的设计过程与侧重点有所不同。单天线独立工作,其设计方式有两种。第 1 种方式是在给定天线类型和激励方式后,进而确定天线的几何结构和材料参数。这一过程通常采用仿真软件完成,即通过仿真软件不断地尝试与迭代完成单天线的综合。工程师仅凭借仿真过程并不能真正深入了解并掌握单天线设计的底层逻辑。单天线设计的第 2 种方式则是给定天线的几何结构和材料参数,去确定天线的激励方式来获得所要求的性能,这一过程可利用散射体的各种模式理论来完成。与第 1 种方式相比,第 2 种方式能更清晰地展现天线工作机制并提供各个模式的激励方法,能让天线工程师清晰地把握天线设计的底层逻辑。

阵列天线综合的侧重点一般不在阵列单元的几何结构与材料参数的选择上,而是放在如何让所有阵列单元协同工作和单元激励的求解上。换言之,阵列天线的综合是在单元及其排列确定的前提下,去求取阵列的激励分布以实现特定的方向图。虽然理论上可以把天线单元及其排列方式作为设计因素,但这样会导致计算工作量过大,一般情况下也没有必要。实际情况中,工程师可根据经验、需求与使用环境等对单元与阵列构型做出合理的选择。阵列天线的综合是指根据给定的指标(如方向图形状、主瓣增益、副瓣电平等),去确定阵列激励分布的过程。传统的阵列综合方法往往基于特定的阵列构型对其进行简化,以降低综合过程的复杂度,如常将天线单元近似为理想点源,忽略单元之间的

耦合,而采用阵因子来处理阵列的综合问题。当阵列单元不相同、周围环境过于复杂或单元间距非常小时,方向图相乘规则就会失效,基于阵因子的阵列分析与综合则不再适用。阵列天线的综合常基于各种目标函数的优化来获得最佳的激励分布,故阵列的性能与目标函数的选取有很大的关系。目前的商用软件在阵列天线的综合方面仍然捉襟见肘,不能满足实际需求。

本文基于作者个人的研究经历,介绍天线的通用理论、单天线设计方法与阵列综合 3 个方面的研究成果。天线理论作为电磁理论的重要分支,可分为通用理论和针对特定类型天线的特殊理论。通用理论是天线理论的底层框架,涉及天线的共同工作原理与规律,是所有天线分析与综合的理论基础。特殊理论则讨论个别天线的辐射特性,解决通用理论难以完全覆盖的具体问题,往往与天线的自身结构、应用场景密切相关,可看作通用理论的拓展和补充。

天线性能上限是通用理论研究的重点。增益与带宽的乘积能表征天线的主要辐射性能,本文称之为天线容量。对窄带系统而言,带宽与品质因素互为倒数,因此天线容量可表示为增益与品质因素之比,即天线辐射强度与天线储能之比。当天线尺寸与工作频率确定后,天线容量存在物理上限,这表明天线的远场性质与近场行为存在相互制约关系。提升增益可能导致带宽降低,反之亦然。对窄带系统而言,带宽与品质因素互为倒数,而品质因素取决于天线储能。因此增益、带宽、储能三者密切相关且相互牵制。三者中,以天线储能最为基本,其物理内涵最为丰富,过去所面临的挑战性问题也更多。在天线通用理论部分,本文着重介绍辐射场的球面波展开、媒质储能与天线储能以及天线容量上限。天线容量上限与通信理论中的 Shannon 信道容量公式异曲同工,是所有天线设计的理论基础和准则,对天线性能优化目标设定有极其重要的指导意义。

在单天线设计方面,本文主要介绍谐振模式理论与细线模型理论。区别于过去已有的模式理论,天线的谐振模式代表天线的实际工作状态,通过激励一个或多个谐振模式可以直接获得满意的天线性能,做到一步到位。由于趋肤效应,金属天线的电流往往分布在结构的边缘,故金属天线可用沿边缘的导线近似替代。当导线半径趋于零时,导线电流

的渐近分布满足波动方程（而不是积分方程），由此可求得细线电流分布的解析解。电流分布的解析解有利于从宏观把握天线的工作原理和辐射特性，做到化繁为简、去粗存精，对提高物理洞察力和指导天线设计有很大的帮助。

阵列天线的综合方法有很多，但或受限于构型、或受限于单元间距、或受限于周边环境，因而缺乏一般性。本文介绍的最大功率传输效率法（method of maximum power transmission efficiency, MMPTE），能克服过去阵列综合方法的不足以及面临的挑战，满足不同的设计要求。除因物理规律限制外，阵列天线的设计不再存在技术上的困难。

受篇幅所限，本文以阐明相关内容的重要结论为主，文中有关公式的详细推导可见拙著^[1-3]及相关参考文献。

1 天线的通用理论

首先介绍天线的通用理论，内容包括媒质储能与天线储能、天线性能上限、环境对天线的影 响等。天线通用理论还包括各种一般数值求解方法，不在本文讨论之列。

1.1 媒质储能与天线储能

媒质的电磁储能表达式在研究复杂介质中电磁能量存储和传输发挥着重要作用。储能表达式用来确定媒质的给定体积内可以存储多少能量，这对于准确预测电磁器件的性能至关重要。储能表达式还可用来指导材料设计以减少材料损耗和增加材料带宽，开发具有高储能能力的新材料，提高与材料相关的电磁器件或系统的性能。如可通过储能表达式模拟和预测新型复合材料储存电磁能量的过程，以便开发出能量密度更高的新型电磁储能装置。此外，在无线传输系统中，充分了解发射与接收之间媒质中的储能机理有助于优化能量传输效率，减少能量损失，扩大系统的覆盖范围。

媒质的电磁储能表达式是定义天线储能的理论基础。天线储能在天线理论中占有举足轻重的地位。为了阐明其物理意义及其渊源，宜从天线的等效电路谈起。

1.1.1 天线的 RLC 等效电路

如图 1 所示，天线由激励源与不同性质的散射体（如金属、介质等）组成。天线常有 3 种激励模型^[1]：一是馈线激励，二是点源激励，三是外来入射波激励。3 种模型中以点源激励模型最不准确，仅适用于低频场合。

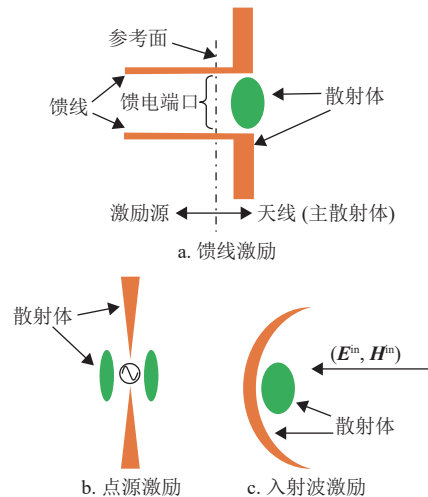


图 1 天线及常用激励方式

为了定义天线输入阻抗，必须引入馈电端口或参考面，从而将天线系统分为激励源（图 1a 中参考面左侧）和主散射体（图 1a 中参考面右侧）两部分。处于参考面左侧的激励源和散射体（如参考面左侧的馈线表面）的辐射通常可忽略，因此参考面右侧的散射体部分是天线辐射的主体，在激励端口确定的情况下，主散射体也简称为天线。通过确定馈电端口处馈线上的等效电压与等效电流，可求得天线的输入阻抗。天线馈线一般工作在单模状态，此时天线可等效为单端口网络，其输入阻抗定义为馈电端口的等效电压与等效电流之比。若馈线工作在多模状态，此时天线等效为多端口网络。因此，天线输入阻抗的定义与馈线的工作状态有关。为了确保天线等效为单端口网络，须将工作频率限定在馈线的单模工作区域。进行数值计算时，尤其要注意限定天线工作频率范围，否则会得到错误或无意义的结果。馈线与天线散射体的联合求解方法详见文献 [4]，该文将传统磁场积分方程进行了推广，使其可用于分析包含馈线的多天线系统。

图 2 是天线系统的等效电路。参考面左边是激励源的 Thevenin 等效电路，其中 V_s 和 Z_s 分别表示等效电压源和等效阻抗。参考面右边是天线的串联 RLC 等效电路。天线系统的等效电路的详细推导可见文献 [3, 5]。在天线的 RLC 等效电路中，电阻 R 表示天线辐射功率和损耗，电感 L 表示天线的磁储能，电容 C 表示天线的电储能，3 个元件具有不同的频率响应。用简单的 RLC 谐振电路来表征天线，对理解天线的工作原理和提高物理洞察力有很大的帮助。从电路的观点来看，天线的发射功

率、电储能、磁储能是天线的 3 个基本要素, RLC 谐振电路的基本特点和性质对天线同样适用。如天线谐振时, 输入阻抗为纯电阻, 电流呈现峰值; 偏离谐振时, 输入阻抗表现为感性或容性。谐振时, 激励源直接向天线提供辐射能量, 不参与储能转换。值得注意的是, 这里的等效电路参数 R 、 L 和 C 都是频率的函数; 但对窄带天线系统而言, RLC 电路的主要性质仍然适用。以上讨论表明, 天线的储能在天线理论研究中占有极其重要的位置, 是理解天线工作原理的基础。

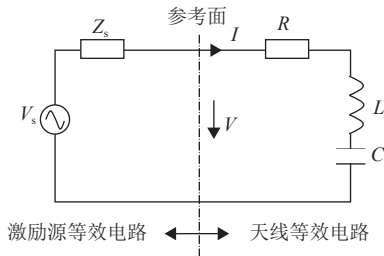


图 2 天线系统的 RLC 等效电路

例 1 偶极子天线的 RLC 等效电路。考虑半径为 a_0 、长度为 $2a$ 的偶极子天线, 其表面电流分布为:

$$J(r) = u_z \frac{I_0}{2\pi a_0} \sin k(a - |z|) \quad -a < z < a \quad r = a_0$$

天线端口电流为 $I = I_0 \sin(ka)$ 。图 3 给出了偶极子天线的 RLC 等效电路参数随频率变化的曲线, 其中, 感抗中的电感 L 和容抗中的电容 C 的计算分别由偶极子天线的磁储能与电储能求得。从图可看出, 在天线谐振频率处, 感抗与容抗相等, 即输入电抗为零, 输入阻抗为实数。

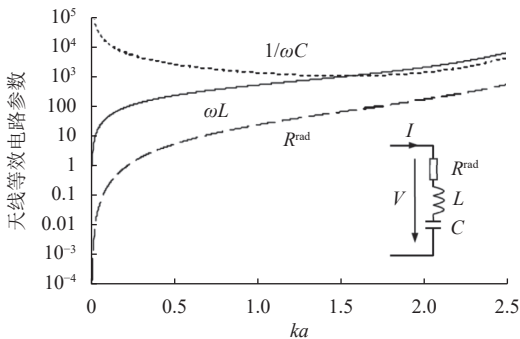


图 3 偶极子天线的 RLC 等效电路参数

为了获得天线的等效电路参数, 必须先确定天线的电磁储能, 而媒质储能是定义天线储能的基础。

1.1.2 一般媒质的电磁储能

过去一百多年来, 物理学家一直在努力寻求复杂媒质中储能表达式, 这在大多数经典著作中都有论述^[6-11], 更多的相关研究可见文献 [12] 中的参考文献。过去的研究方法大致分成两类: 一是采用窄带近似, 这时储能表达式依赖媒质的本构关系; 二是针对不同媒质采用不同的微观模型。显然, 这两种方法获得储能的表达式只适用于特定媒质, 缺乏普遍性。作者于 2019 年解决了电磁领域这个长期悬而未决的难题, 获得一般媒质中时谐场的电储能密度与磁储能密度的表达式分别为^[12]:

$$w_e = \frac{1}{4} \text{Re}(\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{D}}) + \frac{1}{4} \omega \text{Re} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial \omega} - \overline{\mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \right)$$

$$w_m = \frac{1}{4} \text{Re}(\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{B}}) + \frac{1}{4} \omega \text{Re} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial \omega} - \overline{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \right) \quad (1)$$

一般媒质中的电、磁损耗功率可分别表示为^[8]:

$$p_{ed} = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{D}}), \quad p_{md} = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{B}}) \quad (2)$$

本文采用一般教科书上的通用记号, 常用符号的意义不再一一细表。储能密度表达式 (1) 中的频率导数项代表媒质储能的色散部分, 它反映了媒质参数随频率变化对储能的影响。储能密度表达式 (1) 可用两种独立方法推得: 第 1 种方法是基于作者提出的复分析理论^[12], 第 2 种方法是基于作者提出的新的一级窄带近似理论, 后者能清楚表明储能表达式中频率导数出现的原因^[1]。

例 2 各向同性媒质中的储能。对各向同性媒质, 本构关系为:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3)$$

式中, $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ 是复介电常数; $\mu = \mu' - j\mu''$ 是复导磁率; 这里 ε' 和 ε'' 分别是电容率和介质损耗因子; μ' 和 μ'' 分别是电感率和磁损耗因子。将式 (3) 代入式 (1) 和式 (2), 得到:

$$w_e = \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\omega}{2} \varepsilon'' \text{Im} \left(\overline{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \right)$$

$$w_m = \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\mu')}{\partial\omega} |\mathbf{H}|^2 + \frac{\omega}{2} \mu'' \text{Im} \left(\overline{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \right) \quad (4)$$

$$p_{ed} = \frac{\omega}{2} \varepsilon'' |\mathbf{E}|^2, \quad p_{md} = \frac{\omega}{2} \mu'' |\mathbf{H}|^2 \quad (5)$$

以往研究媒质储能时, 常常假定媒质无损耗或损耗可忽略, 故式 (4) 中场的频率色散项不会出现。从该式可看出, 场的频率导数项含有媒质损耗因子, 物理上代表媒质的损耗对储能的影响。若

损耗可忽略, 即 $\varepsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$, 式 (4) 变成熟知的形式:

$$w_e = \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}|^2, w_m = \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\mu')}{\partial\omega} |\mathbf{H}|^2 \quad (6)$$

在以往的研究中, 式 (6) 都是通过窄带近似推得, 但其中的场强不是相量, 仍然是时间的函数。故过去色散媒质中的储能理论与时谐场理论是不兼容的。

对一般媒质存在如下能量平衡关系:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{4} \omega \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{D}} \right) + \\ & \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{4} \omega \left(\bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{B} \right) = \\ & -j \frac{1}{4} \nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \times \bar{\mathbf{H}} \right) - j \frac{1}{4} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{J}} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

上式包含了媒质的储能表达式 (1), 它在特殊媒质中的特殊形式散见于诸多文献中, 其无源形式常用来研究系统的储能, 但过去人们并不了解其物理含义。有关式 (7) 的推导与讨论见文献 [1, 12]。下面说明, 式 (7) 有明确的物理意义并且自然地给出天线的储能定义。

1.1.3 天线储能

如何定义天线储能并不是一件简单、容易的事情, 有人甚至认为它不可定义。天线周围的电场 \mathbf{E} 可分成两部分, 一部分是将电磁能量带到无穷远处的辐射场 \mathbf{E}^{rad} , 另一部分是分布于天线周围的无功场 $\mathbf{E}^{\text{local}}$, 即有 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{local}} + \mathbf{E}^{\text{rad}}$ 。直观的想法是将无功场 $\mathbf{E}^{\text{local}}$ 的能量定义为天线储能。但能量对场而言是非线性的, 故叠加原理不成立。将场的上述分解代入场的能量表达式后, 会出现辐射场 \mathbf{E}^{rad} 与场 $\mathbf{E}^{\text{local}}$ 的相互作用项, 得不到仅含无功场 $\mathbf{E}^{\text{local}}$ 的能量项。其次, 天线外部空间为无穷大, 若用媒质中的电磁储能密度在整个天线外部空间进行积分, 其结果为无穷大。因此, 也不能将天线周围媒质的储能定义为天线储能。过去天线行业通常采用 Counter 的建议^[13], 将天线储能 \tilde{W} 定义为天线周围媒质的总储能 W 与天线总辐射能量 W^{rad} 之差:

$$\tilde{W} = W - W^{\text{rad}} \quad (8)$$

式 (8) 右边是两个无穷大相减。为了保证天线储能是个有限数, 两个无穷大必须有相同阶数。本文称上式为天线储能的旧定义。

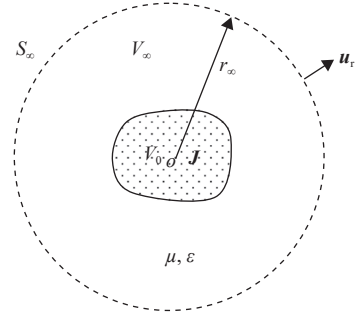


图 4 电流源 (天线) 的辐射

设电流源 \mathbf{J} 局限于有限区域 V_0 , 如图 4 所示。令 V_∞ 表示包含源区 V_0 且半径 r_∞ 趋于无穷大的球体, 球的表面记为 S_∞ 。若天线周围空间媒质参数 (μ, ε) 是各向同性且无耗的, 则天线周围媒质储能可表示为媒质储能密度的积分:

$$W = \int_{V_\infty} (w_e + w_m) dV \quad (9)$$

式中, w_e 与 w_m 分别是媒质的电储能密度与磁储能密度:

$$w_e = \frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}|^2, w_m = \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 \quad (10)$$

天线总的辐射能量可表示为辐射场能量密度的积分:

$$W^{\text{rad}} = \int_{V_\infty} (w_e^{\text{rad}} + w_m^{\text{rad}}) dV \quad (11)$$

式中, w_e^{rad} 和 w_m^{rad} 分别是辐射电场和辐射磁场能量密度:

$$w_e^{\text{rad}} = \frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}^{\text{rad}}|^2, w_m^{\text{rad}} = \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}^{\text{rad}}|^2 \quad (12)$$

式中, 辐射电场 \mathbf{E}^{rad} 和辐射磁场 \mathbf{H}^{rad} 可表示成:

$$\mathbf{E}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{E}_\infty(\mathbf{u}_r), \mathbf{H}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{H}_\infty(\mathbf{u}_r) \quad (13)$$

式中, \mathbf{u}_r 是沿径向 r 的单位矢量; $\mathbf{E}_\infty(\mathbf{u}_r)$ 与 $\mathbf{H}_\infty(\mathbf{u}_r)$ 分别是电场与磁场的 (远区) 方向图。显然式 (9) 与式 (11) 都是无限大, 但两者之间的差是有限数, 从而保证了天线储能旧定义式 (8) 是有限的。天线辐射功率可表示为:

$$P^{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} \text{Re}(\mathbf{E}^{\text{rad}} \times \bar{\mathbf{H}}^{\text{rad}}) \cdot \mathbf{u}_r dS = \frac{1}{2\eta} \int_{\Omega} |\mathbf{E}_\infty|^2 d\Omega \quad (14)$$

利用式 (11) 和式 (14), 总辐射能量可表示为:

$$W^{\text{rad}} = \int_0^{r_\infty} dr \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}_\infty|^2 + \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}_\infty|^2 \right) d\Omega = \frac{r_\infty}{c} P^{\text{rad}} \quad (15)$$

式中, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 是微分立体角; Ω 是单位球

面； $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。式 (15) 表明，天线总辐射能量等于辐射功率乘以电磁波从原点到达球面 S_∞ 的时间，因此它代表位于原点的点源所辐射的能量。换句话说，上面计算辐射能量时已将天线视为点源，故总辐射能量式 (11) 或式 (15) 仅适用于小天线。

以上是过去各向同性无耗媒质中天线储能的计算方法，它包括了天线外接球内部的储能，最早出现在作者论文文献 [5] 中；而早期天线储能的计算都基于球坐标系，不计及天线外切球内的储能。天线储能的旧定义式 (8) 是构造性的，完全基于物理直觉，缺乏坚实的数学与物理基础。首先，利用该定义进行数值计算时，涉及两个无穷大区域上的积分及其两者之差，这为数值计算带来不便。其次，当天线周围媒质复杂时，如何计算式 (8) 中的媒质储能 W 和辐射能量 W^{rad} 在过去很长一段时间都无明确的计算公式，是需要解决的难题。幸运的是，一般媒质中的能量平衡关系自然地给出一般媒质中天线储能的定义。对式 (7) 取实部得到：

$$\begin{aligned} & \text{Im} \frac{1}{4} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{J}} \right) = \\ & w_e + w_m - \nabla \text{Im} \frac{1}{4} \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \times \bar{\mathbf{H}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

式中，储能密度 w_e 和 w_m 由式 (1) 确定。设 S 为包含场源的任意封闭曲面， V 为其所含区域。将式在区域 V 上积分并利用散度定理，得到：

$$\tilde{W} = W(V) - W^{\text{rad}}(S) \quad (17)$$

式中， $W(V) = \int_V (w_e + w_m) dV$ 是区域 V 中媒质的总储能； \tilde{W} 和 $W^{\text{rad}}(S)$ 分别定义为：

$$\tilde{W} = \frac{1}{4} \text{Im} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{J}} \right) dV \quad (18)$$

$$W^{\text{rad}}(S) = \frac{1}{4} \text{Im} \int_S \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \times \bar{\mathbf{H}} \right) \cdot \mathbf{u}_n dS \quad (19)$$

面积分 $W^{\text{rad}}(S)$ 具有能量的量纲，可解释为流出封闭曲面 S 的总电磁能量。式 (17) 右边代表天线周围区域 V 中媒质储能与流出该区域的能量之差，故可看作一般媒质中天线储能的定义。天线储能和天线辐射能量可分别通过解析表达式 (18) 和式 (19) 来确定。由式 (17) 可看出，当封闭曲面 S 改变时，区域 V 中的媒质储能与流出该区域的辐射能量都会相应改变，但两者之差，即天线储能始终不变。因此天线储能完全由场源确定，是刻画场源的基本物理量。式 (18) 是计算天线储能的最一般表达式。

定义式 (17) 与旧定义式 (8) 相比，两者形式虽然相同，但内涵不完全一样，后者可视为前者的在 $V \rightarrow \infty$ 时的特例。新的天线储能定义与旧定义相比有如下优点：1) 新定义中涉及的天线储能与天线辐射能量均适用于一般媒质；2) 由于 V 是包含源的任意有限区域，新定义只涉及两个有限数相减，不涉及两个无穷大相减；3) 天线储能与天线辐射能量有明确的一般解析表达式；4) 天线储能既可通过式 (17) 左边（即解析表达式 (18)）来计算，也可通过右边两个有限数之差来计算；5) 新定义不是构造性的，而是严格建立在电磁能量平衡关系的基础上，故有坚实的数理基础。

至此，天线储能在一一般媒质中的定义与计算问题得到圆满解决。在各向同性无耗媒质中，媒质储能的色散部分为零，天线储能 \tilde{W} 可分解为电储能 \tilde{W}_e 和磁储能 \tilde{W}_m 之和，且有^[1]：

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{8} \text{Im} \int_{V_0} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{J}} \right) dV + \frac{1}{8\omega} \text{Im} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{J}} dV \quad (20)$$

$$\tilde{W}_m = \frac{1}{8} \text{Im} \int_{V_0} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \bar{\mathbf{J}} \right) dV - \frac{1}{8\omega} \text{Im} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{J}} dV \quad (21)$$

在各向同性无耗媒质中，电场可表示成电流源 \mathbf{J} 的积分。将电场的积分表达式代入上面两式，经化简后可求得天线电储能 \tilde{W}_e 和磁储能 \tilde{W}_m 的积分表达式为：

$$\begin{aligned} \tilde{W}_e = & \frac{\eta c}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \bar{\rho}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{\cos(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') + \\ & \frac{ck\eta}{32\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \left[\bar{\rho}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \sin(kR) dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') + \\ & \frac{c^2 k\eta}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \text{Im} \left[\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \bar{\rho}(\mathbf{r}')}{\partial \omega} \right] \frac{\sin(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') - \\ & \frac{c^2 k\eta}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \frac{1}{c^2} \text{Im} \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')}{\partial \omega} \right] \frac{\sin(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_m = & \frac{\eta c}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\cos(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') + \\ & \frac{ck\eta}{32\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \left[\bar{\rho}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \sin(kR) dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') + \\ & \frac{c^2 k\eta}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \text{Im} \left[\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \bar{\rho}(\mathbf{r}')}{\partial \omega} \right] \frac{\sin(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') - \\ & \frac{c^2 k\eta}{16\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \frac{1}{c^2} \text{Im} \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')}{\partial \omega} \right] \frac{\sin(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (23)$$

式中, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $k = \omega/c$ 。储能计算式 (22) 和式 (23) 与作者先前在文献 [14] 中采用其他方法所得的结果完全一致, 证明了新储能计算公式 (18) 的合理性。对于小天线, 式 (22) 和式 (23) 可简化为作者早期所得到的结果^[15]。

天线储能也可通过天线输入阻抗来计算。当天线尺寸适中时, 低频电路的 Foster 定理可推广到射频系统, 且有^[5]:

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{8}|I|^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} - \frac{X}{\omega} \right), \quad \tilde{W}_m = \frac{1}{8}|I|^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{X}{\omega} \right) \quad (24)$$

式中, I 为天线端口电流; X 为天线输入电抗。可以验证, 基于电流的储能计算方法 (场方法) 与基于输入阻抗的储能计算方法 (电路方法) 会给出相同的结果^[14]。

值得指出, 储能计算式 (18) 与电路理论中一个熟知的储能计算公式相似。考虑图 5 所示多端口无耗网络, 可以证明该网络的内部储能可表示为^[16]:

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^N \text{Im} \frac{1}{4} \left(V_i \frac{d\bar{I}_i}{d\omega} - \bar{I}_i \frac{dV_i}{d\omega} \right) \quad (25)$$

式 (18) 和式 (25) 形式上完全相似。不难证明, 电路储能表达式 (25) 可用场的储能关系式 (18) 推出。

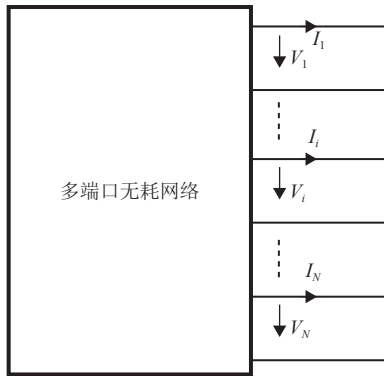


图 5 多端口无耗网络

若能量平衡式 (17) 用于无源区域 V , 该式左边为零, 这意味着流入 V 中的能量与流出 V 中的能量相等。只有区域 V 中包含源时, 天线储能才不为零, 这与天线的辐射功率计算颇为相似。表 1 给出了辐射功率与天线储能的性质, 可看出两者有若干共同点, 都代表源所特有的性质并且与坐标系无关。

基于天线储能, 可定义天线品质因素 Q 。天线 Q 的 IEEE 标准定义是天线储能与单位周期辐射能量之比的 2π 倍:

$$Q = \frac{\omega \tilde{W}}{P_{\text{rad}}} = \frac{\omega(\tilde{W}_e + \tilde{W}_m)}{P_{\text{rad}}} \quad (26)$$

式中, P_{rad} 是天线辐射功率。在传统的天线理论研究中, 天线 Q 通常用二择一的方式定义为:

$$Q = \begin{cases} \frac{2\omega \tilde{W}_m}{P_{\text{rad}}} & \tilde{W}_m > \tilde{W}_e \\ \frac{2\omega \tilde{W}_e}{P_{\text{rad}}} & \tilde{W}_e > \tilde{W}_m \end{cases} \quad (27)$$

定义式 (26) 适用于任意天线和工作状态, 而定义式 (27) 仅适用于谐振天线。当天线谐振时, 两者给出相同的值。从理论研究的角度来看, IEEE 标准定义比传统的二择一定义更易于分析和计算。

表 1 辐射功率与天线储能的性质

辐射功率	天线储能
1. 可定义为源区域上的体积分	1. 可定义为源区域上的体积分
2. 可定义为 Poynting 矢量沿包含源区的封闭表面上的面积分。	2. 可定义为由包含源的区域上的体积分与该区域边界上的表面积分之间的当媒质无耗时, 该定义与包含源的封闭曲面的选择无关
3. 由源唯一确定, 发于源	3. 由源唯一确定, 发于源
4. 由源向无穷远传播	4. 局限于源的附近
5. 取实数	5. 取实数

1.1.4 天线辐射能量

在以往的研究中, 各向同性无耗媒质中的天线辐射能量定义为天线辐射场能量密度在无穷大空间 V_∞ 上的积分, 其数学表达式如式 (11) 所示。式 (15) 则表明辐射能量等于辐射功率乘以电磁波从原点到达无穷大球面 S_∞ 的时间 (注意, 不是辐射功率乘以正弦波的周期)。此时, 天线被近似看作是点源。因此, 辐射能量式 (11) 实际代表位于坐标原点的点源所辐射的能量。

在一般媒质中, 天线辐射能量用式 (19) 定义, 式中的积分曲面不需要取为无穷大球面, 而只要包含天线即可, 这给数值计算带来极大方便。下面讨论老定义式 (11) 与新定义式 (19) 的区别。

设媒质各向同性且无耗。在天线远区, 辐射能量式 (19) 可表示为^[1]:

$$W^{\text{rad}}(S_\infty) = \frac{r_\infty}{c} P^{\text{rad}} - W_d \quad (28)$$

与老定义式 (11) 相比, 上式多了一项 W_d 。该项可写成:

$$W_d = \frac{k^2 \eta}{8\pi} \int_{V_0} \int_{V_0} \text{Im} \left[\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}'')}{\partial \omega} \right] dV(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'') \approx \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \text{Im} \left[\bar{\mathbf{H}}_\infty(\mathbf{u}_r) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_\infty(\mathbf{u}_r)}{\partial \omega} \right] d\Omega = \frac{1}{2\eta} \int_{\Omega} \text{Im} \left[\bar{\mathbf{E}}_\infty(\mathbf{u}_r) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_\infty(\mathbf{u}_r)}{\partial \omega} \right] d\Omega \quad (29)$$

式中, \vec{U} 是并矢, 定义为:

$$\vec{U} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \frac{1}{r^2} (\vec{I} - \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r) e^{jk\mathbf{u}_r \cdot (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')} dS(\mathbf{r})$$

式中, \vec{I} 是单位并矢。式 (28) 右边第 1 项代表位于坐标原点的点源的辐射能量, 右边第 2 项 W_d 可看作考虑 V_0 中的实际源分布后对点源的校正。因此新定义式 (19) 比老定义式 (11) 更合理, 前者考虑了源分布的影响, 而后者简单地将天线当成点源来处理。对小天线而言, 电流分布对频率的导数一般可以忽略, 故 W_d 可以忽略。另一方面, 若方向图函数 $E_\infty(\mathbf{u}_r)$ 随频率变化较慢, W_d 也可忽略。对某些典型天线 (如偶极子, 环天线, 口面天线, 微带天线), 方向图函数 $E_\infty(\mathbf{u}_r)$ 是纯实数或纯虚数, 此时不管天线大小, W_d 都为零。

1.2 天线性能的上限

基于前面的讨论, 可推导天线增益-带宽积的物理上限, 为天线性能优化提供理论边界。天线的增益 G 和分数带宽 B_f 在大多数情况下需要同时最大化, 因此天线的增益-带宽积是最重要的性能指标, 可称为天线容量。给定天线的工作频率和最大容许尺寸, 天线容量的上限是多少? 或等价地, 给定天线容量与工作频率, 天线可以做到多小? 这个问题是所有天线工程师在接到设计任务之后必须要回答的问题。在通信理论中, 给定系统带宽与信噪比, Shannon 信道容量公式给出了信道容量的上限。类似地, 在天线理论中, 给定天线的工作频率与最大容许尺寸, 天线容量的最大可能值便随之而定。研究天线性能上限的主要数学工具是辐射场的球面波理论。

1.2.1 辐射场的球面波级数展开式

自由空间可看作球面波导, 其理论与金属波导理论类似。球面波导的矢量模式函数可用球谐函数来构造, 它们都与频率无关, 故不仅可用来研究频域问题, 也可用来研究时域问题^[1]。天线的辐射场可通过球面波导的矢量模式函数展开成级数形式。

天线的辐射场也可表示成电流分布的积分。场的积分表达式常用来研究天线的辐射特性和建立散射体的积分方程。为了获得电流源外的场分布, 需针对每个场观察点分别对电流分布进行积分运算。

当天线的辐射场表示成级数形式时, 场的展开系数可表示成源区域上的积分。一旦展开系数确定, 源外场分布的计算只涉及级数简单求和。相较于场的积分表达式, 级数展开法能显著降低计

算量。

电流源 \mathbf{J} 和磁流源 \mathbf{J}_m 所产生的电场可表示为:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -jk\eta \int_{V_0} \vec{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') - \int_{V_0} \vec{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \quad (30)$$

式中, $\vec{\mathbf{G}}_e$ 和 $\vec{\mathbf{G}}_m$ 分别是电、磁并矢 Green 函数, 可表示成级数形式:

$$\vec{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{u}_r \mathbf{u}_{r'} + \sum_{n,m,l} \frac{-jk}{N_{nm}^2} \begin{cases} \mathbf{M}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}') + \mathbf{N}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}') & r < r' \\ \mathbf{M}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}') + \mathbf{N}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}') & r > r' \end{cases} \quad (31)$$

$$\vec{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n,m,l} \frac{-jk^2}{N_{nm}^2} \begin{cases} \mathbf{N}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}') + \mathbf{M}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}') & r < r' \\ \mathbf{N}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}') + \mathbf{M}_{nml}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{nml}^{(1)}(\mathbf{r}') & r > r' \end{cases} \quad (32)$$

式 (31) 中, $\mathbf{M}_{nml}^{(i)}$ 和 $\mathbf{N}_{nml}^{(i)}$ 是球面波导中的基本场模式。上面公式的详细推导见文献 [1]。式 (30) 形式上为积分表达式, 实际上为级数展开式, 而且是辐射场最一般的级数展开式。在一般文献中, 场的球面波级数展开式通常不包含磁流的贡献, 即不包含磁并矢 Green 函数的级数展开式 (32)。但若考虑天线馈线的影响或采用等效原理研究口径天线时, 必须在馈电端口引入磁流。设观察点位于天线的外接球之外, 辐射电场可表示为大家所熟悉的形式:

$$\mathbf{E} = - \sum_{n,m,l} (\alpha_{nml}^{(2)} \mathbf{M}_{nml}^{(2)} + \beta_{nml}^{(2)} \mathbf{N}_{nml}^{(2)}) \quad (33)$$

式中, $\alpha_{nml}^{(2)}$ 和 $\beta_{nml}^{(2)}$ 由源分布确定^[1]。

辐射场的球面波级数展开式在天线理论研究 with 天线设计中都具有极其重要的意义, 是从事天线理论研究不可或缺的工具。在天线辐射机理的理论分析方面, 球面波级数展开可用于剖析辐射场的模式构成, 使人们能清晰理解天线结构 (如形状、尺寸和电流分布) 如何影响各个模式的组分, 进而了解天线结构的辐射机理, 为天线设计提供理论支撑。

在天线优化设计中, 往往需要调整其结构参数。通过建立结构参数与球面波展开式系数之间的关系, 可将结构变化直接与辐射场的模式构成变化关联起来。这使得优化过程更高效, 无需基于场积分表达式的计算盲目迭代, 而是通过调整参数来改

变模式构成，从而实现预期性能。这在天线设计中尤为重要。

例3 沿 z 轴的偶极子天线，仅辐射 TM_{n0e} 模。位于 (x,y) 平面的圆环天线，仅辐射 TE_{10e} 模。详细讨论见文献[1]。

1.2.2 天线性能上限

由于天线带宽 B_f 与品质因数 Q 近似互为倒数，天线容量可以表示为增益 G 与 Q 的比值，即 $G/Q \approx GB_f$ 。而比值 G/Q 物理上代表天线辐射强度与储能之比。如图6所示，设天线的外接球半径为 a 。

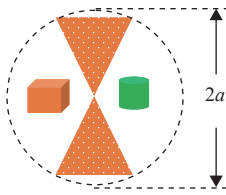


图6 天线的外接球

利用场的球面波展开式(33)，可推导出任意全向天线与定向天线的容量上限分别为^[17-19]：

$$\max \frac{G}{Q} \Big|_{\text{omni}}^{\text{Wen}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1) |P_n^1(0)|^2}{n(n+1) [Q_n(ka) + Q'_n(ka)]} \quad (34)$$

$$\max \frac{G}{Q} \Big|_{\text{dir}}^{\text{Wen}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{Q_n(ka) + Q'_n(ka)} \quad (35)$$

式中， P_n^1 为连带 Legendre 函数； Q_n 是 TE 或 TM 模的模式 Q 值，由 Collin 和 Rothschild 基于 Counter 储能定义于 1964 年得到，原始表达式为^[20]：

$$Q_n(x) = x - \left| h_n^{(2)}(x) \right|^2 \left[\frac{1}{2} x^3 + x(n+1) \right] - \frac{1}{2} x^3 \left| h_{n+1}^{(2)}(x) \right|^2 + \frac{1}{2} x^2 (2n+3) [j_n(x) j_{n+1}(x) + n_n(x) n_{n+1}(x)] \quad (36)$$

式中， j_n, n_n 和 $h_n^{(2)}$ 是球 Bessel 函数；而 Q'_n 由 Fante 基于 Counter 储能定义于 1969 年得到^[21]：

$$Q'_n(x) = x - \frac{1}{2} x^3 \times \left[\left| h_n^{(2)}(x) \right|^2 - j_{n-1}(x) j_{n+1}(x) - n_{n-1}(x) n_{n+1}(x) \right] \quad (37)$$

Q'_n 没有明确的物理意义。但为方便起见，下面将 Q_n 和 Q'_n 都称为模式 Q 。表达式(36)和式(37)较为复杂，Collin 和 Rothschild 在文献[20]曾将 Q_n 写成级数形式：

$$Q_n(x) = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{n+1}{x} \right) (C_n^2 + D_n^2) + \left(n + \frac{3}{2} \right) (C_n D_{n+1} - D_n C_{n+1}) - \frac{x^2}{2} (C_{n+1}^2 + D_{n+1}^2) \quad (38)$$

其中，

$$C_n = \sum_{m=0}^{2m \leq n} \frac{(-1)^m (n+2m)!}{(2m)! (n-2m)! (2x)^{2m}}$$

$$D_n = \sum_{m=0}^{2m \leq n-1} \frac{(-1)^m (n+2m+1)!}{(2m+1)! (n-2m-1)! (2x)^{2m+1}}$$

与式(36)一样，表达式(38)仍然过于复杂，很难直接看出其性质。Fante 在文献[21]中用数值计算列表的方法得到了一些模式 Q 的性质。作者在文献[1]中对这些性质做了严格的数学证明，并获得一些新的性质，其中最重要的是获得了模式 Q 的有限级数的形式：

$$Q_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{x^{2(n-m)+1}} \frac{[n(n+2) + (n-m)^2 - m] (2n-m)! (2n-2m)!}{2^{2(n-m)+1} [(n-m)!]^2 (n+1-m)m!}$$

$$Q'_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{x^{2(n-m)+1}} \frac{m(2n+1-m)(2n-m)! (2n-2m)!}{2^{2(n-m)+1} [(n-m)!]^2 (n+1-m)m!} \quad (39)$$

与模式 Q 的原始定义式(36)和式(37)以及级数表达式(38)相比，上面级数形式更加简单明了且易于计算。一些重要的性质可从模式 Q 的有限级数表达式中一眼看出。

天线容量上限式(34)和式(35)的物理意义如下：当天线最大尺寸和工作频率给定后，不管在天线外接球内采用什么手段(如改变天线几何结构和类型，选用不同材料等)，全向或定向天线的容量分别不会超过式(34)或式(35)。式(34)和式(35)也表明，当天线增益(或储能)一定时，天线储能(或增益)存在下限(或上限)。

作者于 2003 年推导出上述天线容量上限^[17]，多年后又采用两种独立方法对它们进行了重新推导。第 1 种方法是基于传统的 Q 值定义式(27)和作者新发明的代数不等式^[18]，摆脱了 2003 年论文中用到的一个假设，使得数学推导更趋严谨。第 2 种方法是基于 Q 的 IEEE 标准定义式(26)，简化了整个推导过程^[19]。3 种独立数学推导方法，相互印证，结论相同。

天线容量上限在天线设计中至关重要，是所有天线设计的指南。给定天线尺寸和工作频率，它们可用来确定最大可能天线容量；或者给定天线容量和工作频率，它们可用来确定最小可能天线尺寸。天线容量上限在小天线设计中显得尤为重要。

当天线仅辐射 TE 或 TM 模时，天线 Q 的下

限为:

$$\min Q = Q_1 = \frac{1}{ka} + \frac{1}{(ka)^3} \quad (40)$$

上面 Q_1 的解析表达式最早出现在 Collin 和 Rothschild 的文献 [20] 中。很多文献误将上式当作是 Chu 的极限。后面将说明, 上式与 Chu 的极限是有明显差别的。 Q_n 的一般级数形式见式 (39)。对一般天线而言, 天线 Q 的下限为:

$$\min Q = \frac{Q_1 + Q'_1}{2} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{2(ka)^3} \quad (41)$$

这个下限最早由 Fante 于 1969 年得到^[21]。式 (40) 和式 (41) 的严格的数学证明见作者的论文文献 [17]。很多参考文献误将式 (40) 作为一般天线 Q 的下限, 读者当留意, 以免被误导。对窄带系统而言, 可以证明天线百分带宽与 Q 值一般互为倒数^[5], 因此式 (41) 式实际给出了天线带宽的上限:

$$\max B_f = \frac{2(ka)^3}{2(ka)^2 + 1} \quad (42)$$

给定天线容量, 可以折衷考虑增益与带宽。如通过牺牲增益可以提高带宽, 但后者要受到上限式 (42) 的约束。也可通过牺牲带宽来提高增益。当带宽趋于零时, 增益在理论上可以达到无穷大, 成为超增益天线。但超增益天线的带宽很窄, 天线储能高、损耗大, 故实用性不大。

天线性能上限 $\max(GB_f)|_{\text{dir}}$, $\max(GB_f)|_{\text{omn}}$ 和 $\max B_f$ 都是天线最大电尺寸 ka 的单调递增函数, 故天线性能会随着尺寸增大而提升。图 7 给出了天线性能上限曲线, 它们是天线设计的指南。从图中可看出, 当天线尺寸较小时, 所有性能曲线斜率较大, 即微小的尺寸变化会明显影响天线性能。随着天线尺寸增大, 曲线斜率逐渐变小, 天线性能改善变慢。因此, 必须折衷选择天线尺寸以获得好的性价比。

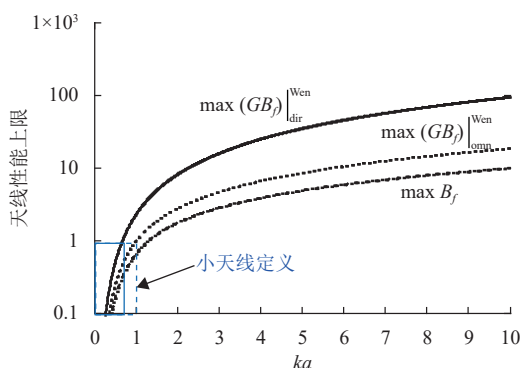


图 7 天线性能上限

例 4 根据性能要求, 确定天线尺寸。给定定向天线性能要求: $G = 10$, $B_f = 0.2$ 。可知 $GB_f|_{\text{dir}} = 2$, 通过式 (35) 或图 7 可知, 天线的尺寸必须满足 $ka > 0.928$ 。

1.2.3 电小天线的设计理论

受物理上的限制, 小天线设计的侧重点一般放在天线容量的最大化上, 如何通过有效手段改善天线容量是小天线设计的根本任务。在所有天线设计中, 以电小天线的设计最富挑战性。根据天线性能极限公式 (34)、式 (35)、和式 (42) (或见图 7 所示性能曲线), 当天线尺寸变小时, 天线容量与带宽都会急剧下降, 这是不可抗拒的客观规律。故在尺寸受限的情况下, 天线设计的主要任务是充分利用现有空间, 使小天线的性能尽可能逼近性能极限。

小天线过去没有统一的定义。通常, 当天线尺寸满足^[22-24]:

$$ka < 0.5 \text{ 或 } ka < 1 \quad (43)$$

时, 就叫小天线。由于天线容量是天线的重要指标且其上限与天线尺寸成单调递增关系, 故可根据天线容量来定义小天线。文献 [1] 将小天线定义为容量小于 1 的天线, 即小天线的容量满足:

$$GB_f < 1 \quad (44)$$

由式 (34) 和式 (35) 可知, 当天线容量满足式 (44) 时, 全向天线与定向天线的电尺寸必须分别满足:

$$ka|_{\text{omn}} < 1, \quad ka|_{\text{dir}} < 0.667 \quad (45)$$

可看出, 式 (45) 与定义式 (43) 相近或一致。

从天线设计的角度来讲, 用增益-带宽积 (即天线容量) 来衡量天线大小更加方便。大多数情况下, 增益-带宽积是给定的性能指标, 由此可立即判别出待设计天线是否属于小天线, 从而考虑采用相应的方法对其进行优化设计。

对小天线而言, 天线性能上限表达式 (34) 与式 (35) 中只有第 1 项起主要作用, 忽略高阶项有:

$$\max GB_f|_{\text{dir}}^{\text{small}} = 3 \max B_f \quad (46)$$

$$\max GB_f|_{\text{omn}}^{\text{small}} = 1.5 \max B_f \quad (47)$$

式中, $\max B_f$ 由式 (42) 定义。可看出定向天线的最大可能容量是全向天线的两倍。当小天线达到最大带宽时, 定向天线与全向天线的最大可能增益分别为 3 与 1.5。为方便起见, 将天线容量或带宽要求记作 P 。当 P 给定后, 由式 (42)、式 (46) 和式 (47)

可求得小天线尺寸必须满足：

$$ka \geq \frac{2}{3}P + \sqrt[3]{\frac{8}{27}P^3 + \frac{1}{2}P + P\sqrt{\frac{8}{27}P^2 + \frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}P^3 + \frac{1}{2}P - P\sqrt{\frac{8}{27}P^2 + \frac{1}{4}}} \quad (48)$$

式中，对给定的定向天线容量、全向天线容量、带宽要求， P 分别取为：

$$P = \frac{1}{6}GB_f \Big|_{\text{dir}}^{\text{small}}, \quad P = \frac{1}{3}GB_f \Big|_{\text{omn}}^{\text{small}}, \quad P = \frac{1}{2}B_f$$

例5 定向小天线设计。

设定向天线增益要求 $G > -1$ dBi，带宽范围 3.3~3.8 GHz。根据上述性能要求得到：

$$G = 0.794$$

$$B_f = (3.8 - 3.3)/3.55 = 0.141$$

$$GB_f \Big|_{\text{dir}} = 0.794 \times 0.141 = 0.112$$

故待设计天线容量小于1，属于电小天线。根据式(48)，为满足性能要求，天线最大电尺寸必须满足：

$$ka \geq 0.278$$

或最大尺寸满足：

$$2a \geq 7.5 \text{ mm}$$

小天线一般都是高 Q 天线，带宽较窄。如何提高小天线的带宽是工程中要解决的难题。利用储能表达式(22)和式(23)，小天线 Q 值可表示成Rayleigh商：

$$Q = \frac{\omega(\tilde{W}_e + \tilde{W}_m)}{P_{\text{rad}}} = \frac{(\hat{A}\mathbf{J}, \mathbf{J})}{(\hat{B}\mathbf{J}, \mathbf{J})} \quad (49)$$

对小天线而言，式中 \hat{A} 和 \hat{B} 为积分算符，具体表达式见文献[14]。式(49)取极小值的必要条件是：

$$\hat{B}\mathbf{J} = \alpha\hat{A}\mathbf{J} \quad (50)$$

求解上面特征值方程得到最优电流分布。文献[14]中有算例说明，这里不再赘述。若将式(49)中的电流分布固定，该式还可用来优化天线的几何结构。还可将天线容量作为目标函数最大化获得最佳电流分布，具体讨论见文献[19]。

对一些简单小天线，可以求得 Q 值的解析解。如对图8所示的偶极子、折叠偶极子、环天线，可分别求得带宽的解析解为^[15]：

$$\begin{aligned} B_{\text{dipole}} &= \frac{(kb)^3}{6\ln(b/a)} \\ B_{\text{folded dipole}} &= \frac{2(kb)^3}{6\ln(b/a)} \\ B_{\text{loop}} &= \frac{\pi(kb)^3}{6\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (51)$$

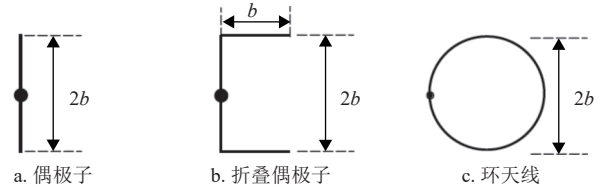


图8 电小天线

可看出，随着空间利用率提高，天线的带宽逐步改善。结合天线性能上限以及后面要讨论的谐振模式理论和细线模型理论，可以得到小天线设计的一些基本原则：1) 尽量充分利用几何空间。在有限的空间内，通过弯折、缠绕等手段，可以降低天线周围储能，提高天线带宽。2) 尽量激发天线的最低谐振模式。当天线工作在最低谐振模式时，电流变化相对平稳，有利于提高天线增益。3) 选择合理的几何形状。根据细线模型理论，电流分布对细线的几何形状不敏感。根据已知的电流分布解析解，可通过优化几何形状改善增益-带宽积。4) 通过介质加载提高天线电长度。

1.2.4 天线性能上限研究的历史回顾

作为上面讨论的补充，有必要回顾一下天线性能极限研究的发展历史。天线性能极限的研究最早可追溯到1948年Chu的工作^[25]。在假定天线为全向且仅辐射横电波(TE)模式或横磁波(TM)模式的特殊情况下，Chu得出了增益 G 和 G/Q 上限以及 Q 的下限。在Chu的分析中，没有用到Counter同年发表的关于储能定义的建议^[13]，而是采用了不同的处理方式。对球面波导中的各个模式，可引入阶梯等效电路。对高阶模式而言，阶梯等效电路的储能元件数目太大，计算所有元件的总储能变得特别复杂。为了简化计算，Chu借用低频电路的结果，推导了球面波模式的近似 RLC 等效电路。通过计算 RLC 等效电路中的电抗元件的储能，从而求得球面波模式的电储能和磁储能，进而定义模式品质因素，这里记作 Q_n^{Chu} 。由于计算方法不同， Q_n^{Chu} 与前面讨论的模式品质因素 Q_n 在数值上存在差异。如图9所示，当 $ka < 1$ 时， Q_n 与 Q_n^{Chu} 近似相等。但当 ka 较大时， Q_n^{Chu} 的衰减速率远大于 Q_n ，两者差别较大。值得指出，Chu的近似方法仅适用于窄带系统或高 Q 系统，而 Q_n^{Chu} 中所用储能的定义仅适用于球面波。

Chu通过级数截断和简单求导运算，求得增益 G 、品质因素 Q 以及 G/Q 的最优值为：

$$\max G \Big|_{\text{omn}}^{\text{Chu}} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \frac{2n+1}{n(n+1)} [P_n^1(0)]^2 \quad (52)$$

$$\min Q_{\text{omn}}^{\text{Chu}} = Q_1^{\text{Chu}} \quad (53)$$

$$\max \frac{G}{Q}_{\text{omn}}^{\text{Chu}} = \sum_{n=1,3,5}^N \frac{(2n+1)|P_n^1(0)|^2}{n(n+1)Q_n^{\text{Chu}}} \quad (54)$$

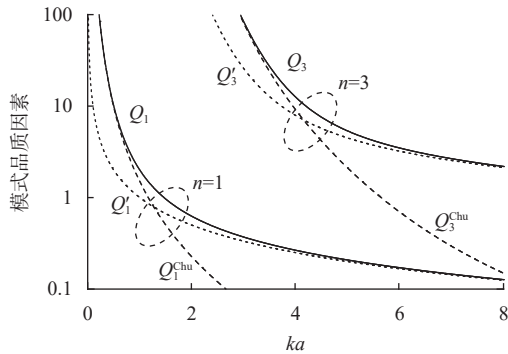


图 9 模式品质因素的比较

由于增益并无上限（其球面波展开级数是发散的），Chu 不得不将该无穷级数截断，得到有限展开式 (52)。这种截断发散级数使其变为有限值的做法在数学上是有问题的，可能会导致荒谬的结论。首先，发散级数没有和值，通过截断为其指定一个有限值是任意的，在标准分析中毫无意义。其次，截断忽略了发散的本质。发散级数通常出现在项的增长无法控制或无限振荡的情况下。在某个点截断这样的级数会忽略级数的内在行为，导致得到一个虚假的有限值，无法反映级数真正的发散性质。第三，不同的截断点可能会产生差异极大的有限和，使得这种方法缺乏一致性。第四，截断违反了数学的严谨性。在数学中，对级数的运算（如求和）必须遵循严格的定义。收敛的标准定义（通过部分和的极限）不允许通过截断为发散级数指定有限值，这样做违背了分析学的基本原理。截断对于收敛级数是一种有效的数值近似技术（误差可以得到控制），但对于发散级数在数学上是不合理的，因为它忽略了发散级数的定义属性：缺乏收敛性。如果在计算中遇到发散级数，这通常表明该级数不适合直接求和，可能需要采用其他方法（如正则化或重整化）。

与 Chu 的做法相同，Harrington 采用截断发散级数获得了定向天线的最大增益^[26]：

$$\max G = N(N+2) = ka(ka+2) \quad (55)$$

式中， N 为发散级数截断后所保留的项数。显然，当项数 N 增大时，增益增大，增益并无上限。式 (55) 最后一项可令 $N = ka$ 而得到。这样做的理由是当 $N >$

ka 时，球面波模式会逐渐截止。显然，Harrington 的增益上限与 Chu 的增益上限类似，同样存在逻辑上的缺陷，是不可靠的。事实上，式 (55) 是非常粗糙的。如对例 4 中的增益要求 $G = 10$ ，由式 (55) 求得天线的尺寸必须满足 $ka > 2.317$ ，这是例 4 中所需尺寸要求的 2.5 倍。因此，即使无带宽约束的情况下，Harrington 的极限式 (55) 给出的尺寸要求也远高于作者的极限式 (34) 给出的尺寸要求。

将 Chu 的 Q 值下限式 (53) 与式 (40) 相比，两者在 ka 较大时，差别很大；与 Fante 的结果式 (41) 相比，Chu 的 Q 值下限也没有达到理论上的最优值。Chu 的全向天线的 G/Q 的上限值 (54) 与作者的结果式 (34) 相比也有很大的差别：Chu 的上限值 (54) 是人为截断的级数形式并采用等效电路定义的模式 Q ；而作者的上限值 (34) 是收敛的无穷级数形式，且采用式 (8) 定义模式 Q 。图 10 给出了式 (54) 与式 (34) 的比较。可看出，当 ka 较小时，两者相近；但 ka 增大时，由于 Q_n^{Chu} 迅速趋于零，上限式 (54) 随之迅速增大，其增长速率和数值均超出了经验范围，其数值甚至高于同样尺寸的定向天线上限值 (35)（见图 7）。Chu 可能注意到式 (54) 的不合理，在进行数值计算时采用了如下做法：当式 (54) 中的 Q_n^{Chu} 小于 1 时，强迫令其等于 1。由此得到的上限记作 $\widetilde{\max}(G/Q)_{\text{omn}}^{\text{Chu}}$ ，其变化曲线如图 10 所示。经此“特殊处理”后，上限 $\widetilde{\max}(G/Q)_{\text{omn}}^{\text{Chu}}$ 整体低于上限式 (34)，远低于式 (54)；且当 ka 较小时出现异常波动，而当 ka 较大时变成常数，与经验相悖。

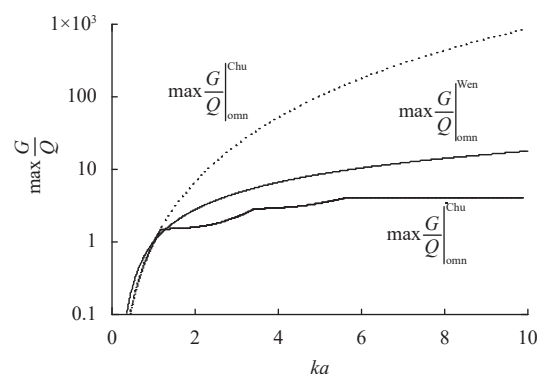


图 10 全向天线 G/Q 上限比较

理论分析与实践表明，基于 Counter 储能定义得到的模式品质因素 Q_n 和 Q_n' 比基于 Chu 的近似 RLC 等效电路算得的模式品质因素 Q_n^{Chu} 更加合理、更加准确，是继 Collin 工作^[20] 后天线行业普遍采用的方式。可以断定，上限式 (34) 比上限式 (54) 更加合理，更加精准。

在文献 [27] 中, Fante 推导了定向天线的 G/Q 上限:

$$\max \frac{G}{Q} \Big|_{\text{dir}}^{\text{Fante}} = \text{Larger of} \begin{cases} 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{|\gamma_{nm}|^2}{\lambda_{nm} Q_n} + \frac{|\beta_{nm}|^2}{\lambda_{nm} Q_n} \right) \\ 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{|\gamma_{nm}|^2}{\lambda_{nm} Q'_n} + \frac{|\beta_{nm}|^2}{\lambda_{nm} Q_n} \right) \end{cases} \quad (56)$$

式中, γ_{nm} 和 β_{nm} 为常数。Fante 在推导过程中采用传统的 Q 值定义, 没有引入必要的约束, 导致最终结果仍然是二择一的形式, 而非定向天线容量上限式 (35) 所示的简单形式。对式 (56) 的错误原因, 文献 [17] 有详细说明。

1.3 周边环境对天线的影

在天线周边存在其他散射体时, 天线的工作性能会发生改变。从本质上来讲, 周边媒质应视为天线的一部分, 天线的设计要考虑周边媒质的影响。天线周边媒质不仅会改变天线方向图, 还会影响天线的储能和耗能, 进而改变天线的输入阻抗。周边媒质对天线电路参数的影响可用微扰法来进行研究。

图 11 所示为多天线系统中的任意两个天线单元 i 和 j , 区域 V_p ($p=1, 2, \dots, m$) 为媒质参数发生变化区域, 其边界记作 S_p 。考虑下面两种情景。

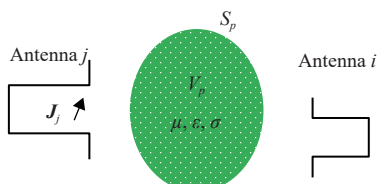


图 11 散射体对多天线系统散射参数的影响

情景 1: 区域 V_p 中的导磁率、介电常数和电导率分别为 μ 、 ϵ 和 σ 。设天线单元 i 辐射时, 其他单元 j ($j \neq i$) 处于接收状态, 天线单元 i 所产生的场记作 $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$, 单元 i 和 j 之间的归一化传输系数记作 S_{ij} 。

情景 2: 区域 V_p 中的导磁率、介电常数和电导率分别变为 μ' 、 ϵ' 和 σ' 。设天线单元 i 辐射时, 其他单元 j ($j \neq i$) 处于接收状态, 天线单元 i 所产生的场记作 $(\mathbf{E}'_i, \mathbf{H}'_i)$, 单元 i 和 j 之间的归一化传输系数记作 S'_{ij} 。

利用互易定理, 不难推得^[28]:

$$S'_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{2a_i^{(i)} a_j^{(j)}} \times \sum_{p=1}^m \int_{V_p} \{j\omega(\mu' - \mu) \mathbf{H}'_i \cdot \mathbf{H}_j - [\sigma' - \sigma + j\omega(\epsilon' - \epsilon)] \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}_j\} dV \quad (57)$$

上式右侧第 1 项对应于从天线 i 到天线 j 的直接路径所产生的贡献。第 2 项表示由 m 个散射体贡献的 m 个多径分量。当传播介质中存在大量散射体时, 来自不同路径的波在每个接收天线单元处的叠加方式不同, 从而使得不同接收天线的接收信号相互独立。众所周知, MIMO 系统的性能取决于传播信道。传播信道模型通常可分为两类: 基于信息论的统计模型和基于测量或数值模拟的特定场地模型。可以证明, 信道矩阵即为散射矩阵, 故上式提供了一种用于确定特定场地 MIMO 信道模型的预测方法, 详细讨论见文献 [28]。

对于图 12 所示的单天线系统, 类似地可以得到天线输入阻抗的微扰公式^[3]:

$$Z' - Z = \frac{1}{I^2} \times \int_{V_p} \{j\omega(\mu' - \mu) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} - [\sigma' - \sigma + j\omega(\epsilon' - \epsilon)] \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\} dV \quad (58)$$

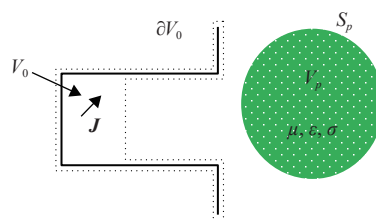


图 12 散射体对天线输入阻抗的影响

2 单天线设计方法

上一节介绍了天线的通用理论, 它们是天线设计的基础。这些基本理论或有助于理解天线的工作原理, 或指明了天线性能的设计目标。本节介绍设计单天线的谐振模理论和细线模型理论。

2.1 单天线设计的谐振模式理论

引言中提到单天线设计的两类方法, 其中模式理论最为基本, 涉及天线工作的本质。模式理论大多可归结为典型的或广义特征值问题^[1]。特征值 (eigenvalue) 问题普遍存在于物理学的各个分支。物理上, 特征模 (eigenmode) 代表无外加激励时系统的可能状态。对线性系统而言, 系统的任意状态都可以表示成所有特征模的线性组合, 其展开系数则由源条件与初始条件决定。当展开式中只有一个或几个模式起主要作用时, 可以大大地简化问题的求解。因此特征值理论在数学物理中占有统治地位。

波导与谐振腔中的模式理论属于典型的特征值问题。开放的自由空间可看作球面波导, 其模式理论 (即球面波理论) 也建立在特征值问题的基础

上^[1-3]。对散射体而言,存在不同的模式理论。有些模式理论建立在复数域的基础上,相应的特征值与特征模是复的,如自然谐振模式(natural resonant modes)等。有些模式理论则建立在实数域的基础上,如与工作频率有关的特性模(英文“characteristic modes”也翻译为特征模。与本文特征模一词区别起见,这里称为特性模)。

由于天线多工作于谐振状态,上面提到的模式在大多数情况下不代表天线工作时的真实状态(如特性模理论中的电感模式与电容模式),由此导致天线的真实状态必须用多个模式的线性组合来表征(这在数学上要求证明模式集合的完备性),增加了求解问题的复杂性。当天线谐振时,天线的电储能与磁储能相等,相应的场分布称为谐振模式,故直接求取天线谐振时对应的谐振模式是最有效的天线设计方法。

天线的谐振模式理论建立在天线的储能研究的基础上。利用天线的电场储能与磁场储能表达式,可以建立求取谐振模式的积分方程。与其他模式理论相比,该理论的优势是不包含与天线实际工作状态无关的冗余模式。一旦获得谐振模式,便可选择适当的激励方式直接进行激发,实现单频、多频或宽频工作。谐振模式理论有助于理解复杂天线结构的固有谐振,为谐振天线的工作原理提供了更清晰的物理图像,在天线设计中至关重要。

2.1.1 金属天线的谐振模理论

先介绍金属天线的谐振模式求解^[29-30]。设电流源密度 \mathbf{J} 分布在有限区域 V_0 之中,其周围为自由空间(μ_0, ϵ_0)。根据天线电储能 \tilde{W}_e 和磁储能 \tilde{W}_m 的表达式(22)和式(23),不难推得天线谐振时(储能差为零)电流必须满足:

$$0 = \tilde{W}_m - \tilde{W}_e = (\hat{L}\mathbf{J}, \mathbf{J}) = \frac{\eta}{16\pi c} \times \int_{V_0} \int_{V_0} \left[\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \nabla' \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \right] \frac{\cos(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') \quad (59)$$

式中,积分算子 \hat{L} 为定义为:

$$\hat{L}\mathbf{J} = \frac{\eta}{16\pi c} \int_{V_0} \left[\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} (\nabla' \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')) \nabla \right] \frac{\cos(kR)}{R} dV(\mathbf{r}')$$

不难证明,式(59)式成立的充要条件是:

$$\hat{L}\mathbf{J} = 0 \quad (60)$$

用数值方法求解积分方程式(60),便得到天线的谐振频率和谐振电流模式。通过激发一个或多个

模式,可以获得所需的天线性能。与其他模式理论相比,谐振模式能做到一步到位,直接给出天线的实际工作状态。

例6 圆极化交叉偶极子天线^[15]。图13a是由两个平面金属条带组成的十字形结构(即源区 V_0),其中,水平金属条和垂直金属条的长度分别为 $l_1 = 118 \text{ mm}$ 和 $l_2 = 97 \text{ mm}$,宽度均为 $w = 2 \text{ mm}$ 。算得十字形结构的前3个谐振频率分别为1.190、1.428、1.443 GHz。相应的谐振电流分布如图13b~图13d所示。

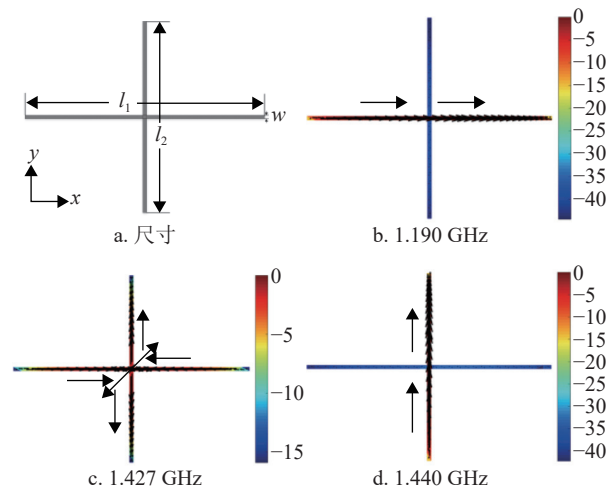


图 13 十字形结构的谐振电流分布

可以看出,十字形结构第一谐振模式的电流分布集中在水平方向的金属条上。第三谐振模式的电流分布集中在垂直方向金属条上。第二谐振模式的电流分布则存在两个不同的电流路径,其中一条路径由十字形结构的垂直方向顶部的金属支臂和水平方向右侧的金属支臂组成,另一条路径由垂直方向底部的金属支臂和水平方向左侧的金属支臂组成。

十字形结构的第一和第三谐振模式的电流最大值正好位于该结构的中心位置。为了激励这两个谐振模式,将十字形结构分成两个独立的部分。第一部分由垂直方向顶部的金属支臂和水平方向右侧的金属支臂组成,第二部分由垂直方向底部的金属支臂和水平方向左侧的金属支臂组成。在十字结构中心引入一个小缝隙,作为馈电点,成为实现圆极化的交叉偶极天线。

图14给出了圆极化交叉偶极子天线实物图和反射系数。可以看出,由于同时激励第1和第3个谐振模式,天线的带宽内呈现两个谐振点,天线带宽得到明显扩展。因此,谐振模式理论清晰地表明

了扩展天线带宽的物理机制及其可能性，它也是多频段天线设计的理论基础。

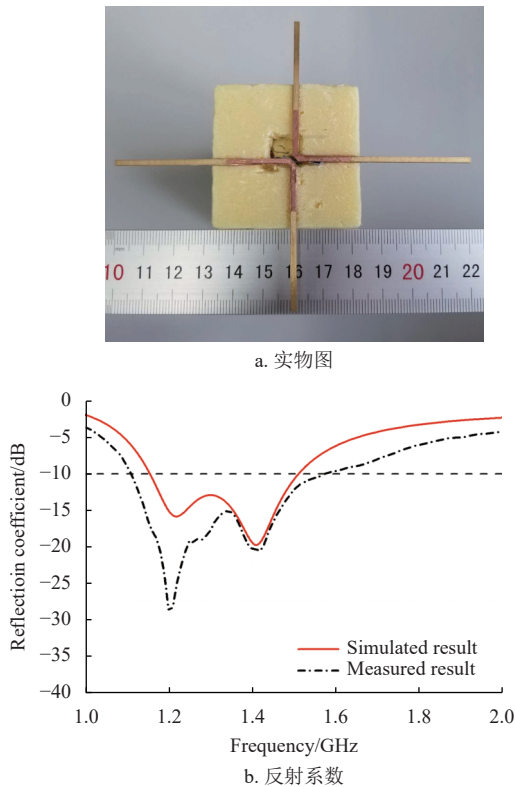


图 14 圆极化交叉偶极子天线仿真和测量结果

2.1.2 介质加载天线的谐振模理论

如图 15 所示，设源区 V_0 同时含有金属和介质，金属表面记作 S_e ，其上电流分布记作 J_S ；介质区域记作 V_d ，其介电常数设为 ϵ_d 。根据电磁场补偿原理，介质的影响可用如下等效体电流代替^[1]：

$$\mathbf{J} = j\omega(\epsilon_d - \epsilon_0)\mathbf{E} \quad (61)$$

因此，源区 V_0 中的总电流分布为 $J_S + J$ 。此时，电、磁储能差为零的条件式 (59) 应修改为：

$$\frac{\eta}{16\pi c} \int_{V_0} \int_{V_0} \left[\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \times \frac{\cos(kR)}{R} dV(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}') - \int_{V_0} \frac{1}{4} (\epsilon_d - \epsilon_0) |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 dV(\mathbf{r}') = 0 \quad (62)$$

上式左边最后一项代表介质引入后新增的电储能。式 (62) 可写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_S \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} L^{MM} & L^{DM} \\ L^{MD} & Z^{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_S \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = 0 \quad (63)$$

式中，积分算子 $L^{mn}(m, n = D, M)$ 的具体表达式见文献 [31]。可以证明，式 (63) 有非零解的充要条件是：

$$\begin{bmatrix} L^{MM} & L^{DM} \\ L^{MD} & Z^{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_S \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = 0 \quad (64)$$

由此可求得金属-介质混合散射体的谐振频率和谐振电流模式^[31]。

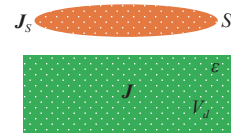


图 15 金属-介质散射体

例 7 介质涂敷金属线天线。图 16 所示为介质涂敷金属圆柱，金属圆柱半径 $r_1 = 3.175 \text{ mm}$ ，长度为 250 mm ；介质涂敷层的相对介电常数为 $\epsilon_r = 3.2$ ，其外半径为 $r_2 = 6.35 \text{ mm}$ 。利用式 (64) 可求得介质涂敷金属圆柱的前 3 个谐振频率为 0.492 、 1.012 、 1.531 GHz 。图 17a~图 17c 给出了 3 个谐振频率的模式电流分布和相应的辐射模式，它们分别与半波振子、全波振子、二分之三波长振子的电流分布和方向图相似。通过中心馈电，可同时激发第一和第三个模式，得到双频介质涂敷金属线天线。图 18 为该天线的反射系数模拟结果，可看出天线的谐振频率出现在 0.50 GHz 和 1.55 GHz 处，与谐振模式理论求得的第一和第三个谐振频率非常接近。计算表明，天线的辐射方向图与图 17 给出的辐射谐振模式结果完全一致。

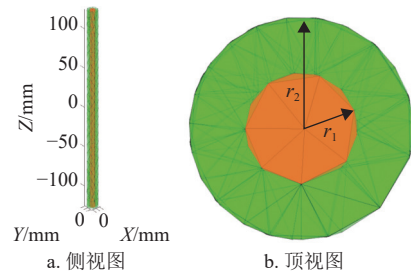
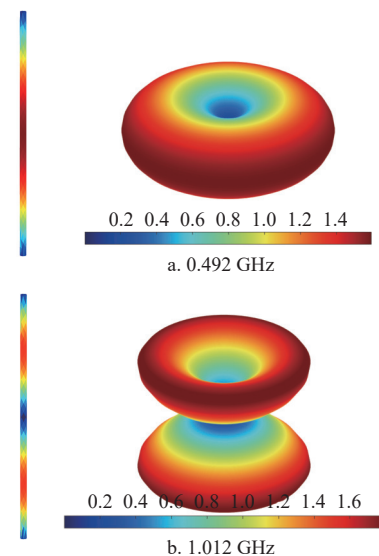


图 16 介质涂敷金属线



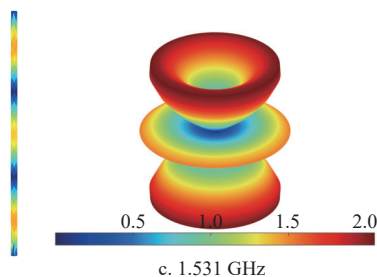


图 17 介质涂敷金属线的谐振电流分布与辐射谐振模式

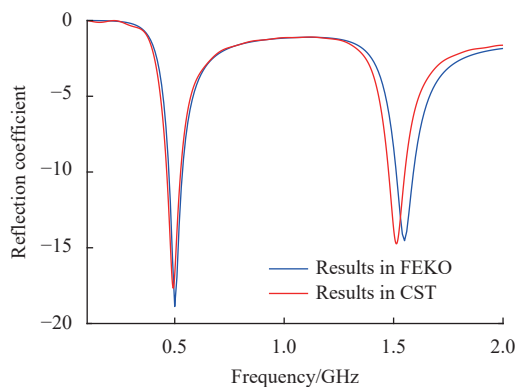


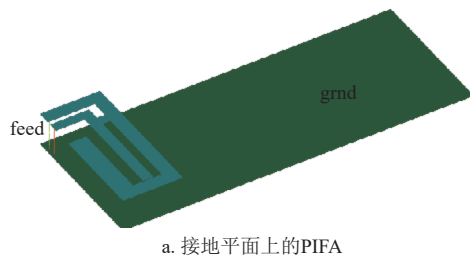
图 18 反射系数的模拟结果

2.2 金属天线的细线模型理论

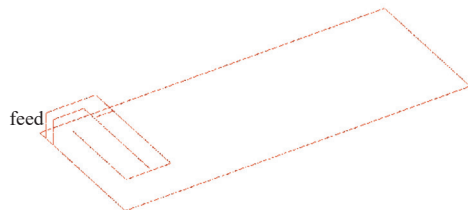
谐振模式理论通过揭示天线结构的内在谐振状态, 获得各种模式的激励方法。引言中还提到单天线设计的另一种方式, 即给定馈电点位置后通过改变天线几何尺寸来获得天线性能。本节介绍的线模型理论是基于给定的馈电位置和天线几何结构去求解天线的近似电流分布。

金属天线是最常见的天线形式。由于趋肤效应, 金属天线的电流主要分布在边缘, 可用线电流分布来近似, 而金属天线本身则可用金属细线模型近似。因此金属天线的辐射性能和工作机制可通过简单的细线模型来大致说明^[32]。对一般线天线而言, 通常要求解积分方程以获得电流分布的数值解。当导线半径趋于零时, 线上的渐近电流分布满足波动方程, 此时可求得电流分布的解析解。细线模型及其电流分布抓住了原金属天线的基本特征, 可用来理解复杂金属天线的工作机理。

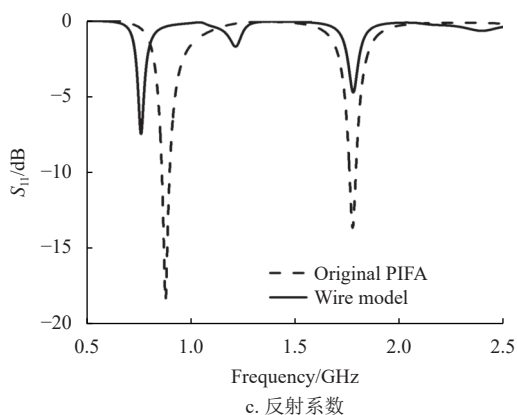
图 19a 为接地平面上的平面倒 F (planar inverted-F antenna, PIFA) 天线, 图 19b 是其线模型。从图 19c 所示的反射系数和图 20 所示方向图仿真结果可看出, 细线模型与原 PIFA 天线有十分相近的辐射性能。



a. 接地平面上的 PIFA

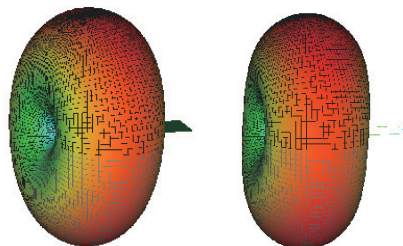


b. 金属线模型



c. 反射系数

图 19 金属天线的线模型



a. PIFA b. 线模型

图 20 方向图 (900 MHz)

线天线的辐射机理易于理解。因此, 将金属天线简化成线模型不仅有助于理解天线的工作原理, 还可为天线设计提供新的思路。对细线模型, 可以得到电流分布的渐近解析解。电流分布的解析解与数值解相比, 更能够揭示天线工作的物理本质, 提供直观的物理洞察。特别是在复杂天线结构设计中, 解析解可以帮助工程师简化问题, 抓住主要矛盾, 从而更高效地进行天线设计和优化。

考虑图 21 所示任意细线天线, 其半径 $a \rightarrow 0$, 中心轴线弧长记作 l , 外加入射电场记为 \mathbf{E}^{in} 。可以证明, 该细线上的感应电流 $I(l)$ 的渐近解满足如下常微分方程^[32]:

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} + k^2 I(l) = -j\omega C_0 \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot \mathbf{u}_l(l) \quad (65)$$

式中, $\mathbf{u}_l(l)$ 为沿中心轴线的单位矢量; $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$, $C_0 = \mu \varepsilon / L_0$; $L_0 = -(\mu / 2\pi) \ln(ka)$ 。由于导线半径趋于零, 局部外加点源 $\mathbf{E}^{\text{in}} \cdot \mathbf{u}_l(l)$ 可用 Delta 函数代替:

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} + k^2 I(l) = -j\omega C_0 \delta(l-l') \quad (66)$$

式中, l' 表示外加点源的位置。下面给出一些典型结构的电流分布, 具体求解过程见文献 [32]。若令上式右边为零, 并引入适当的边界条件, 可求得线状结构的谐振模式。

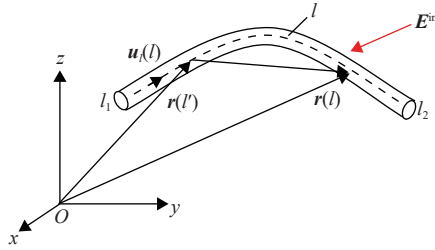


图 21 任意细线天线

例 8 偶极子天线。图 22 为任意形状偶极子天线, 其长度为 L , 外加点源位于 $l=l'$ 。偶极子天线上的电流分布为:

$$I(l) = -\frac{j\pi}{\eta \sin(kL) \ln(ka)} \times [-\cos k(L-|l-l'|) + \cos k(L-l-l')] \quad (67)$$

式中, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 。对中心馈电的直线偶极子天线, 上式退化为大家熟悉的形式。

由于偶极子天线两端电流为零, 求解下面特征值方程:

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} + k^2 I(l) = 0 \quad I(0) = I(L) = 0 \quad (68)$$

可以得到偶极子天线的谐振模式:

$$I_n(x) = \sin(k_n l) \quad (69)$$

式中, $k_n = n\pi/L (n=1, 2, \dots)$ 。由此可求得偶极子天线的谐振波长为:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n=1, 2, \dots \quad (70)$$

因此, 为了使得偶极子天线工作在谐振状态 (即工作波长等于谐振波长), 偶极子的长度必须选作:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \quad n=1, 2, \dots \quad (71)$$

显然当偶极子天线工作在最低谐振模式时, 偶极子长度为半个波长。

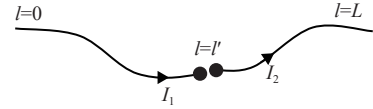


图 22 偶极子天线

例 9 环天线。图 23 为任意形状环天线, 其长度为 L , 外加点源位于 $l=l'$ 。环天线上的电流分布为:

$$I(l) = \frac{j\pi}{\eta \ln(ka)} \frac{\cos \frac{k}{2}(L-2|l-l'|)}{\sin(k \frac{L}{2})} \quad (72)$$

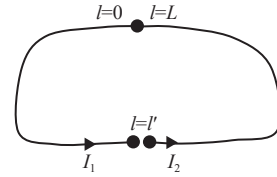


图 23 环天线

环天线的谐振模满足如下特征值方程:

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} + k^2 I(l) = 0 \quad I(0) = I(L) \quad I'(0) = I'(L) \quad (73)$$

环天线的谐振模式解为:

$$I_n(l) = \begin{cases} \sin(k_n l) & n=1, 2, \dots \\ \cos(k_n l) & n=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (74)$$

式中, $k_n = 2n\pi/L$ 。由此可求得环天线的谐振波长为:

$$\lambda_n = \frac{L}{n} \quad n=1, 2, \dots \quad (75)$$

为了使得环天线工作在谐振状态, 环的长度必须选作:

$$L = n\lambda_n \quad n=1, 2, \dots \quad (76)$$

环天线通常工作在一阶谐振模式 ($n=1$), 此时环周长为一个工作波长。

例 10 多枝节线天线。图 24 所示线天线由 3 个长度分别为 L_1 , L_2 和 L_3 的枝节组成, 外加馈电点源位于枝节 1 上, 其坐标为 $l_1 = l'_1$ 。该天线上的电流分布为:

$$I_1(l) = \begin{cases} \frac{C'_1 \cos(kl'_1) + D'_1 \sin(kl'_1)}{\sin(kl'_1)} \sin(kl_1) & l_1 < l'_1 \\ C'_1 \cos(kl_1) + D'_1 \sin(kl_1) & l_1 > l'_1 \end{cases}$$

$$I_2(l) = \frac{-C'_1 \sin(kL_1) + D'_1 \cos(kL_1)}{\cos(kL_2)} \sin(kl_2)$$

$$I_3(l) = \frac{-C'_1 \sin(kL_1) + D'_1 \cos(kL_1)}{\cos(kL_3)} \sin(kl_3) \quad (77)$$

式中, 常数 C 和 D 的具体表达式见文献 [32]。

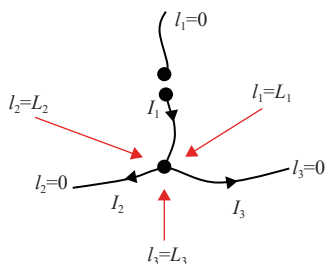


图 24 多枝节线天线

例 11 线—环天线。图 25 所示线天线由长度为 L_1 的偶极子天线一端连接闭环组成。为分析方便起见，将闭环成长度为 L_2 和 L_3 两段。外加馈电电源位于偶极子天线上，其坐标为 $l_1 = l'_1$ 。该线—环天线上的电流分布为：

$$\begin{aligned} I_1(l) &= \begin{cases} C_1 \cos(kl_1) + D_1 \sin(kl_1) & l < l'_1 \\ C'_1 \cos(kl_1) + D'_1 \sin(kl_1) & l > l'_1 \end{cases} \\ I_2(l) &= C_2 \cos(kl_2) + D_2 \sin(kl_2) \\ I_3(l) &= C_3 \cos(kl_3) + D_3 \sin(kl_3) \end{aligned} \quad (78)$$

式中，常数 C 和 D 的具体表达式见文献 [32]。

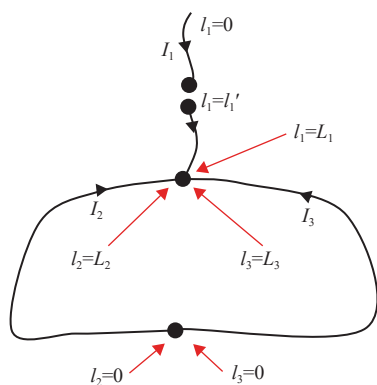


图 25 线—环天线

上面的电流分布解析公式只对非常细（半径趋于零）的导线成立，属于渐近解，均经过数值验证^[32]。这些解析公式抓住了一般有限半径线天线电流分布的基本特征，大大地简化了传统的线天线理论，对于理解线天线的工作原理和指导天线设计有极其重要的意义。可以看出，这些典型结构的电流分布与天线的具体形状无关，只取决于结构的几何长度、激励点位置和天线工作频率。

3 阵列天线设计的最大功率传输效率法

无线系统的功率传输效率（power transmission efficiency, PTE）定义为接收端接收功率与发射端发射功率之比。所有无线系统均以 PTE 的最大化

为设计目标。天线作为无线系统的门户，自然也应该以 PTE 的最大化为设计目标。最大功率传输效率法（MMPTE）就是基于上述考虑提出来的。MMPTE 以 PTE 为优化目标函数，为天线阵列和无线输能系统提供了最一般和最有效的设计方法。该方法不受阵列天线的单元类型，排列方式及所处环境的限制，总能给出唯一的最优解，与传统阵列设计方法相比，优势十分显著。本质上，天线设计的基本目标有两个：一是在天线的远区或近场区实现预定的方向图或场分布；二是使无线系统的收发传输效率最大化。采用 MMPTE 能够同时达成上述两个目标，可解决所有类型的阵列综合问题。原则上，阵列天线综合不再存在技术层面上的困难。

MMPTE 的基本思路最早见于文献 [3]，源于两阵列天线之间的输能研究。历经十余年的发展完善，该方法已经日趋成熟。文献 [33] 对其理论体系及相关应用进行了系统阐述。与传统天线综合方法高度依赖电磁场理论不同，MMPTE 将场综合问题转化为电路分析问题，大幅降低了阵列天线的设计门槛，使得一些场论知识储备有限的工程师也能从事阵列天线设计工作。由于系统电路参数总可通过仿真或测量获取，因此 MMPTE 适用于任意复杂的阵列设计问题。当问题过于复杂而无法仿真时，可借助测量获得电路参数。MMPTE 中的电路系统参数包含了阵列天线周围的所有环境信息，因此能够适应复杂环境，并且确保实现给定阵列的最佳性能。实践表明，MMPTE 在简便性、适用性、通用性及设计精度方面均优于大多数现有阵列设计方法，并且在算法层面可以无差别地用于近场与远场综合问题^[33-66]。

近年来，MMPTE 在方法改进和应用拓展方面均有新的进展。本节对这些新进展进行归纳总结，以便读者能更清晰地了解和掌握 MMPTE 方法。首先介绍无约束 MMPTE（UMMPTE）。

3.1 无约束 MMPTE（UMMPTE）

考虑图 26 所示的位于任意复杂环境中的无线输能（wireless power transmission, WPT）系统。

图中 $[a_i] = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$ ， $[b_i] = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ 分别为发射阵列的归一化入射波和反射波列向量；而 $[a_r] = [a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n}]^T$ ， $[b_r] = [b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{m+n}]^T$ 则分别表示接收阵列的归一化入射波和反射波列向量。该系统可看作 $m+n$ 端口网络，它由 m 个发射天线和 n 个测试接收天线组

成。接收天线单元端接负载，其反射系数记作 $\Gamma_i (i = m+1, \dots, m+n)$ 。该系统的 PTE 可表示成广义瑞利商：

$$\text{PTE} = \frac{[a_r]^H [A] [a_r]}{[a_r]^H [B] [a_r]} \quad (79)$$

式中，矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 都是正的，它们由系统散射参数确定^[33]。当式 (79) 达到极值时，相应的 $[a_r]$ 必须满足如下广义特征值方程：

$$[A][a_r] = \text{PTE}[B][a_r] \quad (80)$$

由于矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 都是正的，故上式所有特征值非负，且特征值数目与矩阵 $[A]$ 的秩相同，其中最大特征值所对应的特征向量即为所求的最优激励分布 (optimal distribution of excitation, ODE)。值得指出，相应于零特征值的特征向量可用来产生方向图零陷。式 (80) 可用来实现简单的波束赋形。如采用一个测试天线可以实现单波束扫描或聚焦；采用多个测试天线可以实现多波束扫描或多点聚焦^[46-64]。

上面介绍的 UMPTE 没有涉及约束。若对天线方向图有更精细的要求，可在 MMPTE 中引入权重系数或约束条件，分别称作加权 MMPTE (WMPTE) 和带约束 MMPTE (CMMPTTE)。

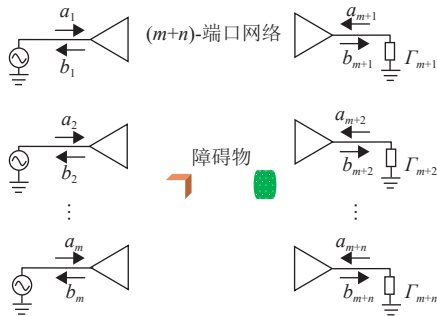


图 26 一般 WPT 系统

3.2 加权 MMPTE (WMPTE)

为了调控方向图形状，可引入加权系数矩阵：

$$[W] = \text{diag}[w_1, w_2, \dots, w_n] \quad (81)$$

使得测试天线接收功率 $[b_r]$ 按权重变化：

$$[b'_r] = [W][b_r] = [w_1 b_{m+1}, w_2 b_{m+2}, \dots, w_n b_{m+n}]^T$$

式 (79) 应修改为：

$$\text{PTE} = \frac{([A'] [a_r], [a_r])}{([B] [a_r], [a_r])} \quad (82)$$

式中， $[A']$ 的具体表达式见文献 [33]。上式取极值

的必要条件为：

$$[A'] [a_r] = \text{PTE}[B][a_r] \quad (83)$$

由此可求得 ODE。

3.3 带约束 MMPTE (CMMPTTE)

方向图赋形问题可归结为约束优化问题。设测试阵列接收功率按一定规律变化 (赋形约束)，即令：

$$|b_{m+1}| = c_1, |b_{m+2}| = c_2, \dots, |b_{m+n}| = c_n \quad (84)$$

式中， $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为给定常数。在远场区球面上，阵列可看作点源，因此 $b_{m+i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 同相。将相位纳入 $[a_r]$ 中，则上述约束可写为：

$$[S_{rr}][a_r] = [c] \quad (85)$$

式中， $[S_{rr}]$ 是 WPT 系统完全匹配时的传输矩阵； $[c] = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ 。阵列综合问题式 (79) 可归结为如下线性约束问题：

$$\begin{aligned} \max_{[a_r] \in C^n} \text{PTE} &= \max_{[a_r] \in C^n} \frac{[a_r]^H [A] [a_r]}{[a_r]^H [B] [a_r]} \\ \text{s.t. } [S_{rr}][a_r] &= [c] \end{aligned} \quad (86)$$

这里 C^n 表示 n 维复向量空间。线性约束问题式 (86) 的解析解是^[33]：

$$[a_r] = [A]^{-1} [S_{rr}]^H ([S_{rr}][A]^{-1} [S_{rr}]^H)^{-1} [c] \quad (87)$$

对于近场赋形，上述过程仍然适用。此时可引入加权矩阵 $[W] = \text{diag}[w_1, w_2, \dots, w_n]$ ，将式 (87) 中的 $[c]$ 换成 $[W][c]$ 即可，详细讨论见文献 [42]。

3.4 应用举例

MMPTE 的基本步骤可总结如下。1) 给定待设计天线阵列的远 (近) 场方向图或场分布，在远 (近) 场引入测试接收天线阵列。将待设计的阵列用作发射阵列，测试阵列作为接收阵列，形成无线输能 (WPT) 系统。测试阵列的类型、数量及其排列方式的选择取决于待实现的方向图的几何形状与性质。2) 根据需要引入适当的权重或约束，优化 WPT 系统的 PTE，通过解析解 (CMMPTTE) 或求解特征值问题 (UMPTE 和 WMPTE) 获得 ODE。3) 用馈电路实现 ODE。

也可采用理想点源作为测试阵列，此时矩阵 $[A]$ 和 $[B]$ 由阵列的单元方向图确定。为与采用散射参数的 MMPTE 区别起见，称作扩展的 MMPTE (EMMPTE)。两者讨论的方式与求解步骤基本一

样, 这里不再赘述。

MMPTE 适用于任意类型和任意复杂环境下的阵列设计, 可用于实现近、远场赋形、多波束扫描、零陷控制、端射、聚焦、极化可控等功能^[33-66]。表 2 给出了 MMPTE 的各种典型应用。利用 MMPTE 可让一副天线实时具备多种功能, 实现一线多用。目标函数 PTE 的选取可以有多种形式, 表 3 给出了常见的 PTE 选择方式(通常配以适当的权重)及其对应的典型应用。

表 2 MMPTE 的应用

MMPTE	典型应用
UMMPTE	单点聚焦天线, 单波束智能天线, 端射天线
WMMPTE	多点聚焦天线, 多波束天线
CMMPTE	赋形天线, 副瓣压缩与零点控制, 多点适配输能, 极化控制

表 3 PTE 的两种选择方式

PTE	典型应用
接收功率(能量)/发射功率(能量)	适用于所有天线阵列、无线能量传输系统设计
单个或多个区域功率(能量)/剩余区域(功率)能量	主瓣赋形, 多波束天线, 副瓣压缩与零点控制

由于所有 WPT 系统都以 PTE 最大化为目标, MMPTE 自然成为 WPT 系统最佳设计方法^[33-39]。值得指出的是, 要使 PTE 最大化, 不仅发射阵列须按 ODE 设计馈电网络, 接收阵列也须如此。设 $[a_r]$ 为发射天线的 ODE, 则接收阵列的 ODE 由下式给出^[33]:

$$[b_r] = [T][a_r] \quad (88)$$

式中, $[T]$ 为考虑匹配损耗后系统的传输矩阵。文献 [39] 给出了接收阵列馈电网络设计例子。采用接收馈电网络可以大幅度提高 PTE。对某些要求不高的 WPT 系统或特殊的应用场合, 接收端不必设计馈电网络。

WPT 系统的设计既可用 CMMPTE 来实现^[34-36], 也可用 UMMPTE 或 WMMPTE 来实现^[36-39]。3 种方法中以 UMMPTE 实现的 PTE 最高, 这是因为 UMMPTE 的最优解求解范围最大, 而任何约束的引入都会缩小解的求解范围^[36]。下面以 CMMPTE 和多目标系统设计为例来说明 WPT 系统的设计过程。

例 12 多目标 WPT 系统^[34]。在多目标 WPT 系统中, 多个目标之间的功率分配不当可能会导致

功率传输效率低下, 进而造成可用电力的浪费。

图 27 所示的 WPT 系统, 由含 40 个单元的发射微带贴片阵列与 18 个单元的接收天线构成, 该系统工作于 5.8 GHz, 其中发射单元排列成一个封闭正方形, 单元间距均匀且为半波长。微带贴片单元采用中心馈电并印制在厚度为 3 mm 的 FR4 介质基板上, 该基板的相对介电常数和损耗角正切分别为 4.40 和 0.02。

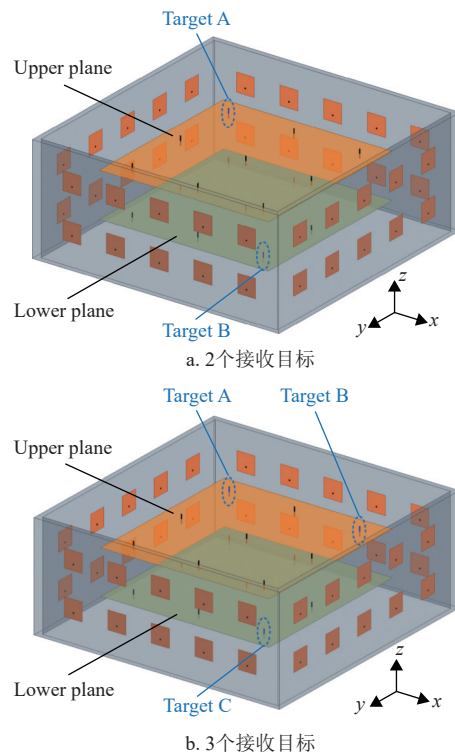


图 27 多目标无线输能

为了控制封闭正方形区域内的场分布, 接收天线均匀分布在由正方形围成的空间中的上下两个平行平面上, 间距均匀且为四分之三波长。两平面之间的距离为半个波长。将接收天线分为两组, 第 1 组为待分配接收功率, 第 2 组为待抑制接收功率, 并且要求第 1 组的功率分配比例可控。这个问题可归结为约束优化问题式 (86)。接收功率比可在式 (86) 中通过合理选择权重系数来实现。

表 4 给出了单一目标的 PTE 以及总 PTE。需要注意的是, 在双目标和三目标情况下, 等功率分配方案的总 PTE 均超过不等功率分配方案。原因在于, 发射天线阵列在三维空间中的复杂功率分配可能会削弱对某些位置接收功率的抑制效果, 从而导致总 PTE 降低。

图 27a 和图 27b 分别给出了两个多目标 WPT 系统, 两系统共用同一发射阵列。第 1 个 WPT 系

统有两个接收目标 A 和 B，分别布置在不同平面的两个对角位置。目标 A 和 B 的预设接收功率比为 1 : 1 和 2 : 1。第 2 个 WPT 系统有 3 个接收目标 A、B 和 C，分别布置在 3 个角上，其中两个目标设置在上层平面，另一个设置在下层平面。目标 A、B 和 C 的两组预设接收功率比分别为 1 : 1 : 1 和 3 : 2 : 1，图 28 给出了接收功率比为 1 : 1 : 1 时的电场分布图。

表 4 不同功率分配比的 PTE %

PTE	分配比 1 : 1	分配比 2 : 1	分配比 1 : 1 : 1	分配比 3 : 2 : 1
目标 A	11.88	15.75	6.87	9.52
目标 B	11.88	7.88	6.87	6.35
目标 C	—	—	6.87	3.17
总 PTE	23.76	23.63	20.61	19.04

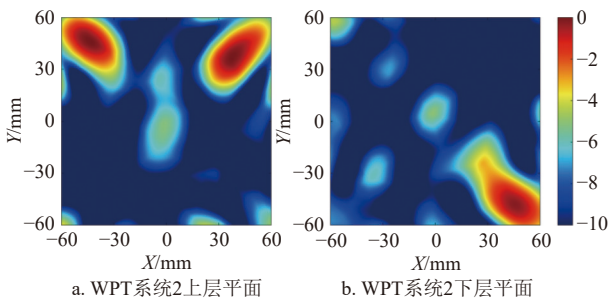
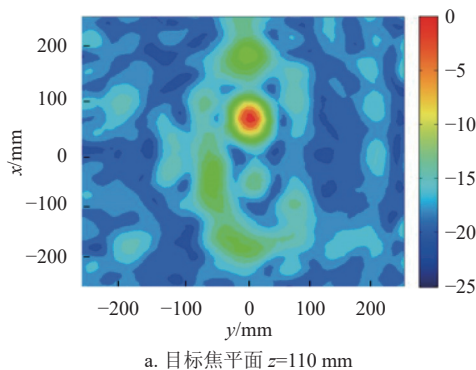


图 28 电场分布图

例 13 盲聚焦天线。为了将电磁能量聚焦到材料特性与位置均为未知的目标，首先要对目标进行定位。为此，可在发射天线阵列同一侧设置测试接收天线系统，通过最大功率传输效率法确定发射阵列的最佳激励分布 ODE^[46]。由于目标设为未知，系统散射参数必须由测量获取。根据 ODE 绘制发射阵列的电场分布图，找出场的最强热点，即可确定目标位置。

图 29 所示是工作频率为 2.45 GHz 的 5×5 矩形



a. 目标焦平面 z=110 mm

微带贴片阵列，其中心单元（标为红色）选为测试接收天线，其余单元为发射单元。该阵列位于盛满菜籽油的方形玻璃容器一侧，目标为浸没在油中的铜块。图 30 是目标预设位置为 60、0、110 mm 的归一化电场图。可以看出 ODE 所产生的电场聚焦在目标位置上。

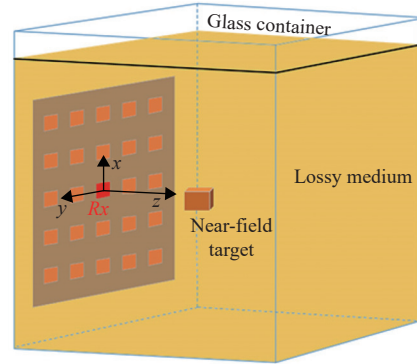
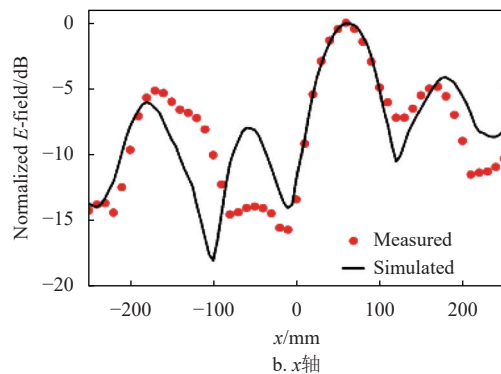


图 29 盲聚焦天线

例 14 方向图赋形。天线的设计问题都归结为波束赋形问题。这里介绍用 EMMPTE 实现波束赋形的基本思路。图 31 为 φ 平面所示的二维方向图，将方向图分为 3 个区域，分别为主瓣区 Ω_m ，副瓣区域 Ω_s ，过渡区域 Ω_t 。为了同时实现主瓣赋形和副瓣压缩，将目标函数选为主瓣区的能量与副瓣区域能量之比，并引入相应的约束条件。

考虑图 32 所示的 6×6 平面阵列，工作频率为 3.5 GHz，单元间距 d 设为半个波长。在阵列的上半空间 ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, 0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$) 按角度间隔 1° 引入测试点源。图 33a 和图 33c 给出了产生平顶的点源分布示意图，其中，红色点代表主瓣区域的测试点，蓝色点代表副瓣区域的测试点。图 33b 和图 33d 为实现的三维原型平顶和三维方形平顶方向图。



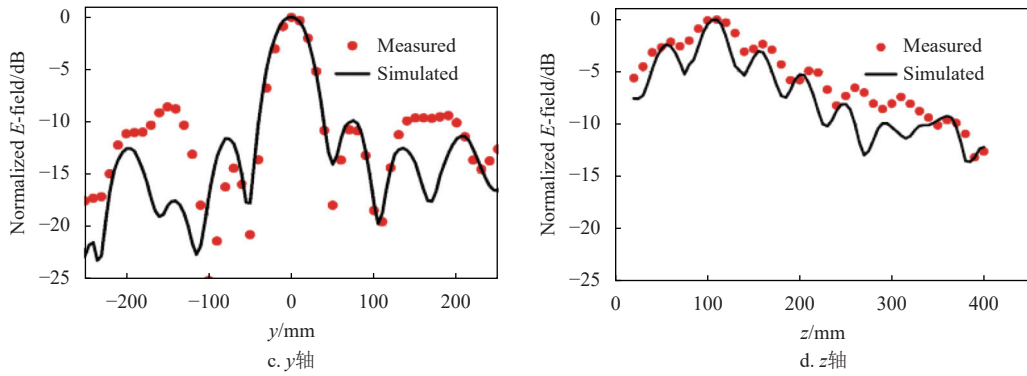


图 30 归一化电场分布

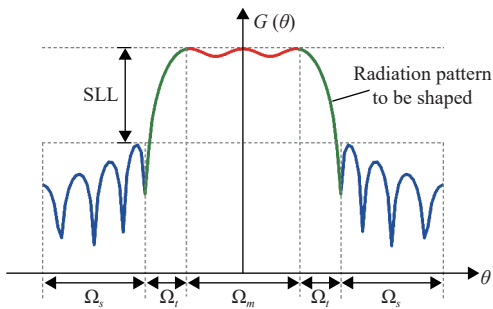


图 31 方向图分区

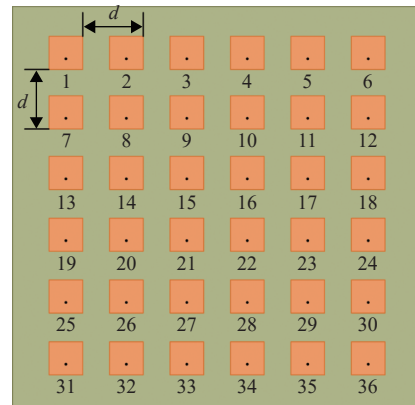
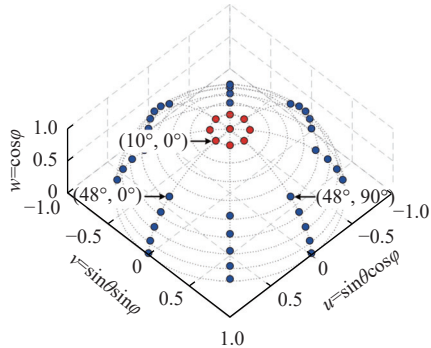
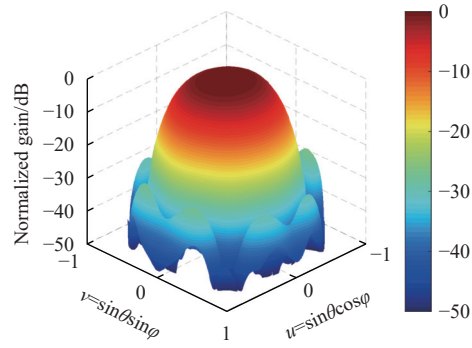


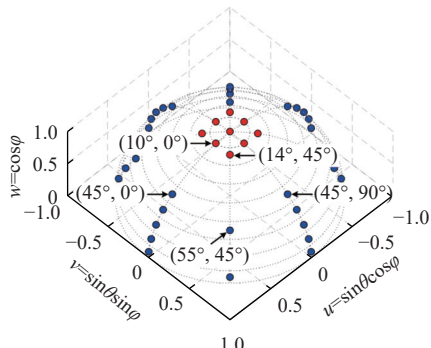
图 32 6×6 平面阵列



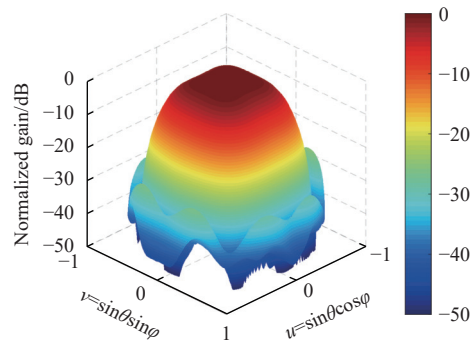
a. 点源分布图



b. 圆形平顶



c. 点源分布图



d. 方形平顶

图 33 平顶方向图

4 结束语

本文根据作者的研究经历,介绍了天线优化设

计领域的部分研究成果,涉及天线通用理论、单天线设计和阵列天线设计 3 个方面。主要内容包

质储能与天线储能理论、天线容量上限理论、单天线设计的谐振模式理论、金属天线细线模型理论以及阵列天线综合的最大功率传输效率法。

天线通用理论是所有天线设计的理论基础。天线谐振模式理论的显著优势在于其模式与天线实际工作状态直接对应，无需通过模式线性组合表征天线工作状态，为复杂结构天线设计提供了简单清晰的物理图像与馈电方法；细线模型理论借助解析解揭示复杂金属天线辐射机制，为天线设计带来了新的灵感与思路；MMPTE 方法以功率传输效率为优化目标函数，抓住天线设计本质，突破传统阵列综合的局限，能够实现复杂环境下阵列天线的多样化功能需求。

从本文讨论可以看出，天线设计的优化目标函数大多能够表示成 Rayleigh 商的形式，其最优解可通过求解特征值方程而得到。Rayleigh 商是研究特征值问题的重要工具，它可用来刻画和估计特征值，将复杂的物理问题转化为能量比优化问题且便于数值计算。Rayleigh 商是建立微波理论与天线辐射理论的共同基础和出发点，这方面的系统讨论可参见文献 [1]。

参考文献

- [1] WEN G Y. Foundations of antenna radiation theory: Eigenmode analysis[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2023.
- [2] WEN G Y. Foundations for radio frequency engineering [M]. Singapore: World Scientific, 2015.
- [3] WEN G Y. Foundations of applied electrodynamics[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.
- [4] WEN G Y. New magnetic field integral equation for antenna system[J]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2006, 63: 153-170.
- [5] WEN G Y, JARMUSZEWSKI P. The foster reactance theorem for antennas and radiation Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, 48(3): 401-408.
- [6] FELSEN L B, MARCUVITZ N. Radiation and scattering of waves[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 1994: 78-83.
- [7] JACKSON J D. Classical electrodynamics[M]. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 1998.
- [8] LANDAU L D, LIFSHITZ E M, PITAEVSKII L P. Electrodynamics of continuous media[M]. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [9] GINZBURG V L. The propagation of electromagnetic waves in plasmas[M]. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [10] GINZBURG V L. Applications of electrodynamics in theoretical physics and astrophysics[M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1989.
- [11] BRILLOUIN L. Wave propagation and group velocity[M]. New York: Academic Press, 1960.
- [12] WEN G Y. Stored electromagnetic field energies in general materials[J]. *Optical Society of America*, 2019, 36(4): 917-925.
- [13] COUNTER V A. Miniature cavity antenna[R]. Stanford, CA: Microwave Laboratory, Stanford University, 1948.
- [14] WEN G Y. Stored energies and radiation Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(2): 636-645.
- [15] WEN G Y. A method for the evaluation of small antenna Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2003, 51(8): 2124-2129.
- [16] KISHI G, NAKAZAWA K. Relations between reactive energy and group delay in lumped-constant networks[J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1963, 10(1): 67-71.
- [17] WEN G Y. Physical limitations of antenna[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(8): 2116-2123.
- [18] WEN G Y. A new derivation of the upper bounds for the ratio of gain to Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(7): 3488-3490.
- [19] WEN G Y. Optimization of the ratio of gain to Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2013, 61(4): 1916-1922.
- [20] COLLIN R, ROTHSCCHILD S. Evaluation of antenna Q[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2003, 51(1): 23-27.
- [21] FANTE R. Quality factor of general ideal antennas[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1969, 17(2): 151-155.
- [22] FUJIMOTO K, MORISHITA H. Modern small antennas[M]. London: Cambridge University Press, 2014.
- [23] VOLAKIS J L, CHEN C C, FUJIMOTO K. Small antennas: Miniaturization techniques & applications[M]. New York: McGraw Hill, 2010.
- [24] WHEELER H. Small antennas[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1975, 23(4): 462-469.
- [25] CHU L J. Physical limitations of omnidirectional antennas[J]. *Journal of Applied Physics*, 1948, 19(12): 1163-1175.
- [26] HARRINGTON, ROGER F. Effect of antenna size on gain, bandwidth and efficiency[J]. *Journal Research of Nbs D Radio Propagation*, 1960, 64(1): 1-12.
- [27] FANTE R L. Maximum possible gain for an arbitrary ideal antenna with specified quality factor[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 1992, 40(12): 1586-1588.
- [28] WEN G Y. Multi-antenna information theory[J]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2007, 75: 11-50.
- [29] XIAO R, WEN G Y, WU W. Theory of resonant modes and its application[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 114945-114956.
- [30] XIAO R, WEN G Y, YANG G, et al. Application of resonant modal theory to the design of dual-band wideband dipole antenna[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2024, 23(8): 2551-2555.
- [31] XIAO R, WEN G Y, YANG G, et al. The extended resonant modal theory and its applications[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2024, 18(6): 402-412.
- [32] WEN G Y, RAO Q, ALI S M, et al. Handset antenna design: Practice and theory[J]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2008, 80: 123-160.
- [33] WEN G Y. The method of maximum power transmission

- efficiency for the design of antenna arrays[J]. *IEEE Open Journal of Antennas and Propagation*, 2021, 2: 412-430.
- [34] CAI X, XU M C, SHINOHARA N, et al. Optimal design of multi-target wireless power transmission with arbitrary received power allocation[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2024, 23(10): 3158-3162.
- [35] CAI X, WEN G Y, GUO Y. A compact rectenna with flat-top angular coverage for RF energy harvesting[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2021, 20(7): 1307-1311.
- [36] SUN S, WEN G Y. Optimal design of wireless power transmission systems using antenna arrays[J]. *ZTE Communications*, 2022, 20(2): 19-27.
- [37] CHEN Z, SUN H, WEN G Y. Maximum wireless power transfer to the implantable device in the radiative near field[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2017, 16: 1780-1783.
- [38] SUN H, WEN G Y. Optimum design of wireless power transmission systems in unknown electromagnetic environments[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 20198-20206.
- [39] YANG X, WEN G Y, SUN H. Optimum design of wireless power transmission system using microstrip patch antenna arrays[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2017, 16: 1824-1827.
- [40] DONG Y, CAI X, WEN G Y. A pattern shaping method for focused antenna arrays[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2024, 23(4): 1236-1240.
- [41] DONG Y, CAI X, WEN G Y. Circularly polarized antenna array with suppressed sidelobes for electronic toll collection[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2022, 21(5): 988-992.
- [42] CAI X, WEN G Y. An optimization method for the synthesis of flat-top radiation patterns in the near-and far-field regions[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018, 67(2): 980-987.
- [43] GU X, WEN G Y. Design of a near-field RFID antenna array in metal cabinet environment[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2018, 18(1): 79-83.
- [44] XIA Q, CAI X, DUAN Z, et al. Three-dimensional near-field pattern shaping antenna array with arbitrary focus configuration[J]. *Progress in Electromagnetics Research M*, 2023, 116: 65-75.
- [45] CAI X, GU X, WEN G Y. Optimal design of antenna arrays focused on multiple targets[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2020, 68(6): 4593-4603.
- [46] GAO P, WANG S Y, WEN G Y. A blind adaptive focused antenna array for the unknown target in lossy medium[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2022, 21(5): 983-987.
- [47] SHAN L, WEN G Y. Optimal design of focused antenna arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, 62(11): 5565-5571.
- [48] WANG X Y, YANG G M, WEN G Y. A new design of focused antenna arrays[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2014, 56(10): 2464-2468.
- [49] JIANG Y, WEN G Y, YANG L, et al. Circularly-polarized focused microstrip antenna arrays[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2015, 15: 52-55.
- [50] JIANG Y, WEN G Y, SUN H. A new focused antenna array with circular polarization[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2015, 57(12): 2936-2939.
- [51] HE X, WEN G Y, WANG S. Optimal design of focused arrays for microwave-induced hyperthermia[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2015, 9(14): 1605-1611.
- [52] HE X, WEN G Y, WANG S. A hexagonal focused array for microwave hyperthermia: Optimal design and experiment[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2015, 15: 56-59.
- [53] LU H, WANG S, WEN G Y. Optimal design of a hexagonal antenna array for regional microwave breast hyperthermia[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2024, 23(12): 4738-4722.
- [54] ZHAO Y, WANG A, YE F, et al. Wideband and low-profile beam-tilted H-plane horn array based on MMPTE[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2023, 17(2): 151-161.
- [55] DUAN Z, ZHU C X, WANG F, et al. A circularly polarized heterogeneous antenna array for wide elevation angle scanning and full azimuthal coverage[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2022, 22(5): 965-969.
- [56] WANG S Y, JIN X R, LIU P, et al. Fast multinull steering of antenna array[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2022, 21(12): 2512-2516.
- [57] WEI P, WEN G Y. Design of MIMO/smart antenna arrays using different array modules for handheld device[J]. *Progress in Electromagnetics Research C*, 2021, 115: 111-126.
- [58] LI T, WEN G Y. Design of MIMO beamforming antenna array for mobile handsets[J]. *Progress in Electromagnetics Research C*, 2019, 94: 13-28.
- [59] TONG H, WEN G Y. Optimal design of smart antenna systems for handheld devices[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2016, 10(6): 617-623.
- [60] WAN W, WEN G Y, GAO S. Optimum design of low-cost dual-mode beam-steerable arrays for customer-premises equipment applications[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 16092-16098.
- [61] MIAO X, WAN W, DUAN Z, et al. Design of dual-mode arc-shaped dipole arrays for indoor base-station applications[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2019, 18(4): 752-756.
- [62] GUO H, WEN G Y. Design of Yagi-Uda antenna with multiple driven elements[J]. *Progress in Electromagnetics Research C*, 2019, 92: 101-112.
- [63] CAI X, WEN G Y, SUN H. A printed dipole array with high gain and endfire radiation[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2017, 16: 1512-1515.
- [64] GUO H, WEN G Y. Design of bidirectional antenna array with adjustable endfire gains[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2019, 18(8): 1656-1660.
- [65] SUN H, WEN G Y. A new rectenna using beamwidth-enhanced antenna array for RF power harvesting applications[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2016, 16: 1451-1454.
- [66] XIE F, YANG G M, WEN G Y. Optimal design of an antenna array for energy harvesting[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2013, 12: 155-158.