

引用格式: 周毅, 张浩, 施孟佶, 等. 未知环境中基于控制障碍函数的机器人安全控制研究综述 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(1): 29-38.
ZHOU Y, ZHANG H, SHI M J, et al. A review of research on robot safety control based on control barrier functions in unknown environments[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(1): 29-38.

未知环境中基于控制障碍函数的机器人安全控制研究综述



周毅^{1,2}, 张浩^{1,2}, 施孟佶³, 林伯先³, 石磊^{1*}

(1. 河南大学 人工智能学院, 郑州 450046; 2. 河南省车联网协同技术国际联合实验室, 郑州 450046;
3. 电子科技大学 航空航天学院, 成都 611731)

摘要: 随着机器人系统工作环境的复杂程度日益增加, 以及对实时性需求的逐步提升, 机器人的安全避障能力将面临新的挑战, 控制障碍函数作为一种基于控制器的安全方法在机器人安全控制系统中迎来新的发展契机。调研分析了控制障碍函数及基于二次规划的优化控制器, 总结了机器人在已知和未知环境中的避障问题, 综述了高斯过程和强化学习两种理论合成控制障碍函数的策略。最后, 讨论了未来基于控制障碍函数的空地协同机器人安全控制需要重点关注的问题, 为未来控制障碍函数的理论研究和技术应用提供了参考。

关键词: 控制障碍函数; 非线性系统; 安全关键控制; 二次规划

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **DOI:** 10.12178/1001-0548.2023296

A review of research on robot safety control based on control barrier functions in unknown environments

ZHOU Yi^{1,2}, ZHANG Hao^{1,2}, SHI Mengjie³, LIN Boxian³, and SHI Lei^{1*}

(1. School of Artificial Intelligence, Henan University, Zhengzhou 450046, China;
2. International Joint Research Laboratory for Cooperative Vehicular Networks of Henan, Zhengzhou 450046, China;
3. School of Aeronautics and Astronautics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: As the complexity of robot system working environments continues to increase and the demand for real-time performance gradually escalates, the safety avoidance capability of robots is facing new challenges. Control barrier functions, as the safety method based on controllers, are getting new development opportunities in robot safety control systems. This paper investigates and analyzes control barrier functions and optimization controllers based on quadratic programming, summarizes the obstacle avoidance problems of robots in known and unknown environments, and provides an overview of strategies for synthesizing control barrier functions from the theories of Gaussian processes and reinforcement learning. Finally, it systematically discusses the key issues that need to be focused on in the future for safe control of ground collaborative robots based on control barrier functions, providing inspiration and references for future theoretical research and technical applications of control barrier functions.

Key words: control barrier functions; nonlinear systems; safety critical control; quadratic programming

近年来, 随着人工智能和机器人技术的飞速发展, 机器人安全控制问题^[1-2]受到广泛关注。然而, 随着机器人应用范围的不断扩大和机器人系统自主智能水平的不断提升, 与机器人应用相关的一系列问题也逐渐浮现, 其中机器人系统的安全性成

为当务之急。为了确保机器人在各种复杂环境下的安全运行, 控制器在设计之初便需要考虑到机器人系统状态在安全区间内的演化过程, 并制定相应的约束条件, 从而保障系统的安全性。因此, 复杂环境中的机器人安全控制已成为机器人控制领域的研

收稿日期: 2023-11-30

基金项目: 国家自然科学基金(62176088); 国家重点研发计划(2023YFE0112500)

作者简介: 周毅, 主要从事多智能体协同控制方面的研究。

*通信作者 E-mail: shilei910918@126.com

究热点。

在机器人安全控制方法的研究中, 学者们从复杂通信网络^[3]、人机交互^[4]、博弈论^[5]、多智能体系统^[6]等多个研究领域进行深入剖析, 旨在提升系统的安全性能。然而, 考虑到机器人具有高灵敏性^[7]、多功能性^[8]、运动环境复杂性以及强大的交互性等特点, 其在执行既定任务时可能发生失控、碰撞、损坏等意外事件, 引发严重的安全事故, 对生命财产带来重大损失。因此, 亟需研发一种高效的控制策略, 在确保系统安全的基础上完成预定任务。在此背景下, 控制障碍函数 (control barrier functions, CBF) 理论应运而生。CBF 是一类基于非线性控制理论的技术手段, 目的在于为复杂系统设计安全的控制策略。该方法的核心思想是将约束条件编码为障碍函数, 并通过最优化问题对系统状态进行约束, 将满足状态约束条件转化为安全状态集的前向不变性问题。在任意时刻, 若系统的初始状态满足 CBF 约束, 则系统状态在后续时间步长内保持 CBF 约束, 即机器人不会超出安全范围。相较于人工势场算法^[9] (artificial potential field, APF)、可达性分析^[10] (reachability analysis, RA) 等传统控制方法, CBF 具备以下显著优势。

1) 实时性: CBF 计算负担小, 能够在线处理系统约束, 并在动态环境中实时控制。

2) 兼容性: CBF 可与其他控制策略相结合, 构建综合控制策略, 从而提升系统的整体性能。

3) 鲁棒性: CBF 在设计过程中可以考虑系统的不确定性和干扰, 保证在复杂环境中的控制精度。

CBF 理论研究最早应用于优化领域, 主要针对约束优化问题^[11]。随着研究的深入, CBF 的理论与方法得到了广泛发展。文献 [12-13] 提出了将 CBF 合成安全控制器的方法。另外, 在保证系统安全性的同时兼顾收敛性的研究中, 文献 [14] 提出了控制李雅普诺夫函数 (control lyapunov functions, CLFs) 和 CBF 相组合的二次规划方法, 以保证安全性与稳定性。在局部优化中, CBF 可以满足性能需求而不违反安全条件。当安全性和稳定性之间存在冲突时, CBF 作为硬约束, 优先保障系统安全。CBF 的特性与机器人系统相辅相成, 近些年, 学者们逐渐展开了 CBF 在机器人安全控制领域的应用研究。如自适应巡航控制问题^[15-16]、机器人安全控制问题^[17-18]、无碰撞多智能体系统^[19-20]等。为了更系统地理解 CBF 的工作原理及应用领域, 文献 [21] 对 CBF 的理论进行了详细阐述, 并给出了

一系列应用案例分析。近期, 文献 [22-23] 从非线性系统安全控制理论的角度, 综述了 CBF 近年来的理论成果和技术应用, 并对 CBF 在非线性系统中未来的研究方向进行了展望。然而, 机器人往往在复杂未知信息的动态环境中运动, 上述成果并未针对复杂场景下机器人系统进行专门研究。

现阶段, 机器人在已知环境中的研究主要围绕扰动问题和可行性问题进行展开, 机器人可以依靠预先规划避障路径并利用传感器自适应调整安全状态集, 从而保证机器人在不同场景下的安全控制。然而, 在实际的机器人工作场景中, 许多工况环境呈现出复杂、未知、动态等特性。由于机器人安全范围受制于自身物理约束及周围障碍物带来的环境限制, 为了更深入地理解未知环境下基于 CBF 的机器人安全控制问题, 本文以机器人在复杂环境避障为背景, 综述了高斯过程 (Gaussian processes, GP) 和强化学习 (reinforcement learning, RL) 两种理论合成 CBF 的策略, 进而保证机器人在未知环境中的安全性。

本文围绕基于 CBF 的机器人安全控制技术, 简述了 CBF 在机器人系统中的基本理论和二次规划的构建方法。在此基础上, 对已知环境下机器人扰动问题和可行性问题的研究现状进行了调研分析; 结合机器人自身及其运动环境的特殊性, 总结并提出了未知环境下 GP 和 RL 两种理论合成 CBF 的策略。最后, 从未来战场空地协同机器人的角度出发, 讨论了未来基于 CBF 的空地协同机器人安全控制需要重点关注的问题。

1 理论基础

为了更好地阐述 CBF 在机器人系统安全控制的应用, 本节对 CBF 和基于优化的控制等理论基础进行阐述。表 1 为本文符号的定义。

表 1 符号列表

符号名称	符号释义
\mathbb{R}^n	n 维实向量空间
$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 维实向量空间
C	封闭集: $\{x : h(x) \geq 0\}$
∂C	边界 $C : \{x : h(x) = 0\}$
$\text{int}(C)$	内部 $C : \{x : h(x) > 0\}$
$\text{inf}[\cdot]$	下确界
$\text{sup}[\cdot]$	上确界
$\ \cdot\ $	欧几里得范数
$\ \cdot\ _\infty$	最大范数
L	李导数
U	控制输入集合
X	系统状态集合

首先, 考虑一类机器人的非线性仿射系统为:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1)$$

式中, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 为局部 Lipschitz 连续的向量场; \mathbf{x} 表示方程的解; $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ 为系统状态; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入。当系统状态对任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 有解时, 则称微分方程 (1) 为前向不变的。

1.1 控制障碍函数

在 CBF 中安全性概念可以定义为: 若一个集合确保了前向不变性并维持了系统的安全性, 则称该集合为安全状态集^[20], 该集合可以表示为闭集 C , 将其表述为:

$$\begin{cases} C = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \geq 0\} \\ \partial C = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) = 0\} \\ \text{int}(C) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) > 0\} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $h(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可微的超水平集的期望约束, 该函数可以用来观测系统 (1) 的当前状态是否处于安全状态集 (2) 内, 给定:

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} [L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha h(\mathbf{x})] \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \quad (3)$$

式中, L_f 和 L_g 是 $h(\mathbf{x})$ 的李导数, 分别为 $L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 和 $L_g h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})$ 。满足式 (3) 约束的 $h(\mathbf{x})$ 即被定义为在安全状态集 C 下的 CBF。假设存在 Lipschitz 连续函数 $\alpha: [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty]$, 若该函数严格递增且满足 $\alpha(0) = 0$, 则称其为扩展类 \mathcal{K} 函数。若 $L_g h(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 则定义 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 的所有集合:

$$k_{\text{cbf}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in U : L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha h(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (4)$$

式中, $k_{\text{cbf}}(\mathbf{x})$ 是 U 中的仿射约束控制集合, 为 $\forall \mathbf{x} \in C$ 的系统初始状态。

CBF 有归零控制障碍函数^[12] (zeroing control barrier functions, ZCBF) 和倒数控制障碍函数^[11] (reciprocal control barrier functions, RCBF) 两种形式, 它们在实现上略有不同。前者在达到安全状态时函数值快速收敛至零, 而后者在系统达到安全状态之前函数值会达到无穷大。由于 ZCBF 不存在边界值趋于无穷的数学缺陷, 且允许考虑系统扰动, 适用于对安全性和稳定性要求高的实际非线性机器人系统。因此, 本文主要针对 ZCBF 进行阐述。

上述 CBF 约束仅适用于相对自由度 (确定系统所需独立变量的个数) 为 1 的机器人系统动力学模型。然而, 实际机器人系统的复杂度较高, 机器

人的配置空间维度越高, 运动规划的复杂度就会呈指数级增长, 因此需要在高维空间解决高阶 CBF 约束。为此, 文献 [24] 提出了回步法 (backstepping) 实现高阶 CBF。回步法借助分层设计策略, 将高阶控制系统中的复杂问题拆分为若干相互关联的子问题。在设计过程中, 各子控制器均采用反馈控制律方式构建, 逐步解决各个子问题。基于此, 系统状态得以按照预定轨迹进行演变, 从而实现对高阶控制系统的高效控制。然而, 回步法仅对相对自由度为 2 的机器人系统有效。为了解决 CBF 在更高阶系统中的应用, 研究者提出了指数 CBF^[25] (exponential control barrier functions, ECBF)。ECBF 适用于任意相对自由度的约束, 通过负极点配置控制器, 可以使 CBF 稳定到零点。近期, 研究者们开发了一种高阶控制障碍函数^[26] (high-order control barrier functions, HOCBF)。相比其他两种形式, HOCBF 更为一般化, 并且适用于更广泛的系统类别, 包括非线性耦合^[27]、不确定性^[28]、时变参数^[29] 等复杂特性的系统。为了一般性, HOCBF 引入一个时变函数来定义系统 (1) 的安全状态集。具体来说, 对于 m 阶可微函数 $h(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 可以递归地定义一个时变函数:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \dot{\psi}_{i-1}(\mathbf{x}) + \alpha_i(\psi_{i-1}(\mathbf{x})) \quad (5)$$

式中, $\psi_i(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, m\}$; $\alpha_i(\cdot)$ 表示其自变量为扩展类 \mathcal{K} 函数; $\psi_0(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ 。

进一步, HOCBF 的安全状态集 C_i 可以表示为:

$$C_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi_{i-1}(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (6)$$

引入 m 阶 HOCBF 一般形式下的定义:

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} [L_f^m h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha_m(\psi_{m-1}(\mathbf{x}))] \geq 0 \quad (7)$$

式中, L_f^m 和 L_g^m 为第 m 阶 $h(\mathbf{x})$ 的李导数, 分别为 $L_f^m h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 和 $L_g^m h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})$ 。此外, 假设当 $h(\mathbf{x}) = 0$ 时, $L_g L_f^{m-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$ 。同理于 CBF 的定义, 若 $h(\mathbf{x})$ 在安全状态集 $C_1 \cap C_2, \dots, \cap C_m$ 内保持前向不变性, 则称 $h(\mathbf{x})$ 为 HOCBF。HOCBF 方法的优势在于它能够处理高阶系统的安全控制问题。通过引入额外的控制变量, HOCBF 方法能够更好地捕捉和表示高阶系统的动态特性, 提供更准确和精细的安全控制。这使得机器人系统更具有可调节性和自适应性。尤其针对机器人的视觉控制^[30]、感知控制^[31]、末端执行器控制^[32]、协作控制^[26] 都有不错的

效果。因此,学术界普遍使用 HOCBF 方法来解决机器人高阶系统问题。

1.2 基于优化的控制

CBF 编码了机器人系统的安全约束,实际应用中需要设计一种高效的控制器并最小化成本。研究者普遍使用二次规划(quadratic programming, QP)。QP 能够将控制问题转化为一个二次规划问题,将 CBF 与 QP 耦合,可以在确保系统安全性的基础上,实现最优性。CBF-QP 优化控制器表示如下:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = \arg \min & \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{k}(\mathbf{x})\|^2 \\ \text{s.t. } & L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})\mathbf{u} \geq -\alpha(h(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (8)$$

当系统没有输入约束时,可以得到一个由最小范数控制器给出的数值解。在 CBF-QP 控制器中,可以将 CBF 视为一种安全滤波器,它可以对控制输入进行滤波和限制,以确保系统的安全性。

避障是机器人系统安全控制里的一个基本问题,如图 1 所示。当机器人遇到障碍时会激活 CBF 安全控制器,以 CBF 作为硬约束,保持安全距离绕开障碍。待完全远离障碍时,CBF 会随即失效。机器人避障应用相当广泛,本文主要围绕已知环境下机器人避障和未知环境下机器人避障两类进行探讨。下面,针对已知环境下的扰动问题和可行性问题以及未知环境下安全避障策略进行综述。

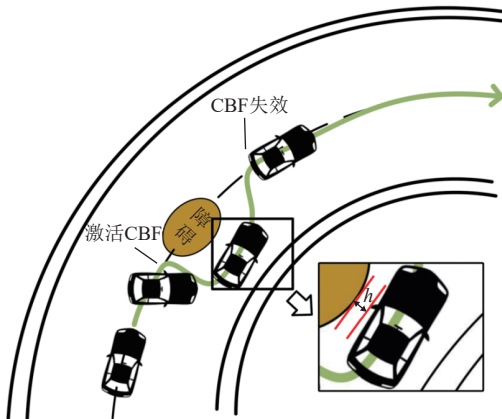


图 1 移动机器人安全控制示意图

2 已知环境下机器人避障

在已知环境中,机器人可以获取障碍物位置的先验知识,然后来设计安全控制输入。CBF 可以合并到其他基于优化的控制器中,模型预测控制^[33](model predictive control, MPC)与 CBF 结合可以更好地解决优化控制问题。文献[32]提出将 CBF 和 MPC 相结合,不仅保障系统安全,而且执行先

验的最优规划,解决了安全性与最优性之间的冲突。为了更好地处理非线性系统,文献[34]在此基础上引入非线性模型预测控制(nonlinear model predictive control, NMPC),可以在 CBF 的安全控制下最小化移动机器人的轨迹误差。

文献[33-34]中未考虑系统扰动对控制效果的影响,在实际的复杂机器人控制环境中,不可避免会遇到扰动问题,针对外部扰动问题,文献[35]将输入-状态安全函数(input-to-state safety function, ISSf)与 CBF 相结合提出 ISSf-CBF 方法,以确保在非线系统扰动下的安全输入。ISSf 的核心思想是通过修改 CBF 安全状态集的定义,进而量化系统在外输入信号影响下的安全性与鲁棒性。

ISSf-CBF 根据式(2)重新定义系统(1)的安全状态集:

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) + \gamma \|\mathbf{d}\|_\infty \geq 0\} \quad (9)$$

式中, $\|\mathbf{d}\|_\infty$ 表示为 \mathbf{d} 的 L_∞ 范数; γ 为 \mathcal{K} 类函数,即为扰动增益。

在输入信号超出阈值的情况下,输入状态安全函数仍能容许这一超限行为,确保状态保持在安全集合内或非常接近安全集合。

随着安全控制的不断发展,ISSf-CBF 可以动态地应对环境和系统中的不确定性。文献[36]针对机器人刚体运动学模型的无源性问题,提出了基于 ISSf-CBF 的刚体运动位姿控制方法,可以同时考虑刚体运动的位置和方向,确保姿态控制的安全性和稳定性。然而文献[36]并未考虑影响系统状态安全的随机扰动,文献[37]提出了可调输入-状态安全控制屏障函数(tunable input-to-state safe control barrier functions, TISSf-CBF),保证对于随状态变化的扰动的安全性,从而提供适应不确定性的较不保守的方法。TISSf-CBF 更具灵活性,允许调整安全状态集的大小,使得它近似于未受干扰系统的安全集,不会显著影响系统性能。

然而,当涉及同时考虑状态约束和严格的边界约束时,相关联的二次规划问题往往会出现不可行的情况,无法实现安全约束。为了解决这个问题,文献[14]提出了使用多层 CBF,以解决多个不同的不安全状态。随后,文献[38]提出了多层 CBF 的控制共享属性(control sharing property, CSP),将多层 CBF 约束转化为同一个优化问题,在优化问题求解过程中,判断多个时变输出约束是否存在交集,从而确定可行解的集合。此外,为了解决欧

拉-拉格朗日系统 (euler-lagrange systems, ELSs) 的多重约束问题, 文献 [39] 提出了一种增强欧拉-拉格朗日系统安全性的采样数据控制器 (sampled data controller, SDC), 设计多层非冲突 CBF 以满足安全规则。为了满足高安全性的控制策略, 文献 [40] 提出了一种逐点可行的自适应 CBF, 可以调解机器人实现控制目标和确保安全, 实时执行, 并优化安全控制的安全状态集, 保证逐点状态在安全区域的可行性。

在已知环境下, 机器人系统通常需要先了解环境的先验信息才能设计出有效的控制策略。然而, 相较于已知环境, 未知环境具有更多不确定性与随机性, 这样不但增加了机器人系统安全控制器的设计难度, 而且增加了控制器的控制风险。因此, 应该关注更具自适应性和鲁棒性的机器人避障算法, 以适应各种未知环境下的变化, 并且能够不断地更新自己的环境感知和行为策略。

3 未知环境下机器人避障

随着技术不断发展, 机器人系统应用范围越来越广泛, 在未知环境中, 物理接触不可避免, 因此未知环境下机器人的安全问题受到越来越多的关注。在未知环境下, 机器人利用传统的 CBF 避障面临以下 3 个困难: 1) 缺乏先验知识: 在未知环境中, 机器人缺乏关于障碍物位置、形状和运动模式的先验知识。这使得传统的规划方法难以适应未知环境中的动态变化和复杂障碍物。2) 不确定性和噪声: 未知环境中存在各种不确定性和噪声, 如传感器测量误差、运动模型不准确等。这些不确定性会影响安全控制的准确性和可靠性, 增加了避障问题的复杂性。3) 模型建立困难: 在未知环境中, 建立准确的环境模型或系统模型是困难的。传统的基于模型的方法往往需要准确的环境模型, 但在未知环境中获得这些模型是困难且耗时的。文献 [41] 研究了一种解决可行性问题的方法, 其核心思想是将 \mathcal{K} 类函数中 α 重新修改定义为惩罚权重, 通过递归安全状态集获得可行解。该方法在未知环境中效率高, 基于其可延迟激活 CBF 约束的特性, 可以在未知环境自主避障, 提升系统的适应性和鲁棒性。然而, 该方法是一类离线计算方案, 难以解决更为普遍的时变环境中机器人的安全问题。因此, 在更为普遍的环境中应该实现在线避障, 确保机器人能及时响应环境变化和状态变化, 提高机器人避障的安全性。所以, 研究人员提出了采取 GP 和 RL

两种理论在线合成 CBF 的策略。GP 是一种用于建模未知函数的强大工具, 它能够根据有限的观测数据推断出函数的分布。通过将 GP 与 CBF 方法结合, 可以在未知环境中对障碍物进行建模和预测, 从而实现更准确的避障控制。RL 是一种通过与环境互动学习最优决策策略的方法。在未知环境中, RL 可以使机器人通过试错和学习来适应环境的变化, 并在避障过程中不断优化安全控制策略。

3.1 高斯过程

为了使机器人在未知环境中更为出色地执行任务, 需要在未知环境中进行在线决策。GP 可以根据采样数据更新安全集, 这意味着它可以在没有预先设定模型复杂度的情况下捕捉到数据中的复杂结构, 进而在未知环境中探索。同时, 它能够提供预测结果的不确定性度量, 可以将扰动或者噪声视为随机变量进行建模, 更精准地描述真实数据。因此, 学术界常将 CBF 与 GP 相结合^[42], 以解决未知环境问题。通常, GP 定义为 $f(x) \sim \text{GP}(\mu(x), k(x, \tilde{x}))$, 其中 $\mu(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 为均值函数, 表示在输入点 x 处的期望输出值。协方差函数 (也称核函数) 为 $k(x, \tilde{x})$, 表示输入点 x 和 \tilde{x} 之间的相关性。在实际应用中, 均值函数通常为零, 核心关注点在于选择合适的核函数。核函数是 GP 的关键组成部分, 它决定了函数空间的性质。常见的核函数包括线性核、多项式核、径向基函数核等。合适的核函数选择有助于更好地捕捉输入数据之间的关系, 从而提高预测性能。

在未知环境中, 使用 GP 建立环境模型, 以预测未知区域中的障碍物的位置和形状。GP 通过历史信息进行训练, 为机器人提供初始的环境模型, 从而提高模型的准确性和可靠性。同时, 实时信息可以用于更新 GP 模型, 以反映环境中的变化和不确定性。利用实时信息, 机器人可以检测到新出现的障碍物并预测其位置和形状, 以便实时进行避障决策。然后需要对原始数据进行预处理, 以去除异常值和噪声。另外, 不同的数据信息可能具有不同的特征和属性。需要对数据的特征进行提取和选择, 以选取最具代表性和区分性的特征。接下来, 需要合成安全控制器, 选择合适的核函数来合成均值函数和方差函数。均值函数用于预测障碍物在输入空间中的位置, 即预测函数的输出值。机器人可以利用预测的障碍物位置进行路径规划和避障决策。方差函数用于度量预测函数的不确定性, 即预测函数的输出值的置信度。机器人可以利用预测函数的方差信息, 评估障碍物位置的可靠程度, 并根

据可靠程度做出相应的避障决策。在给定状态下,可以构建 h 函数来保证机器人在其运动过程中遵循安全约束。利用 GP 的均值和方差合成 $h(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x}) := \mu(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x})$, 最后进行二次规划^[42]。机器人根据生成的避障策略进行移动, 并实时更新高斯过程模型, 以反映环境中的变化。当安全约束不可行时, 它们可以提供最小限度的控制干预, 以保证与安全约束的偏差变小。即使在动态不确定性的情况下, 也

可以使用 GP 对系统安全性做出高概率置信区间^[43]。机器人利用 GP 模型来决定其行为并调整其行为。如图 2 所示, $\mathbf{y} = [y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)]^T$ 为观测向量, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为协方差矩阵 $[K]_{(i,j)} = k(x_i, x_j)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。机器人在未知环境中主动探索, 若无安全控制器, 在迭代学习中会与障碍碰撞。而有安全控制器, 则会利用 CBF 约束绕开障碍物, 从而提升模型的性能和效率。

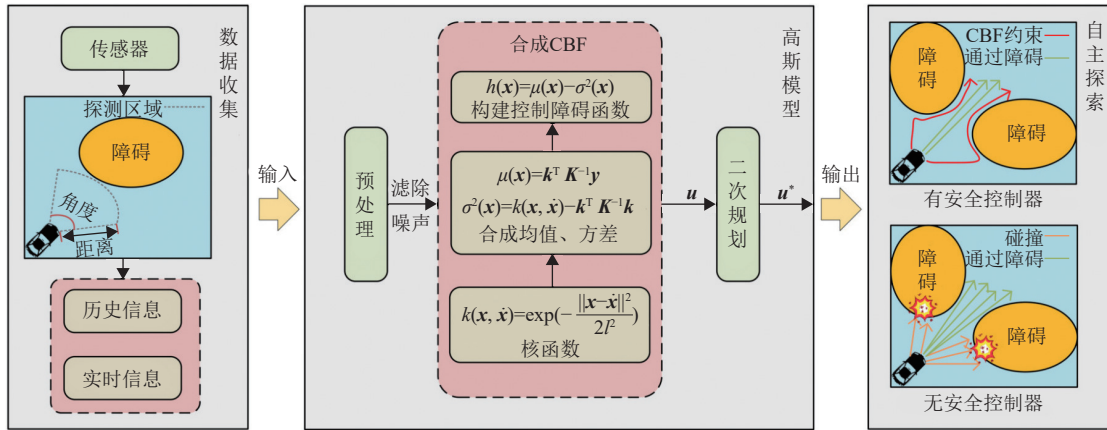


图 2 CBF 结合 GP 安全控制架构示意图

GP 结合 CBF 的方法抗干扰能力强, 为机器人在复杂未知场景下自适应运行提供了重要保障。文献 [44] 通过更新概率参数和减小高斯模型的方差来扩大安全区域, 利用最小二乘法寻找控制输入以保证安全。在多智能体协同控制方面, 文献 [45] 提出了动态置信区间 min-max 的不确定性, 在异质性环境中, 实现了多智能体的安全交互。文献 [46] 在此基础上利用卡尔曼滤波器测量噪声, 在不完全状态信息环境中动态估计机器人未来的行为状态, 实现了多智能体避碰问题。GP 同样可以进行近似估计干扰, 文献 [47] 使用 GP 在线近似不确定干扰, 结合了 MPC 进行轨迹优化, 减少了跟踪误差, 提升了机器人系统的鲁棒性。

GP 主要通过数据建模估计机器人周围障碍物的位置与形状, 具有自适应调整障碍物形状的能力。在遭遇扰动或噪声问题时表现良好, 可在较短时间内快速学习并实时适应未知环境。然而, 在处理高维状态空间时, GP 可能面临挑战。高斯模型建模时, 需频繁地探索环境并进行采样, 在大规模复杂未知环境下无法满足性能需求。

3.2 强化学习

另一种在未知环境中安全控制的方法是将 RL 与 CBF 相结合, 为机器人系统安全提供有效保

障。与 GP 不同的是, RL 在无需先验知识的环境下进行学习, 而且无须实时建立环境模型以适应复杂未知环境。

针对 CBF 和 RL 结合生成的安全控制体系, 根据代表性研究, 可以分为以下两种结构。

1) CBF 作为安全层^[43, 48-49]: 在这种结构中, CBF 作为一个安全层, 对 RL 控制器产生的不安全控制行为进行修正, 以确保系统在操作过程中满足安全性约束。

2) CBF 指导探索与学习的结构^[43, 50-51]: 在这个改进的结构中, CBF 不仅作为安全层, 同时也在学习和探索过程中发挥指导作用。通过将 CBF 引入 RL 控制器的奖励函数或约束条件中, 可以引导算法在探索与利用之间实现更好的平衡。这种结构在保证安全性的同时, 促进了更高效、稳定的学习过程, 如图 3 所示。

在第 1 种结构中, RL 控制器提供了 1 种前馈控制机制, 控制障碍函数以最小干预来实现控制, 确保安全状态集的前向不变性。该控制器表示如下:

$$u_k(\mathbf{x}) = u_{\theta_k}^{\text{RL}}(\mathbf{x}) + u_k^{\text{CBF}}(\mathbf{x}, u_{\theta_k}^{\text{RL}}) \quad (10)$$

式中, k 为策略迭代次数; $u_k^{\text{CBF}}(\mathbf{x}, u_{\theta_k}^{\text{RL}})$ 为 CBF 控制

器, 过滤不安全的控制动作, 并提供所需的最小控制干预, 以确保总体控制器 $u_k(x)$ 将系统状态保持在安全区间内。 $u_{\theta_k}^{\text{RL}}(x)$ 为强化学习的策略, CBF 控制器尽可能地将 RL 控制器控制在安全集中。如图 3

所示, RL 控制器在训练中会无意中与障碍物相撞。CBF 控制器进行约束, 使移动机器人绕过障碍物。但每一次遇到障碍物时, 都需要通过 CBF 控制器判断, 不能通过学习迭代更新。

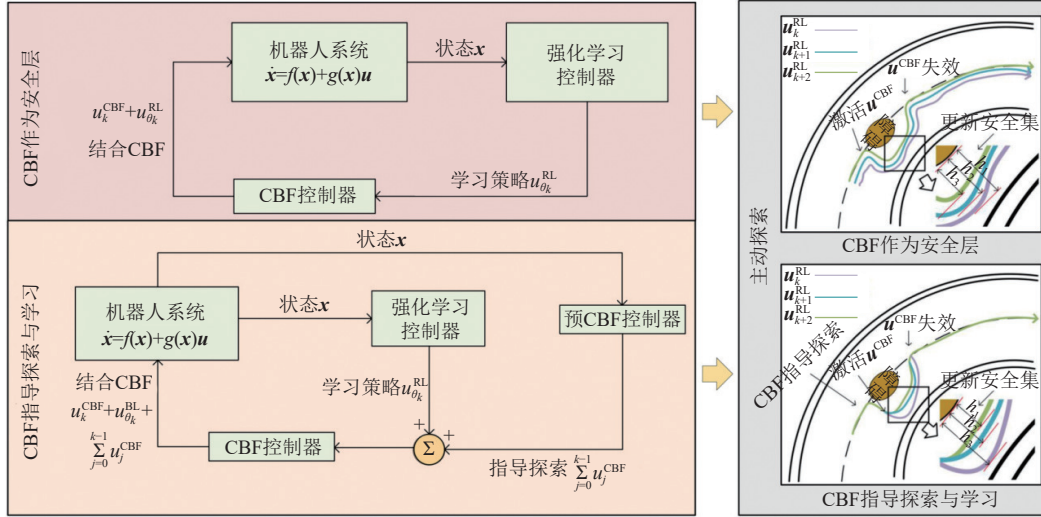


图 3 CBF 结合 RL 安全控制架构示意图

上述提到的策略学习效率低、泛化性差。所以将 CBF 以预处理的形式引入 RL 中更普遍, 文献 [44] 提出了 RL-CBF, CBF 指导探索与学习的结构, 具体控制器表示如下:

$$u_k(x) = u_{\theta_k}^{\text{RL}}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} u_j^{\text{CBF}}(x, u_{\theta_0}^{\text{RL}}, u_{\theta_1}^{\text{RL}}, \dots, u_{\theta_{j-1}}^{\text{RL}}) + u_k^{\text{CBF}}(x, u_{\theta_k}^{\text{RL}} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j^{\text{CBF}}) \quad (11)$$

式中, 安全控制器 $u_k^{\text{CBF}}(x, u_{\theta_k}^{\text{RL}} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j^{\text{CBF}})$ 可以被用来指导智能体的行为, 以避免不良状态或行动。该方法在策略迭代时, 避免了过程中求解 QP 的问题, 减少了计算的复杂度。以这种方式定义控制器围绕之前部署的控制器进行策略更新, 鼓励策略在状态空间的预期区域中操作, 从而提高学习过程的效率。如图 3 所示, 迭代学习中, 移动机器人会根据上一次学习的先验信息进行学习和避障, 更新 CBF 的安全集, 提高策略的学习效率。

近些年来, 由于 RL 在不确定动态系统的优异表现, 不少学者围绕 CBF 与 RL 合成机器人关键安全控制器展开研究。文献 [52] 针对机器学习, 综述了强化学习中不确定动态系统的鲁棒控制。为了平衡任务性能与安全约束的需求, 文献 [53] 提出了神经网络近似策略。在保证安全的情况下,

通过强化学习算法找到最优策略。使用神经网络收敛到最优解, 为控制器提供最优性能。文献 [54] 针对未建模动态问题提出了学习离散时间 koopman 算子的闭环动态策略, 很大程度上解决了扰动问题。文献 [55] 针对安全集, 用神经网络学习 CLF 和 CBF 的观测值, 提出了学习预测反馈混合控制器, 可以安全的在未知环境中运动, 并且推广至安全环境之外的训练数据集。文献 [56] 提出利用小增益条件构建子系统 CBF, 通过求和平方优化程序和反例引导归纳合成两种方法来搜索子系统的 CBF 实现可达性, 进而组合构建了整体的 CBF。文献 [57] 针对收敛和优化问题提出了新的奖励机制, 提高了系统的安全性, 实现了对性能目标的最少优化干预, 同时加快了收敛速度。

在未知环境中, RL 能够自适应地学习环境, 尽可能避免与障碍物相撞。相比 GP, RL 不需要显式地建立模型, 具有广泛的适用性。此外, RL 能够处理高维状态空间和连续动作空间, 并且可以在没有先验知识的情况下进行学习, 适用于复杂的未知环境。然而 RL 也存在一些挑战。如环境噪声和不确定性可能会影响学习出来的策略, 导致不稳定性。此外, 在训练过程中可能会出现过拟合现象, 需要采取一些措施来避免过拟合。同时, 相比 GP, RL 在大量的交互过程中进行学习, 需要更长的训练时间。

4 挑战与展望

随着人工智能和机器人技术的飞速发展,未来机器人协同将不可避免地依赖多种异构作战单元的融合,如图 4 所示。空地协同机器人所面临的主要挑战之一是解决协同过程中的安全问题,具体来说,它们需要在确保障碍安全距离和协同安全距离的同时,有效执行协同任务。此外,空地协同机器人在面对未知环境时,将遭遇各种复杂而难以预测的挑战。这些挑战包括但不限于未知干扰、环境扰动,以及潜在的导弹威胁等。所有这些约束都会给空地协同机器人的设计和运行带来极大的困难。基于现有研究进展,本文针对空地一体化机器人面临的难题,从二次规划可行性问题、异构问题、编队问题 3 个方面,探讨所需应对的挑战。

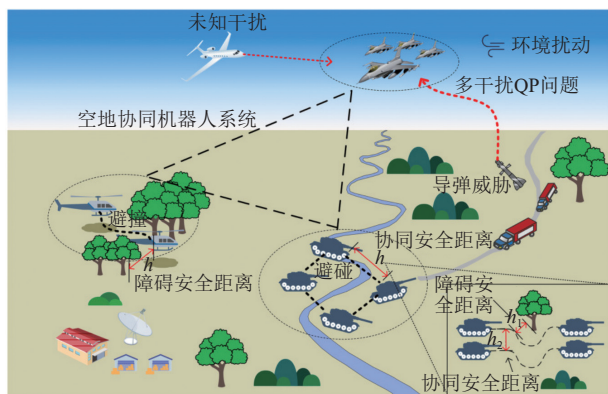


图 4 空地协同机器人展望图

1) 二次规划可行性问题

在未来作战场景中,约束的数量和类型对问题的可解性及计算复杂度产生重要影响。空地机器人架构包含未知干扰、环境扰动、导弹威胁等多个约束的问题,现有算法难以保证找到全局最优解。此外,非凸性和随机性约束在 QP 中也相当棘手。因此,空地机器人架构中多约束 QP 可行性问题是学术界的难题。未来,可以专注于:①设计非冲突 CBF^[38-39],合理地均衡多约束问题,将多层 CBF 的控制约束转化为同一个优化问题,耦合多层非冲突 CBF 以满足安全规则;②优化 CBF 的安全集,设计自适应 CBF 调节机器人实现控制目标和自身安全,扩大 CBF 安全可行域。

2) 异构问题

在复杂的作战场景中,可能需要多个具有不同功能与特点的作战单元共同完成任务。由于异构机器人系统之间存在着巨大的差异,空地协同机器人需要构建各种不同的 CBF,兼容性问题难以避

免。尤其是不同机器人由于动力学模型显现出异质性,而空地机器人需要在多个目标之间进行权衡,如避免碰撞、降低能耗和缩短任务完成时间等。基于 CBF 的多目标优化方法将有助于空地协同机器人在未知环境中安全、高效地开展协同作业。因此,未来可以考虑构建更为通用的 CBF,以应对机器人多系统异质性问题。

3) 协同问题

编队作战时,未来空地对抗的主流作战风格由于涉及多种异构作战单元,经常需要构建各种不同的控制器以实现编队任务的安全性。因此,应围绕 CBF 设计更安全的控制器。考虑到机器人与机器人之间和机器人与障碍物之间的避障,在实现一致性打击的同时需兼顾安全性。目前由于算力限制,CBF 仅能实现在已知环境下的编队安全控制,未来可以将 CBF 与其他编队方法耦合,如合围算法、蜂拥算法和蚁群算法等,用以在执行任务时避免碰撞和冲突。借助于 CBF,机器人能够及时调整自身的运动策略,实现在复杂环境中的安全编队作业。

5 结束语

在机器人系统应用研究的蓬勃进展中,安全控制的问题呈现出日趋复杂的特性。这使得深入研究和整理机器人的安全控制问题成为了保证机器人系统持续发展的关键。本文针对基于 CBF 的机器人系统安全控制问题进行了探索。

首先,本文综述了一种将 CBF 与二次规划优化相结合的理论框架。在此基础上进一步剖析了在已知环境下,机器人所面临的扰动问题及其可行性问题。然后,概述了机器人系统在未知环境中的两种避障策略,这两种策略对于进一步理解和改善机器人在复杂环境中的运行性能具有重要的实践意义。

展望未来,机器人在未知环境中的安全避障技术将是大势所趋。尽管在未知环境中的机器人系统安全控制领域,已经取得了一些研究成果,但对于 CBF 在未知环境中的应用理论和技术,仍然需要进行更深入的研究和探索。

参考文献

- [1] ZACHARAKI A, KOSTAVELIS I, GASTERATOS A, et al. Safety bounds in human robot interaction: A survey[J]. *Safety Science*, 2020, 127: 104667.
- [2] LI B, WEN S, YAN Z, et al. A survey on the control Lyapunov function and control barrier function for

- nonlinear-affine control systems[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2023, 10(3): 584-602.
- [3] 周涛, 张子柯, 陈关荣, 等. 复杂网络研究的机遇与挑战[J]. *电子科技大学学报*, 2014, 43(1): 1-5.
ZHOU T, ZHANG Z K, CHEN G R, et al. The opportunities and challenges of complex networks research[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2014, 43(1): 1-5.
- [4] CHOUDHARY Y, KOLATHAYA S. Energy based control barrier functions for robotic manipulators with large safety constraints[C]//2022 European Control Conference. London: IEEE, 2022: 1328-1335.
- [5] LIU S, LIU L, YU Z. Safe reinforcement learning for discrete-time fully cooperative games with partial state and control constraints using control barrier functions[J]. *Neurocomputing*, 2023, 517: 118-132.
- [6] 娜茜泰, 赵国亮, 翁智, 等. 基于屏障控制函数的轮式机器人系统多目标分布式协同控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2235-2244.
NA X T, ZHAO G L, WENG Z, et al. Multi-objective control of wheeled robot system using control barrier functions[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2235-2244.
- [7] SINGLETARY A, SWANN A, CHEN Y, et al. Onboard safety guarantees for racing drones: High-speed geofencing with control barrier functions[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 2897-2904.
- [8] ZHU Y, CHEN S, ZHANG C, et al. Revised discrete control barrier functions for safe control of a redundant DoF manipulator[C]//International Conference on Intelligent Robotics and Applications. Harbin: Springer International Publishing, 2022: 530-539.
- [9] WARREN C W. Global path planning using artificial potential fields[C]//1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Scottsdale: IEEE Computer Society, 1989: 316-321.
- [10] ALTHOFF M, FREHSE G, GIRARD A. Set propagation techniques for reachability analysis[J]. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 2021, 4: 369-395.
- [11] BOYD S P, VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [12] AMES A D, GRIZZLE J W, TABUADA P. Control barrier function based quadratic programs with application to adaptive cruise control[C]//53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014: 6271-6278.
- [13] AMES A D, XU X, GRIZZLE J W, et al. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62(8): 3861-3876.
- [14] ROMDLONY M Z, JAYAWARDHANA B. Stabilization with guaranteed safety using control Lyapunov-barrier function[J]. *Automatica*, 2016, 66: 39-47.
- [15] TAYLOR A J, AMES A D. Adaptive safety with control barrier functions[C]//2020 American Control Conference. Denver: IEEE, 2020: 1399-1405.
- [16] XIAO W, BELTA C A, CASSANDRAS C G. Sufficient conditions for feasibility of optimal control problems using control barrier functions[J]. *Automatica*, 2022, 135: 109960.
- [17] SINGLETARY A, KOLATHAYA S, AMES A D. Safety-critical kinematic control of robotic systems[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 6: 139-144.
- [18] LONG K, QIAN C, CORTÉS J, et al. Learning barrier functions with memory for robust safe navigation[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, 6(3): 4931-4938.
- [19] USEVITCH J, PANAGOUD D. Adversarial resilience for sampled-data systems using control barrier function methods[C]//2021 American Control Conference. New Orleans: IEEE, 2021: 758-763.
- [20] MARVI Z, KIUMARSI B. Robust satisficing cooperative control barrier functions for multirobots systems using information - gap theory[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(3): 1721-1737.
- [21] AMES A D, COOGAN S, EGERSTEDT M, et al. Control barrier functions: Theory and applications[C]//2019 18th European control conference. Naples: IEEE, 2019: 3420-3431.
- [22] 陈杰, 吕梓亮, 黄鑫源, 等. 非线性系统的安全分析与控制: 障碍函数方法[J]. *自动化学报*, 2023, 49(3): 567-579.
CHEN J, LYU Z L, HUANG X Y, et al. Safety analysis and safety-critical control of nonlinear systems: Barrier function approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(3): 567-579.
- [23] 龙离军, 胡腾飞. CLF-CBF-QP新形式下非线性系统的安全把关控制与优化[J]. *控制理论与应用*. 2022, 39(8): 1387-1396.
LONG L J, HU T F. Safety-critical control and optimization of nonlinear systems based on new forms of CLF-CBF-QP[J]. *Control Theory & Applications*. 2022, 39(8): 1387-1396.
- [24] HSU S C, XU X, AMES A D. Control barrier function based quadratic programs with application to bipedal robotic walking[C]//2015 American Control Conference. Chicago: IEEE, 2015: 4542-4548.
- [25] NGUYEN Q, SREENATH K. Exponential control barrier functions for enforcing high relative-degree safety-critical constraints[C]//2016 American Control Conference. Boston: IEEE, 2016: 322-328.
- [26] XIAO W, BELTA C. Control barrier functions for systems with high relative degree[C]//2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control. Nice: IEEE, 2019: 474-479.
- [27] SINGLETARY A, AHMADI M, AMES A D. Safe control for nonlinear systems with stochastic uncertainty via risk control barrier functions[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 7: 349-354.
- [28] XIAO W, BELTA C A, CASSANDRAS C G. High order control lyapunov-barrier functions for temporal logic specifications[C]//2021 American Control Conference. New Orleans: IEEE, 2021: 4886-4891.
- [29] XIAO W, BELTA C, CASSANDRAS C G. Event-triggered safety-critical control for systems with unknown dynamics[C]//2021 60th IEEE Conference on Decision and Control. Austin: IEEE, 2021: 540-545.
- [30] 贾丙西, 刘山, 张凯祥, 等. 机器人视觉伺服研究进展: 视觉系统与控制策略[J]. *自动化学报*. 2015, 41(5): 861-873.
JIA B X, LIU S, ZHANG K X, et al. Survey on robot

- visual servo control: Vision system and control strategies[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5): 861-873.
- [31] 程云飞, 叶娅兰, 侯孟书, 等. 面向可穿戴生理信号的压缩感知实时重构[J]. *电子科技大学学报*, 2021, 50(1): 36-42.
CHENG Y F, YE Y L, HOU M S, et al. Real-time compressed sensing reconstruction for wearable physiological signals[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2021, 50(1): 36-42.
- [32] WANG H, PENG J, ZHANG F, et al. High-order control barrier functions-based impedance control of a robotic manipulator with time-varying output constraints[J]. *ISA Transactions*, 2022, 129: 361-369.
- [33] MARVI Z, KIUMARSI B. Safety planning using control barrier function: A model predictive control scheme[C]//2019 IEEE 2nd Connected and Automated Vehicles Symposium. Honolulu: IEEE, 2019: 1-5.
- [34] ARAB A, HADŽIĆ I, YI J. Safe predictive control of four-wheel mobile robot with independent steering and drive[C]//2021 American Control Conference. New Orleans: IEEE, 2021: 2962-2967.
- [35] KOLATHAYA S, AMES A D. Input-to-state safety with control barrier functions[J]. *IEEE control systems letters*, 2018, 3(1): 108-113.
- [36] MURAO T, KAWAI H, FUJITA M. Pose control for rigid body motion with an input-to-state safe control barrier function[J]. *International Federation of Automatic Control*, 2019, 52(16): 394-399.
- [37] ALAN A, TAYLOR A J, HE C R, et al. Safe controller synthesis with tunable input-to-state safe control barrier functions[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 6: 908-913.
- [38] XU X. Constrained control of input-output linearizable systems using control sharing barrier functions[J]. *Automatica*, 2018, 87: 195-201.
- [39] CORTEZ W S, DIMAROGONAS D V. Safe-by-design control for euler-lagrange systems[J]. *Automatica*, 2022, 146: 110620.
- [40] ZENG J, ZHANG B, LI Z, et al. Safety-critical control using optimal-decay control barrier function with guaranteed point-wise feasibility[C]//2021 American Control Conference. New Orleans: IEEE, 2021: 3856-3863.
- [41] XIAO W, BELTA C. High-order control barrier functions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 67(7): 3655-3662.
- [42] KHAN M, CHATTERJEE A. Gaussian control barrier functions: Safe learning and control[C]//2020 59th IEEE Conference on Decision and Control. Jeju: IEEE, 2020: 3316-3322.
- [43] CHENG R, OROSZ G, MURRAY R M, et al. End-to-end safe reinforcement learning through barrier functions for safety-critical continuous control tasks[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2019, 33(1): 3387-3395.
- [44] WANG L, THEODOROU E A, EGERSTEDT M. Safe learning of quadrotor dynamics using barrier certificates[C]//2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Brisbane: IEEE, 2018: 2460-2465.
- [45] CHENG R, KHOJASTEH M J, AMES A D, et al. Safe multi-agent interaction through robust control barrier functions with learned uncertainties[C]//2020 59th IEEE Conference on Decision and Control. Jeju: IEEE, 2020: 777-783.
- [46] CLARK A. Control barrier functions for stochastic systems[J]. *Automatica*, 2021, 130: 109688.
- [47] WU Z, YANG R, ZHENG L, et al. Safe learning-based feedback linearization tracking control for nonlinear system with event-triggered model update[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 3286-3293.
- [48] CHEN Y, HEREID A, PENG H, et al. Enhancing the performance of a safe controller via supervised learning for truck lateral control[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2019, 141(10): 101005.
- [49] CHOI J, CASTAÑEDA F, TOMLIN C J, et al. Reinforcement learning for safety-critical control under model uncertainty, using control Lyapunov functions and control barrier functions[EB/OL]. [2020-06-12]. <https://robotics.conference.org/2020/>.
- [50] LI X, SERLIN Z, YANG G, et al. A formal methods approach to interpretable reinforcement learning for robotic planning[J]. *Science Robotics*, 2019, 4(37): eaay6276.
- [51] FAN D D, NGUYEN J, THAKKER R, et al. Bayesian learning-based adaptive control for safety critical systems[C]//2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pairs: IEEE, 2020: 4093-4099.
- [52] ANAND A, SEEL K, GJÆRUM V, et al. Safe learning for control using control lyapunov functions and control barrier functions: A review[J]. *Procedia Computer Science*, 2021, 192: 3987-3997.
- [53] MARVI Z, KIUMARSI B. Safe reinforcement learning: A control barrier function optimization approach[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(6): 1923-1940.
- [54] FOLKESTAD C, CHEN Y, AMES A D, et al. Data-driven safety-critical control: Synthesizing control barrier functions with Koopman operators[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 5(6): 2012-2017.
- [55] DAWSON C, LOWENKAMP B, GOFF D, et al. Learning safe, generalizable perception-based hybrid control with certificates[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 1904-1911.
- [56] NEJATI A, SOUDJANI S, ZAMANI M. Compositional construction of control barrier functions for continuous-time stochastic hybrid systems[J]. *Automatica*, 2022, 145: 110513.
- [57] WU M, LIU L, YU Z, et al. Safe reward-based deep reinforcement learning control for an electro-hydraulic servo system[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(13): 7646-7662.