

引用格式: 詹红有, 梁峻源, 肖宁聪. 基于主动学习代理模型的结构时空相关可靠性分析方法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(1): 84-90.
ZHAN H Y, LIANG J Y, XIAO N C. Structural time and space dependent reliability analysis based on active learning surrogate model[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(1): 84-90.

基于主动学习代理模型的结构时空相关 可靠性分析方法



詹红有, 梁峻源, 肖宁聪*

(电子科技大学 机械与电气工程学院, 成都 611731)

摘要: 结构的极限状态方程常为隐函数, 受到不确定性、时间和空间的影响, 导致其输出为时变随机场。由于结构失效通常是小概率事件, 需要大量有限元模拟, 现有方法难以适用。尽管一阶/二阶可靠性分析方法可用, 但精度和效率有限。该文提出基于主动学习 Kriging 代理模型的结构时空相关可靠性分析方法, 旨在提高计算效率。首先推导随机样本在时空域内的极值符号预测概率, 然后构建相应的学习函数。通过选择具有最小符号预测概率的候选样本加入训练集, 并序列地更新 Kriging 模型, 直至所有候选样本的准确预测概率超过 99%, 同时计算失效概率。通过 3 个算例验证了所提方法的效率和准确性, 为时空相关可靠性分析提供了新思路。

关键词: 时空相关可靠性; 代理模型; 主动学习; Kriging 模型; 失效概率

中图分类号: TH11

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2023255

Structural time and space dependent reliability analysis based on active learning surrogate model

ZHAN Hongyou, LIANG Junyuan, and XIAO Ningcong*

(School of Mechanical and Electrical Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: The limit state function of structures is often implicit and influenced by uncertainty, time, and space, rendering its output a time-dependent random field. Structural failure is typically a small probability event, requiring numerous finite element simulations, making existing methods difficult to apply. First-order/second-order reliability analysis methods are available, but their accuracy and efficiency are limited. This paper proposes a time and space-dependent reliability analysis method based on the active learning surrogate model, aimed at enhancing efficiency. Firstly, derive the probability of extreme value sign prediction for a random sample in the time and space domains and then construct a corresponding learning function. Selecting candidate samples with the minimum sign prediction probability to add to the training set and sequentially updating the Kriging model until the accurate prediction probability of all candidate samples exceeds 99%, the failure probability is computed simultaneously. The efficiency and accuracy of the proposed method are validated through three case studies, offering a new way to time and space reliability analysis.

Key words: time and space dependent reliability; surrogate model; active learning; Kriging model; failure probability

结构系统在实际服役工作阶段同时受到不确定性和来自时间或空间相关因素的影响, 使得结构系统的可靠度是一个时空相关的测度, 具体表现在以下 3 方面: 1) 时间相关: 材料性能随时间动态变化及退化^[1]、结构受到动态^[2]或随机载荷^[3]; 2) 空

间相关: 结构位置和几何参数^[4]、载荷位置变化^[5-6]、结构特定的运动和轨迹方程^[7]、参数空间变异性^[5]; 3) 时间和空间同时相关: 载荷、位置和时间的复杂耦合作用, 以及时空变异性参数的影响^[8]。

时空可靠性分析面临以下挑战。1) 隐函数问

收稿日期: 2023-10-15

基金项目: 国家自然科学基金 (52475244); 四川省科技厅资助项目 (2023NSFSC0373)

作者简介: 詹红有, 博士生, 主要从事结构可靠性方面的研究。

*通信作者 E-mail: ncxiao@uestc.edu.cn

题: 失效模式难以用物理方程或失效机理解析表达, 通常需要采用有限元分析、计算流体力学等技术求解。2) 巨大的计算量: 时空相关失效概率求解需要消耗大量的时间仿真模拟, 样本的极值需要在时空域内大量的离散点上模拟得到, 极大程度上增加了极限状态方程的调用次数, 尤其对于小失效概率问题。3) 结构失效与否难以判断: 极限状态方程同时为随机变量、时间和空间的函数, 需要在时空域内搜索每个随机变量的极值以判断其失效与否, 通常是一个双层求解的问题, 内层求解每个随机变量对应结构输出的最小值、外层计算失效概率。

现有结构时空相关可靠性分析方法主要分为3类。1) 数值模拟方法: 文献[9]采用子集模拟方法分析腐蚀管道的时空相关可靠性, 子集模型方法相比蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 可以在保持准确性的同时, 显著减少函数调用, 但仍需成百上千次的真实极限状态方程调用, 虽然具有较高的精度但计算效率较低。2) 解析解方法: 文献[4]用一阶/二阶可靠性方法 (first/second order reliability method, FORM/SORM) 近似离散时间与空间点上响应的极值, 并将时空问题转化为对响应的极值分析问题, 并结合高斯随机过程建模极值响应。文献[5]采用包络函数建模时空相关的极值极限状态函数, 用顺序高效全局优化方法在时空范围内搜索包络函数的可靠性设计点 (most probable point, MPP), 在 MPP 处使用二次函数来近似包络函数以求解解析梯度和海森矩阵, 用二阶鞍点近似方法估计失效概率。文献[8]从理论上推导了考虑所有基本变量的时空相关的穿越率, 并基于高斯-勒让德积分法计算失效概率。解析法具有较高的计算效率, 但受限于多个 MPP 点、多个失效区域问题, 以及对隐函数求解梯度和积分时, 不可避免地带来近似和舍入误差。3) 代理模型方法: 文献[7]结合自适应均匀设计提出了一种构建时空相关极值极限状态函数的 Kriging 响应面的分析方法。但该方法通过把原始随机变量空间转化为均匀设计空间, 需要足够多的样本来保证转化前后的概率分布等价。代理模型广泛用于结构可靠性分析, 在多失效模式^[10]、高度非线性^[11]、隐函数^[12]等问题上显示出较高的计算效率和精度。与 FORM/SORM 等解析方法相比, 其计算精度更高; 与数值模拟方法相比, 其计算效率更高。因此, 代理模型是一种在精

度和效率上都能取得较好结果的方法。然而, 现有方法大多侧重于结构的静态可靠性分析^[10]或时变可靠性分析^[3], 其在时空相关问题中的应用还有待进一步探索。总之, 现有基于 MPP 点的策略和基于解析解的策略只适用于特定的问题, 现有基于代理模型的时空相关可靠性问题研究较少。高效准确地开展时空相关可靠性分析仍然是一个挑战。

本文基于主动学习 Kriging 代理模型^[13-14]和高效全局优化算法^[15], 考虑 Kriging 模型对样本符号预测概率并构建随机样本在时空域内的极值概率描述, 提出了相应的学习函数和停止准则。采用建立的时空极值极限状态面的 Kriging 代理模型替代真实极限状态方程来计算结构的时空相关失效概率。

1 基础理论与方法

1.1 Kriging 模型

Kriging 模型^[13]是一种基于空间插值的统计建模方法, 可提供未知训练样本的预测均值和方差, 模型方程 $\hat{g}(\mathbf{X})$ 表示为:

$$\hat{g}(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + z(\mathbf{X}) \quad (1)$$

式中, $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$ 是模型的趋势项。本文采用普通 Kriging 模型, 即 $F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}$ 。 $z(\mathbf{X})$ 是均值为零的平稳高斯过程。本文采用高斯相关函数^[13]。

对于未知样本, Kriging 模型的预测均值 $\mu(\mathbf{X})$ 和方差 $\sigma^2(\mathbf{X})$ ^[13]分别表示为:

$$\mu(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}(\mathbf{X})\mathbb{R}_\theta^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}\mathbf{1}) \quad (2)$$

$$\sigma^2(\mathbf{X}) = \sigma_z^2 \left(1 + \mathbf{u}(\mathbf{X})^T (\mathbf{1}^T \mathbb{R}_\theta^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{X}) - \mathbf{r}(\mathbf{X})^T \mathbb{R}_\theta^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{X}) \right) \quad (3)$$

式中, $\mathbf{r}(\mathbf{X}) = \{R_\theta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(i)})\}_{i=1,2,\dots,p}$; $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}^T \mathbb{R}_\theta^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{X}) - 1$ 。

本文利用 Kriging 代理模型构建时空相关问题的极限状态方程, 减少真实极限状态方程的调用次数, 并采用基于 Kriging 模型的全局优化方法搜索随机样本在时空域内的最小值。

1.2 高效全局优化算法

高效全局优化算法 (efficient global optimization, EGO)^[15]首先利用初始训练点构建 Kriging 模型, 计算期望改进函数值 (expected improvement, EI)。然后选择具有最大 EI 函数值的样本来更新 Kriging 模型。重复此过程直到达到收敛条件。EI 函数的表达式为:

$$EI(\mathbf{X}) = (\mu(\mathbf{X}) - y^*) \Phi\left(\frac{\mu(\mathbf{X}) - y^*}{\sigma(\mathbf{X})}\right) + \sigma(\mathbf{X}) \phi\left(\frac{\mu(\mathbf{X}) - y^*}{\sigma(\mathbf{X})}\right) \quad (4)$$

式中, y^* 是训练样本的最大响应值; $\Phi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 分别是标准正态分布的分布函数和密度函数。下一个新的训练样本选择为:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \arg \max EI(\mathbf{X}) \quad (5)$$

当满足 $EI(\mathbf{X}^{(k+1)})/y^* \leq 0.002$ 时, 停止 Kriging 模型的迭代, 并得到最大值 y^* 。本文采用 EGO 算法求解随机样本在时空域内的最小极值。

1.3 主动学习 Kriging 模型

为了减少有限元模拟次数, 基于主动学习 Kriging 模型和蒙特卡罗模拟 (active learning and Kriging based Monte-Carlo simulation, AK-MCS) [14] 方法, 利用少量训练样本计算失效概率。AK-MCS 算法首先使用初始训练点构建 Kriging 模型, 计算 U 学习函数值。然后选择具有最小 U 学习函数值的样本来更新 Kriging 模型。重复此过程直到达到收敛条件。U 学习函数表示为:

$$U(\mathbf{X}) = \frac{|\mu(\mathbf{X})|}{\sigma(\mathbf{X})} \quad (6)$$

选择具有 U 学习函数最小值的样本作为新的训练样本:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \arg \min U(\mathbf{X}) \quad (7)$$

当 MCS 样本的最小误判概率小于 2.275% 时, 停止 Kriging 模型的迭代并结合 MCS 模拟计算失效概率。本文将 AK-MCS 方法扩展到时空相关可靠性分析中。

1.4 时空相关可靠性

结构的响应与时间、空间和随机变量相关 [5]。极限状态方程定义为:

$$Y = g(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t) \quad (8)$$

式中, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{n_X}]^T$ 是 n_X 维随机输入向量; $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_{n_S}]^T$ 是位于空间域 $[\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}]$ 内的 n_S 维空间输入向量; t 是位于区间 $[t, \bar{t}]$ 内的时间变量; Y 是极限状态方程的输出响应。结构在空间域 $[\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}]$ 和时间域 $[t, \bar{t}]$ 的失效概率定义为:

$$P_f = \Pr\{g(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t) \leq 0, \exists \mathbf{S} \in [\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}], \exists t \in [t, \bar{t}]\} \quad (9)$$

结构在空间域 $[\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}]$ 和时间域 $[t, \bar{t}]$ 内任意一个位置失效时, 结构失效, 其失效概率为:

$$P_f = \Pr\left\{\min_{\mathbf{S} \in [\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}], t \in [t, \bar{t}]} g(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t) \leq 0\right\} \quad (10)$$

通过式 (10), 对每个随机样本 \mathbf{X} 求其在时空域内的最小极值点, 用极值点的符号判断随机样本 \mathbf{X} 失效与否, 时空相关可靠性问题可以转化为静态可靠性问题, 因此 MCS 方法可以用来估计失效概率:

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^{N_m} \text{IF}(\mathbf{X}_i)}{N_m} \quad (11)$$

式中, $\text{IF}(\mathbf{X})$ 是符号函数, 当 $\min_{\mathbf{S} \in [\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}], t \in [t, \bar{t}]} g(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t) \leq 0$ 时, $\text{IF}(\mathbf{X}) = 1$, 否则, $\text{IF}(\mathbf{X}) = 0$ 。MCS 样本数目 N_m 通过失效概率的变异系数 [14] $\text{Cov}P_f$ 小于 5% 得到:

$$\text{Cov}P_f = \sqrt{\frac{1 - P_f}{P_f N_m}} \quad (12)$$

对失效概率量级未知问题, 通常采用序列 MCS 模拟 [16] 逐渐增加 MCS 样本来满足式 (12), 在每次序列中 N_m 通常取为 10^4 。MCS 方法虽然简单但是需要对每个随机样本计算其在空间域和时间域上下界内的极值, 尽管可以采用 1.2 节的 EGO 算法, 但对所有随机样本都需要进行一次全局优化, 对需要有限元分析和小概率问题, 实际的计算资源是不可行的。

关于式 (10), 只需关注 $\min_{\mathbf{S} \in [\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}], t \in [t, \bar{t}]} g(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$ 的符号, 并不需要准确地计算 \mathbf{X} 在时空域内的输出 Y 的准确极值, 因此本文提出一种主动学习 Kriging 模型来准确判断 MCS 样本在时空域内的极值符号。

2 所提的结构时空相关可靠性方法

2.1 构建初始 Kriging 模型

首先采用拉丁超立方抽样 [17] 产生初始训练样本 $[\mathbf{X}_D, \mathbf{S}_D, t_D]$, 初始训练样本的数目为 $n_I = 5(n_X + n_S + 1)$, 其中 n_X 、 n_S 分别表示随机变量、空间变量的数目。为了使训练样本均匀分布在变量空间, 捕捉全局趋势。 \mathbf{X}_D 的抽样上下界为 $[\mu_X - 5\sigma_X, \mu_X + 5\sigma_X]$, 其中 μ_X 和 σ_X 分别为随机变量的均值和标准差, t_D 和 \mathbf{S}_D 的上下界为 $[\underline{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{S}}]$ 和 $[t, \bar{t}]$ 。

计算真实极限状态方程值 $Y_D = g(\mathbf{X}_D, \mathbf{S}_D, t_D)$ 作为初始输出训练样本。通过式 (1) 构建初始 Kriging 模型 $Y = \hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$, 并能通过式 (2) 和式 (3)

计算 MCS 样本在初始 Kriging 模型预测的均值和方差, 式 (11) 计算失效概率。然而, 因缺乏 MCS 样本符号预测的概率描述, 此时计算的失效概率并不准确。本文提出了描述 Kriging 模型预测时空极值的符号预测准确率的概率描述。

2.2 寻找极值点及其符号预测概率

利用 EGO 算法求 MCS 样本的时空极值, EGO 算法的初始 Kriging 优化模型 $\hat{g}_o(\mathbf{S}, t)$ 用 $[\mathbf{S}_D, t_D]$ 作为输入, 计算 MCS 样本 \mathbf{X}_i 对应的时空域内的 Kriging 模型预测输出 $Y_i^o = \hat{g}_o(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^j, t_D^j), j = 1, 2, \dots, n_I$ 作为输出。通过 EGO 算法依次选择极值点, 此时选择的极值点并不是真实的极值点, 而是 Kriging 模型预测的值, 因为计算失效概率只需要判断极值点的失效与否, 即极值点的符号。构建的 Kriging 代理模型 $\hat{g}(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D, t_D)$ 不仅能提供样本 \mathbf{X}_i 在时空域内位置处的预测值 $\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}, t) = \beta + r(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}, t)\mathbb{R}_\theta^{-1}(\mathbf{Y} - \beta\mathbf{1})$, 也能提供符号准确预测的概率值:

$$P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}, t) = \Phi(|\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}, t)|/\sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}, t)) \quad (13)$$

假设 $(\mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})$ 是通过 EGO 算法第一次迭代计算的样本 \mathbf{X}_i 最小值, \mathbf{X}_i 在时空 $(\mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})$ 位置的符号准确预测概率为:

$$P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1}) = \Phi\left(\frac{|\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})|}{\sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})}\right) \quad (14)$$

把 $(\mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})$ 和对应的预测值 $Y_{n_I+1}^o = \hat{g}_o(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})$ 加入训练样本 $[\mathbf{S}_D, t_D] = [\mathbf{S}_D, t_D; \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1}]$, $\mathbf{Y}^o = [Y^o; Y_{n_I+1}^o]$ 更新 $\hat{g}_o(\mathbf{S}_D, t_D)$ 优化得到第 2 个新的极值点 $(\mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})$, 此时 $(\mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})$ 的符号预测概率 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2}) \neq \Phi\left(\frac{|\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})|}{\sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})}\right)$, 而只有当 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1}) = 1$ 时, $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2}) = \Phi\left(\frac{|\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})|}{\sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})}\right)$ 。因此, $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})$ 的预测概率是在 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1})$ 预测的条件下的条件概率, 因此:

$$P\left\{\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2}\right) \mid \left(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1}\right)\right\} = \Phi\left(\frac{|\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})|}{\sigma(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+2}, t_D^{n_I+2})}\right) \quad (15)$$

EGO 优化过程不断进行, 当达到最小值点 $(\mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*})$ 时, 同时也得到了 $(\mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*})$ 的准确预测概率为:

$$P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*}) = P\left\{\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+1}, t_D^{n_I+1}\right\} \times \prod_{l=2}^{n^*} P\left\{\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+l}, t_D^{n_I+l} \mid \mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+l-1}, t_D^{n_I+l-1}\right\} \quad (16)$$

上述 EGO 算法在寻找随机样本 \mathbf{X}_i 的极值时空位置 $(\mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*})$ 时, 并不涉及真实极限状态方程的调用, 构建的 Kriging 优化模型 $\hat{g}_o(\mathbf{S}, t)$ 采用的是 $\hat{g}(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D, t_D)$ 的预测值。EGO 算法只是用来作为求解器和寻找极值点的优化求解器。

在得到每个随机样本 \mathbf{X}_i 的 Kriging 模型 $Y = \hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$ 预测极值 $Y_i^* = \mu(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$ 和预测符号概率 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*})$ 时, 虽然 $Y = \hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$ 能用来计算失效概率, 但初始 Kriging 模型的精度还需不断提升, 本文提出一种新的学习函数自适应地更新 Kriging 模型。

2.3 学习函数

在 2.2 节中, 得到每个 MCS 样本 \mathbf{X}_i 的极值对应的最小值空间位置 $\mathbf{S}_D^{n_I+n^*}$ 和时刻 $t_D^{n_I+n^*}$ 及其准确预测概率 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*})$ 之后, 根据式 (16), 具有较小预测概率的样本说明其符号预测不确定性较大, 样本更可能位于时空极值极限状态面附近, 因此, 选择符号预测概率最小的样本和对应的空间位置和时刻作为下一个更新样本:

$$\left(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)}\right) = \arg \min P\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_I+n^*}, t_D^{n_I+n^*}\right) \quad (17)$$

通过式 (17) 不断选择新的样本更新 Kriging 模型, 直到满足下一节的停止准则。

2.4 停止准则

当所有样本的符号准确预测概率大于 99% 时, 说明对于 MCS 样本, 构建的 Kriging 模型已经能准确地预测其失效与否, 因此满足以下停止准则:

$$P\left(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)}\right) \geq 0.99 \quad (18)$$

式 (18) 通过符号预测概率的角度判断 Kriging 模型对 MCS 样本的符号预测准确程度, 而不用额外地提前定义任何参数。

2.5 所提方法步骤

本文提出的基于主动学习代理模型的时空相关可靠性分析方法计算步骤如下。

1) 产生初始训练样本 $[\mathbf{X}_D, \mathbf{S}_D, t_D]$ 并计算响应 $Y_D = g(\mathbf{X}_D, \mathbf{S}_D, t_D)$, 如 2.1 节所示。记失效样本数目 $n_F = 0$; 序列 MCS 模拟次数 $n_s = 0$ 。

2) 产生大小为 n_p 的 MCS 样本, $n_s = n_s + 1$, $n_p = 10^4$ 。

3) 构建或更新 Kriging 模型 $Y = \hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, t)$ 。

4) 计算 Kriging 模型对每个 MCS 样本的极值预测值 $\mu(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_i+n^*}, t_D^{n_i+n^*})$ 和准确预测概率 $P(\mathbf{X}_i, \mathbf{S}_D^{n_i+n^*}, t_D^{n_i+n^*})$ 。

5) 判断是否达到停止准则 $P(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)}) \geq 0.99$ ，如果达到，转步骤 7)，否则，转步骤 6)。

6) 通过式 (17) 选择新的训练样本 $(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ ，并计算其真实极限状态方程响应 $Y^{(k+1)} = g(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ 。把 $(\mathbf{X}^{(k+1)}, \mathbf{S}^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ 和 $Y^{(k+1)}$ 添加到训练样本 $[\mathbf{X}_D, \mathbf{S}_D, t_D]$ 和 Y_D 中，并转步骤 3)。

7) 计算此次序列 n_s 的失效样本数目 n_f ， $n_F = n_F + n_f$ ，计算失效概率 $P_f = n_f / (n_s n_p)$ ，并计算变异系数 $\text{Cov}P_f = \sqrt{(1 - P_f) / (P_f n_s n_p)}$ 。判断 MCS 样本数目是否足够。如果 $\text{Cov}P_f \geq 0.05$ ，则转步骤 2)，否则转步骤 8)。

8) 输出结构时空相关失效概率 P_f 。

3 数值算例

本节用 3 个算例用来验证所提方法：数学例子、滑块装置和金属梁。所提方法与 MCS 方法、基于 FORM/SORM 的方法进行对比，用与 MCS 结果的相对误差衡量准确性，用极限状态方程调用次数衡量效率。为减少随机性，独立运行 MCS 方法和所提方法 10 次，取平均值作为最终结果。

3.1 小失效概率算例

一个包含时间和一维空间的小失效概率例子^[5]的极限状态方程为：

$$g(\mathbf{X}, s, t) = X_1^2 X_2 - 5X_1 t + (X_2 + 1)t^2 - 2X_2 s + X_1 s^2 - 8 \quad (19)$$

式中， X_1 和 X_2 是正态分布变量， $X_i \sim N(3.5, 0.25^2)$ ， $i = 1, 2$ ，时空域 $z = [t \times s]$ 为 $[0, 5] \times [0, 5]$ 。式 (19) 存在解析解的时空极值方程 $G(\mathbf{X})$ ，关于 t 和 s 求偏导数可以得到：

$$\begin{cases} \partial g(\mathbf{X}, s, t) / \partial t = 0 \\ \partial g(\mathbf{X}, s, t) / \partial s = 0 \end{cases} \quad (20)$$

解出 t 和 s 关于 \mathbf{X} 的函数为：

$$\begin{cases} t = 5X_1 / 2(X_2 + 1) \\ s = X_2 / X_1 \end{cases} \quad (21)$$

把式 (21) 代入式 (19) 得到时空极值方程：

$$G(\mathbf{X}) = X_1^2 X_2 - \frac{25X_1^2}{4(X_2 + 1)} - \frac{X_2^2}{X_1} - 8 \quad (22)$$

本文方法的一次运行结果的训练样本和时空极值函数如图 1 所示。图 1 中 $G(\mathbf{X}) = 0$ 为极值极限状态面，即式 (19) 中的关于时空域 $t \times s$ 的极值极限状态面。从图 1 中看出，新增的训练样本位于极值极限状态面附近，说明所提出的学习函数能够自适应地寻找新的样本点并将其加入训练样本集中，从而提高 Kriging 模型对随机样本在时空域内极值符号的准确预测概率，当所有的随机样本的符号准确预测概率大于 99% 时，所建立的 Kriging 模型已经足够精确，并可同时得到式 (19) 的失效概率。

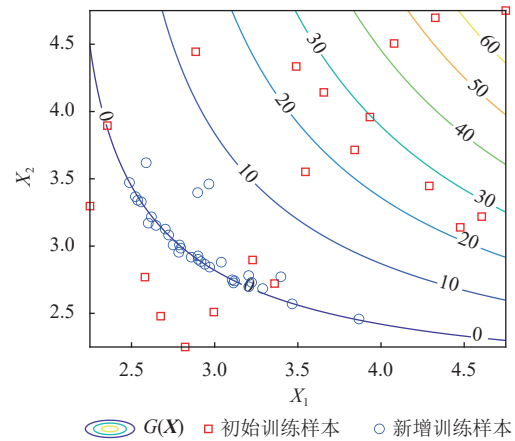


图 1 数学算例的极值极限状态面

MCS 方法、本文所提代理模型方法和文献 [5] 所提基于 FORM 或 SOSPA 的包络函数方法的结果如表 1 所示。从表 1 中看出，本文所提方法相比 MCS 结果的相对误差不到 1% 且只需要 51.6 次极限状态方程调用次数。基于 FORM 或 SORM 的包络函数法计算的失效概率由于 FORM 或 SORM 对于极值极限状态面的一阶或二阶函数近似而不可避免地存在误差，而文中所提的方法直接对每个随机样本在时空域内的极值点构建 Kriging 二分类超平面，能够准确地判断极值点的符号，具有较高的精度。文献 [5] 中基于 FORM 或 SORM 的方法在寻找极限状态方程 $g(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ 的可靠性设计点时需要依次固定 \mathbf{X} 求解 \mathbf{z} 的最差性能时空位置，固定 \mathbf{z} 求解 \mathbf{X} 的可靠性设计点，重复求解最差性能时刻位置和 MPP 点的过程是一个求解极值的过程，需要对极限状态方程进行大量的调用，而所提方法采用一个主动学习 Kriging 模型去近似极限状态方程 $g(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ 中的极值极限状态面，避免了远离极值极限状态面样本的评估，因此具有较高的效率，并且仅需要较少的训练样本即可建立准确的代理模型。

表1 小失效概率算例的计算结果

方法	调用次数	失效概率 P_f	相对误差/%
MCS	8.24×10^6	$5.400 0 \times 10^{-4}$	—
FORM/ENV	314	$3.357 5 \times 10^{-4}$	37.82
SOSPA/ENV	333	$4.902 2 \times 10^{-4}$	9.22
本文所提单环方法	51.60	$5.366 5 \times 10^{-4}$	0.62

3.2 滑块装置

滑块装置^[4]如图2所示,偏移量 h 和初始角度 θ_0 为两个空间变量,空间域 $S=[h,\theta_0]$ 为 $[14.9,15.1] \times [0^\circ,5^\circ]$,同时装置在运动过程中的角速度 $\omega=1$ rad/s,时间 t 的范围为 $[0,0.2\pi]$ s。机构的杆长 L_1 和 L_2 为两个正态随机变量, $L_1 \sim N(15,0.15^2)$ 和 $L_2 \sim N(35,0.35^2)$ 。滑块装置的极限状态方程定义为:

$$g(L_1, L_2, \theta_0, h, t) = 1.1 - (x_a - x_r) \quad (23)$$

式中, x_a 和 x_r 分别表示运动位置和所需位置,计算如下:

$$x_a = L_1 \cos(\theta_0 + \omega t) + \sqrt{L_2^2 - (h + L_1 \sin(\theta_0 + \omega t))^2} \quad (24)$$

$$x_r = 15 \cos(\omega t) + \sqrt{35^2 - (15 + 15 \sin(\omega t))^2} \quad (25)$$

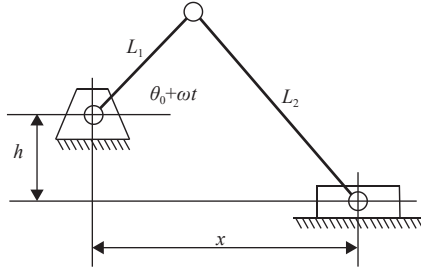


图2 滑块装置简图

MCS和本文所提方法的结果与文献[4]基于SORM的极值方法的结果如表2所示,本文所提方法得到了较为准确的失效概率,虽然相比基于SORM的极值方法相对误差为1.57%,但仍在不到2%的误差范围内。就计算效率而言,相比基于SORM的极值方法的214次调用,本文所提方法仅需43次调用。因此,对于这个运动机构的时空可靠性评估,所提方法在极限状态方程次数调用方面表现最佳。

表2 滑块装置的计算结果

方法	调用次数	失效概率 P_f	相对误差/%
MCS	3.64×10^5	1.693×10^{-2}	—
基于SORM的极值方法 ^[4]	214	1.697×10^{-2}	0.24
本文所提单环方法	43	1.670×10^{-2}	1.57

3.3 金属梁的热变形

复合材料金属梁^[6]随温度变化将发生热膨胀或收缩,温度随时间变化的方程为 $\Delta F = F(0.01 \sin(0.1t) + 1)$, $t \in [0,24]$ h。金属梁由铜和不锈钢两种材料黏合在一起, E_C 表示铜的杨氏模量, E_I 表示不锈钢的杨氏模量。梁的长度 L 取决于安装位置, $L = L_0(-s^2 + s + 1)$, $s \in [0,1]$ m。当温度变化作为热负荷施加在梁上时,梁将在图3所示的右端侧垂直方向上偏转。 h 和 w 分别表示梁的截面积的高度和宽度。所有的随机变量列在表3中。

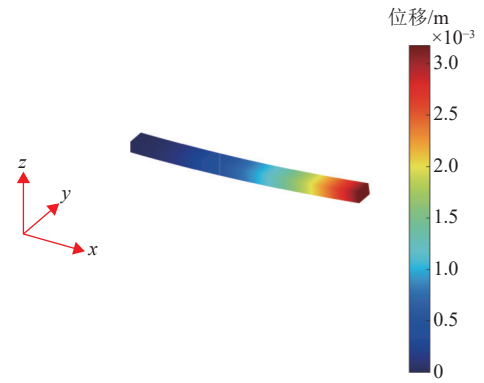


图3 金属梁的热变形云图

表3 金属梁的随机变量

变量	均值	标准差	分布
W/m	8×10^{-3}	5×10^{-4}	对数正态
H/m	2×10^{-3}	5×10^{-4}	对数正态
L/m	0.100	0.001	对数正态
E_C/Pa	1.37×10^{11}	1.37×10^7	对数正态
E_I/Pa	1.30×10^{11}	1.30×10^7	对数正态
$T/^\circ\text{C}$	130	13	对数正态

当梁的挠度超过 $\delta = 8 \times 10^{-3}$ 时,金属梁失效,极限状态方程表示为:

$$g(\mathbf{X}, s, t) = \delta - \Delta_z(w, h, L, E_C, E_I, \Delta F, t, s) \quad (26)$$

式中, $\Delta_z(w, h, L, E_C, E_I, \Delta F, t, s)$ 通过有限元方法求解得到。针对此有限元算例, MCS解的方法不适用。因此,本文所提单环方法与基于AK-MCS和EGO的双环方法进行对比,结果如表4所示,本文所提方法计算得到的失效概率为0.024,仅需63.5次函数调用。相较于AK-U+EI解,其相对误差不超过5%。然而,在函数调用次数方面,本文所提方法从334次减少至63.5次,相比AK-U+EI的双环方法,所提的单环方法将极限状态方程调用次数减少了80%。因为AK-U+EI是双环方法,内层寻优需要多次调用极限状态方程,而本文

所提方法则为单环方法, 内层寻优只需一次极限状态方程调用, 因此更为高效。本文提出的基于主动学习代理模型的方法能够利用少量的训练样本来计算失效概率, 具备较高的计算效率。

表 4 金属梁的计算结果

方法	调用次数	失效概率 P_f	相对误差
双环方法	334	2.525×10^{-2}	—
本文所提方法	63.5	2.408×10^{-2}	0.046

4 结束语

针对结构可靠性中极限状态方程同时受到随机变量、时间和空间相关变量等输入的挑战, 本文提出了基于代理模型的结构时空相关可靠性分析方法。通过少量训练样本建立初始 Kriging 代理模型, 结合高效全局优化算法构造随机样本在时空域内失效与否的概率描述, 提出相应的学习函数不断选择位于极值极限状态面附近的训练样本更新代理模型, 直到所有随机样本极值符号准确预测概率超过 99%。最终通过建立的 Kriging 模型计算失效概率。所提方法充分利用了主动学习 Kriging 模型对隐函数的高效近似建模能力, 以及高效全局优化算法对随机样本在时空域内最小值快速寻优的优势。通过小失效概率、滑块装置、有限元 3 个算例验证了所提方法的有效性。结果表明, 与 MCS 方法和基于 FORM/SORM 的方法相比, 所提方法具有最高的计算效率和准确性, 并且实现了极限状态方程调用次数从几百次减少到几十次, 极大提高了计算效率。所提方法为实际时空相关可靠性问题提供了一种可行的分析思路。

参考文献

- [1] HU Z, MAHADEVAN S. A single-loop Kriging surrogate modeling for time-dependent reliability analysis[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2016, 138(6): 061406.
- [2] LUO Y, CHEN J B, SPANOS P D. Determination of monopile offshore structure response to stochastic wave loads via analog filter approximation and GV-GDEE procedure[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2022, 67: 103197.
- [3] WANG Z Q, CHEN W. Time-variant reliability assessment through equivalent stochastic process transformation[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 152: 166-175.
- [4] WEI X P, DU X P. Uncertainty analysis for time- and space-dependent responses with random variables[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2019, 141(2): 021402.
- [5] WU H, DU X P. Envelope method for time-and space-dependent reliability prediction[J]. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering*, 2022, 8(4): 041201.
- [6] WU H, DU X P. Time-and space-dependent reliability-based design with envelope method[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2023, 145(3): 031708.
- [7] YU S, WANG Z L, LI Y. Time and space-variant system reliability analysis through adaptive Kriging and weighted sampling[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 166: 108443.
- [8] LU Z H, QIAO H P, ZHANG X Y, et al. An innovative method for space-time-dependent reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2023, 102: 102326.
- [9] CHAKRABORTY S, TEFAMARIAM S. Subset simulation based approach for space-time-dependent system reliability analysis of corroding pipelines[J]. *Structural Safety*, 2021, 90: 102073.
- [10] XIAO N C, YUAN K, ZHOU C N. Adaptive Kriging-based efficient reliability method for structural systems with multiple failure modes and mixed variables[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 359: 112649.
- [11] QIAN H M, WEI J, HUANG H Z, et al. Kriging-based reliability analysis for a multi-output structural system with multiple response Gaussian process[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2023, 39(5): 1622-1638.
- [12] ZHU X M, LU Z Z, YUN W Y. An efficient method for estimating failure probability of the structure with multiple implicit failure domains by combining Meta-IS with IS-AK[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 193: 106644.
- [13] KAYMAZ I. Application of Kriging method to structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 2005, 27(2): 133-151.
- [14] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145-154.
- [15] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13(4): 455-492.
- [16] LELIÈVRE N, BEAUREPAIRE P, MATTRAND C, et al. AK-MCSi: A Kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models[J]. *Structural Safety*, 2018, 73: 1-11.
- [17] STEIN M. Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling[J]. *Technometrics*, 1987, 29(2): 143-151.

编辑 张 莉