

引用格式: 张屹尚, 张煜, 杨旭锋. 融合自适应 RBF 模型和多模态优化重要抽样的小失效概率可靠性分析方法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(6): 840-849.  
ZHANG Y S, ZHANG Y, YANG X F. Reliability analysis method with small failure probability incorporated adaptive RBF model and multimodal optimization importance sampling[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(6): 840-849.



# 融合自适应 RBF 模型和多模态优化重要抽样的小失效概率可靠性分析方法

张屹尚<sup>1</sup>, 张煜<sup>2</sup>, 杨旭锋<sup>2\*</sup>

(1. 中国航发商用航空发动机有限责任公司 上海 200241; 2. 西南交通大学 机械工程学院 成都 610031)

**摘要:** 可靠性分析的目的是估计结构在多种不确定因素作用下的失效概率, 而传统的方法如有限元分析等在进行可靠性分析时非常耗时。针对这一问题该文提出了一种新的主动学习 (AL) 结构可靠性分析方法, 该方法结合了径向基函数 (RBF) 模型和基于多模态优化的重要抽样 (IS) 技术, 旨在高效准确地估计小失效概率。该方法采用 RBF 模型建立基于实验设计 (DoE) 的真实功能函数的元模型, 得到代理极限状态平面 (LSS), 然后利用基于进化多目标优化的多模态优化 (EMO-MMO) 方法获得代理 LSS 上的最可能点 (MPP), 根据每个 MPP 的权重建立辅助概率密度函数 (iPDF)。最后根据收敛准则不断添加新的训练点让 RBF 模型足够精确, 利用最后一次训练的 RBF 模型, 求解出结构失效概率。算例验证结果表明基于主动学习的径向基函数重要抽样 (AL-RBF-IS) 方法能够在保证准确度的同时显著减少所需的训练点数量和计算时间, 特别是在处理小失效概率问题时表现出色。

**关键词:** 可靠性分析; 小失效概率; 重要抽样; 多模态优化; RBF 模型

中图分类号: TB114.3

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2024322

## Reliability analysis method with small failure probability incorporated adaptive RBF model and multimodal optimization importance sampling

ZHANG Yishang<sup>1</sup>, ZHANG Yu<sup>2</sup>, and YANG Xufeng<sup>2\*</sup>

(1. AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd., Shanghai 200241, China;

2. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** The purpose of structural reliability analysis is to estimate the failure probability of a structure under the action of multiple uncertainties, and traditional methods such as finite element analysis are very time-consuming in performing reliability analysis. To address this problem a new active learning (AL) method for structural reliability analysis that combines a radial basis function (RBF) model and an important sampling (IS) technique based on multimodal optimization is proposed, aiming at estimating small failure probabilities efficiently and accurately. The method uses the RBF model to build a metamodel of the true performance function based on the design of experiments (DoE), obtains the surrogate limit state surface (LSS), and then adopts the evolutionary multi-objective optimization-based multimodal optimization (EMO-MMO) method to acquire the most probable point (MPP) on the surrogate LSS, and builds an instrumental probability density functions (iPDF) based on the weight of each MPP. Finally, new training points are continuously added according to the convergence criterion to make the RBF model sufficiently accurate, and the structural failure probability is solved using the last trained RBF model. The verification results compared with classical reliability analysis and a complex engineering example show that the AL-RBF-IS method can significantly reduce the number of required training points and computing time while guaranteeing the accuracy, especially performing well when dealing with small failure probability problems.

**Key words:** reliability analysis; small failure probability; importance sampling; multimodal optimization; RBF model

收稿日期: 2024-11-25

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (52475168)

作者简介: 张屹尚, 博士, 主要从事航空发动机结构可靠性分析方面的研究。

\*通信作者 E-mail: xufengyang0322@swjtu.edu.cn

在实际工程中,引起结构失效的因素往往具有不确定性。结构的可靠性分析就是估计不确定因素下的失效概率。为了准确计算失效概率,一般需要对功能函数进行多次函数计算。但在实际的工程应用当中,功能函数通常需要通过有限元分析得到。因此,可靠性分析领域近几十年的重要研究方向就是如何最大限度地减少功能函数的计算次数<sup>[1]</sup>。

基于 Kriging 模型的主动学习 (AL-KRG) 可靠性分析方法,以其高效、高精度的优点,成为当前可靠性分析领域的研究热点。其中,融合主动学习与蒙特卡罗模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 的 AK-MCS 方法是最具代表性的方法<sup>[2]</sup>。近年来,研究人员不断加深对 AL-KRG 模型的研究,从而提高了 AL-KRG 方法的效率,丰富了其应用场景。这些研究主要分为如下几个方面:1) 加点准则<sup>[3-4]</sup>; 2) 面向需求的收敛准则<sup>[5-6]</sup>; 3) 极小概率失效问题<sup>[7-8]</sup>; 4) 系统可靠性分析问题<sup>[9-10]</sup>; 5) 包含认知不确定性的可靠性分析问题<sup>[11]</sup>。

除了 Kriging 模型,其他类型的代理模型也在结构可靠性分析领域有较多研究。根据代理模型的预测值,选出极限状态平面附近的点,同时定义拥挤度函数,防止添加的训练点过于拥挤。文献 [12] 提出了一种用于径向基函数 (radial basis function, RBF) 模型的主动学习函数,并利用 Jackknife 交叉验证方法得到的失效概率构造了相应的收敛准则。文献 [13] 提出了基于 RBF 的顺序代理可靠性方法,该方法经算例验证可以利用较少的样本数量使代理模型在失效边界附近的重要区域的精度得到提高,进而也提高了可靠性分析的效率。文献 [14] 提出采用自适应 RBF 模型来近似功能函数,然后用遗传算法来求解 MPP (most probable point),并将这种可靠性分析方法命名为 RBF-GA。文献 [15] 提出的各向异性技术和快速交叉验证方法提高了 RBF 的局部精度,降低了 RBF 模型训练中的计算强度。上述方法均采用蒙特卡罗方法进行失效概率的估计,在面对小失效概率问题时非常耗时。另外,Jackknife 交叉验证技术需要建立多个 RBF 子模型并多次预测子模型的标准差,这也会导致计算时长增加。

因此,本文提出主动学习 BRF 模型与多模态优化重要抽样相结合的小失效概率可靠性分析方法,先用 Jackknife 交叉验证方法得到 RBF 模型的不确定参数,根据 RBF 模型的不确定参数获得代理的极

限状态平面 (limit state surface, LSS),然后利用基于进化多目标优化的多模态优化 (evolutionary multi-objective optimization-based multimodal optimization, EMO-MMO)<sup>[16]</sup> 算法获取 MPP,考虑 MPP 的权重建立辅助概率密度函数 (instrumental probability density functions, iPDF)。最后根据收敛准则不断添加新的训练点让 RBF 模型足够精确,利用最后一次训练的 RBF 模型,求解得出结构失效概率。

## 1 重要抽样与 RBF 模型理论基础

### 1.1 重要抽样

结构失效概率的定义为:

$$P_f = P\{G(\mathbf{x}) < 0\} = \int_{R^n} I_F(G(\mathbf{x}) < 0) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中,  $R^n$  表示  $n$  维实向量;  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  为随机变量,且满足  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $G(\mathbf{x})$  为结构的功能函数;  $P\{\cdot\}$  为一个事件发生的概率;  $f(\mathbf{x})$  为联合概率密度函数;  $I_F(\mathbf{x})$  为失效指示函数。

重要抽样方法是在标准正态空间中进行。标准正态空间可以通过等概率变换得到,如 Rosenblatt 变换、近似正态分布变换和 Nataf 变换等。用  $\mathbf{u}$  表示变换后的变量,则功能函数就从  $G(\mathbf{x})$  变为  $G(\mathbf{u})$ 。引入辅助概率密度函数 (iPDF)  $h(\mathbf{u})$ , 式 (1) 可表示为:

$$P_f = P\{G(\mathbf{u}) < 0\} = \int_{R^n} I_F(G(\mathbf{u}) < 0) \frac{\phi(\mathbf{u})}{h(\mathbf{u})} h(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (2)$$

式中,  $\phi(\mathbf{u})$  为标准正态空间的概率密度函数 (probability density functions, PDF)。失效概率可以被估计为:

$$P_f^{IS} = \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} I_F(\mathbf{u}^{(i)}) \frac{\phi(\mathbf{u}^{(i)})}{h(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (3)$$

式中,  $\{\mathbf{u}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N_{IS}\}$  是  $h(\mathbf{u})$  产生的重要样本。变异系数可以表示为:

$$\text{Cov}(P_f^{IS}) \approx \frac{\sqrt{\text{Var}(P_f^{IS})}}{P_f^{IS}} \quad (4)$$

失效概率的方差可以表示为:

$$\text{Var}(P_f^{IS}) \approx \frac{1}{N_{IS}} \left[ \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} I_F[G(\mathbf{u}^{(i)}) < 0] \left( \frac{\phi(\mathbf{u}^{(i)})}{h(\mathbf{u}^{(i)})} \right)^2 - (P_f^{IS})^2 \right] \quad (5)$$

## 1.2 RBF 模型

RBF 模型使用了一系列以训练点为中心且对称的基函数。径向基函数的特殊之处在于函数响应随着离中心点的距离而单调增加或减少, 所以径向基函数模型的参数就是中心点、距离和径向基函数的精确形状。

功能函数  $G(\mathbf{u})$  用 RBF 模型表示为:

$$G(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k \varphi(r_{u,i}, c) \beta_i = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\beta} \quad (6)$$

式中,  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi(r_{u,1}, c), \varphi(r_{u,2}, c), \dots, \varphi(r_{u,k}, c)]$  表示基函数向量;  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]^T$  表示权重系数向量;  $k$  为径向基函数的个数;  $\varphi(\cdot)$  即为径向基函数。  $r_{u,i} = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(i)}\|$  表示任意点  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{u}^{(i)}$  之间的空间距离;  $c$  是径向基函数的形状参数。

将训练样本  $\{\mathbf{u}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k\}$  和对应的响应  $G(\mathbf{u}^{(i)})$  代入式 (6), 有:

$$\begin{bmatrix} G(\mathbf{u}^{(1)}) \\ G(\mathbf{u}^{(2)}) \\ \vdots \\ G(\mathbf{u}^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(r_{11}, c) & \varphi(r_{12}, c) & \cdots & \varphi(r_{1k}, c) \\ \varphi(r_{21}, c) & \varphi(r_{22}, c) & \cdots & \varphi(r_{2k}, c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(r_{k1}, c) & \varphi(r_{k2}, c) & \cdots & \varphi(r_{kk}, c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{G} = [G(\mathbf{u}^{(1)}), G(\mathbf{u}^{(2)}), \dots, G(\mathbf{u}^{(k)})]^T$ ;  $\boldsymbol{\Phi}$  是训练点位置的 RBF 矩阵, 表达式为:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi(r_{11}, c) & \varphi(r_{12}, c) & \cdots & \varphi(r_{1k}, c) \\ \varphi(r_{21}, c) & \varphi(r_{22}, c) & \cdots & \varphi(r_{2k}, c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(r_{k1}, c) & \varphi(r_{k2}, c) & \cdots & \varphi(r_{kk}, c) \end{bmatrix} \quad (9)$$

则系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  为:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{G} \quad (10)$$

利用权重系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  和式 (6) 即可对未知点处的预测响应进行估计。形状参数  $c$  对 RBF 模型的精度有较大的影响, 采用 Jackknife 交叉验证技术获取最优形状参数表达式为:

$$\min_c \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\beta_i / \tilde{r}^{(i)})^2 \quad (11)$$

式中,  $\beta_i$  为  $\boldsymbol{\beta}$  的第  $i$  个元素;  $\tilde{r}^{(i)}$  是  $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$  的第  $i$  对角线

元素。

## 1.3 RBF 模型的预测标准差

模型预测标准差可以作为判断代理模型在未知样本处拟合精度的标准, 但 RBF 模型本身不能估计预测标准差。RBF 模型的预测均值和方差可以采用 Jackknife 交叉验证方法获取。

当前实验设计 (design of experiments, DoE) 为  $\{\mathbf{u}^{(i)}, G(\mathbf{u}^{(i)})\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 。如果除去一个训练点  $(\mathbf{u}^{(i)}, G(\mathbf{u}^{(i)}))$ , 则径向基函数模型变为:

$$\mathbf{G}^{(-i)} = \boldsymbol{\Phi}^{(-i)} \boldsymbol{\beta}^{(-i)} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{G}^{(-i)}$  表示  $\mathbf{G}$  去掉  $G(\mathbf{u}^{(i)})$  后的向量;  $\boldsymbol{\Phi}^{(-i)}$  是删除  $\boldsymbol{\Phi}$  的第  $i$  行和第  $i$  列元素得到的矩阵,  $\boldsymbol{\beta}^{(-i)}$  是新的系数向量。去除一个训练点  $(\mathbf{u}^{(i)}, G(\mathbf{u}^{(i)}))$  后, RBF 模型在未知点  $\mathbf{u}$  处的预测值为:

$$\hat{G}^{(i)}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(\mathbf{u}) (\boldsymbol{\Phi}^{(-i)})^{-1} \mathbf{G}^{(-i)} \quad (13)$$

式中,  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$  由删掉  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  的第  $i$  列元素得到。式 (13) 中存在  $\boldsymbol{\Phi}^{(-i)}$  的逆求解, 计算复杂度为  $O(m^3)$ 。Jackknife 方法估计模型的预测均值和标准差需要  $m$  次逆运算。因此, 总的时间复杂度为  $O(m^4)$ 。通过借助分块求逆运算, 可以将总体的时间复杂度降至  $O(m^3)$ , 如式 (14) 所示。

$$(\boldsymbol{\Phi}^{(-i)})^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(-i)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(-i)} \tilde{\mathbf{u}}^{(-i)T} / \tilde{d}^{(-i)} \quad (14)$$

得到  $k$  个子模型的预测值后, 可以按照 Jackknife 方法来定义  $\mathbf{u}$  的预测均值和预测标准差:

$$\mu_G(\mathbf{u}) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \hat{G}^{(m)}(\mathbf{u}) \quad (15)$$

$$\sigma_G^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{m=1}^k (\hat{G}^{(m)}(\mathbf{u}) - \mu_G(\mathbf{u}))^2 \quad (16)$$

并且与 Kriging 模型类似, 可以认定  $G(\mathbf{u}) \sim N(\mu_g(\mathbf{u}), \sigma_g^2(\mathbf{u}))$  [17-19]。

## 2 AL-RBF-IS

### 2.1 代理的 LSS

极限状态平面 LSS 可以将随机空间划分为失效区和安全区。但预测的不确定性使得 RBF 模型无法将失效区与安全区区分开来。考虑不确定性, 具有较大概率或置信度成为失效区域的为:

$$\tilde{\mathcal{Q}}_F = \{\mathbf{u} | \mu_G(\mathbf{u}) \leq -\alpha \sigma_G(\mathbf{u})\} \quad (17)$$

式中,  $\alpha$  是一个常数, 控制着置信度。如果将  $\alpha$  设置为 1.96, 置信度将会是 95%。功能函数正负号有较大可能性被错误预测的区域为:

$$\tilde{Q}_U = \left\{ \mathbf{u} \left\| \frac{\mu_G(\mathbf{u})}{\sigma_G(\mathbf{u})} \right\| \leq \alpha \right\} \quad (18)$$

如图 1 所示, 使用  $\tilde{Q}_F$  和  $\tilde{Q}_U$  的集合能够保证任何潜在的失效区域不发生遗漏, 表示为:

$$\tilde{Q}_S = \tilde{Q}_F \cup \tilde{Q}_U = \{ \mathbf{u} | \mu_G(\mathbf{u}) \leq \alpha \sigma_G(\mathbf{u}) \} \quad (19)$$

代理失效区域  $\tilde{Q}_S$  的控制函数为:

$$\hat{G}_S(\mathbf{u}) = \mu_G(\mathbf{u}) - \alpha \sigma_G(\mathbf{u}) \quad (20)$$

$\hat{G}_S(\mathbf{u}) = 0$  就是本文的代理 LSS。

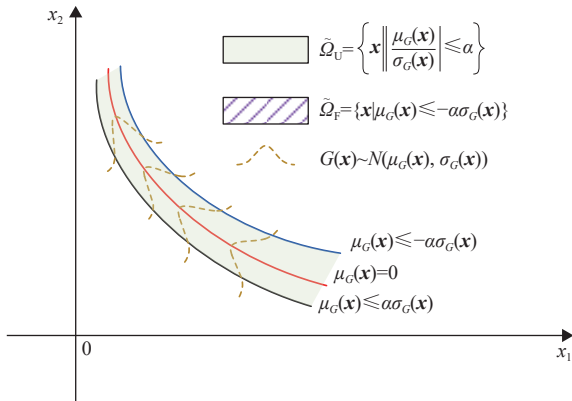


图 1 有较大可能性失效的区域  $\tilde{Q}_F$  和正负号被错误预测的区域  $\tilde{Q}_U$

### 2.2 搜寻多个 MPP

在标准正态空间中, 约束优化问题的最优解就是 MPP, 表示为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\| \\ \text{s.t. } \hat{G}_S(\mathbf{u}) \leq 0, \mathbf{u} \in [\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}] \end{cases} \quad (21)$$

式中,  $[\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}]$  是规定的搜索区域; 在实际应用中,  $G(\mathbf{u})$  很可能是一个多模态函数, 因而  $\hat{G}_S(\mathbf{u})$  也是多模态的。

此外, 从初始 RBF 模型得到的 LSS 会非常不准确, 这时尽管  $G(\mathbf{u})$  是单峰的, 不代表  $\hat{G}_S(\mathbf{u})$  也是单峰,  $\hat{G}_S(\mathbf{u})$  很有可能是多模态的, 因此式 (21) 可能存在多个全局最优解。即使式 (21) 只存在一个全局最优解, 某些局部最优解对于失效概率积分的贡献不能直接忽略掉。如果仅以一个 MPP 为中心构建 iPDF, 会使有偏估计的误差变得很大。所以搜寻代理 LSS 上所有的 MPP 对于提高模型估计的准确度是有意义的。

本文利用基于进化多目标优化的多模态优化 (EMO-MMO) [16] 算法对式 (21) 进行求解。式 (21) 是一个约束优化问题, 将它转换为无约束问题:

$$\begin{aligned} \min P(\mathbf{u}) &= \|\mathbf{u}\| + \lambda \max(\hat{G}_S(\mathbf{u}), 0)^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{u} &\in [\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}] \end{aligned} \quad (22)$$

式中,  $\lambda$  是一个非常大的惩罚因子。将式 (22) 转化为多目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{u}) &= (P(\mathbf{u}), d(\mathbf{u})) \\ \text{s.t. } \mathbf{u} &\in [\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}] \end{aligned} \quad (23)$$

式中,  $d(\mathbf{u})$  是一个保持候选解方案多样性的多样性函数。利用非支配排序遗传算法 II (non-dominated sorting genetic algorithms-II, NSGA-II), 可以求解式 (23), 得到在两个目标函数之间权衡的最优解。在 EMO-MMO 中,  $d(\mathbf{u})$  是根据  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{u}$  所属的生态位 (即邻域) 中所有其他解之间的距离来定义的 [1]。

在 EMO-MMO 中, 历史候选解决方案被存储在档案中。可以通过局部优化器进一步将多个最优解细化。具体程序如下。

1) 在历史候选解中, 选择满足  $\hat{G}_S(\mathbf{u}) \leq 0$  的点。记为  $\mathbf{D} = \{ \mathbf{u}_k^-, k = 1, 2, \dots \}$ 。

2) 通过 K-means 聚类算法, 将  $\mathbf{D}$  划分为  $N_{\text{clust}}$  聚类  $\{ \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{\text{clust}} \}$ 。在  $\{ \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{\text{clust}} \}$  中获得最靠近代理 LSS  $\hat{G}_S(\mathbf{u}) = 0$  的最优点。记  $N_{\text{clust}}$  最优点为  $\{ \mathbf{u}_F^{(1)}, \mathbf{u}_F^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_F^{(N_{\text{clust}})} \}$ 。

3) 通过局部优化器细化最优解。输入  $\mathbf{u}_F^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_{\text{clust}}$ ) 作为起始点, 采用基于梯度的优化方法进行局部搜索。由于  $\mathbf{u}_F^{(i)}$  已经非常接近真正的最优解, 所以搜索空间可以定义为一个以  $\mathbf{u}_F^{(i)}$  为中心的非常小的超立方体, 如  $[\mathbf{u}_F^{(i)} - 0.1\mathbf{U}, \mathbf{u}_F^{(i)} + 0.1\bar{\mathbf{U}}]$ 。

4) 排除距离代理 LSS 较远的解, 得到代理 LSS 的多个最优解 (MPPs), 记为  $\{ \mathbf{u}_i^*, i = 1, 2, \dots, k \}$ 。

### 2.3 考虑 MPP 的权重建立 iPDF

EMO-MMO 算法能够找到混合全局最优解、局部最优解甚至劣等解的多个解。这就需要建立一个能够考虑每个解的权重的 iPDF, 避免训练点分配到不重要的失效区域而造成浪费。  $\{ \mathbf{u}_i^*, i = 1, 2, \dots, k \}$  表示用 EMO-MMO 算法得到的 MPPs, 将每个 MPP 的权重定义为:

$$w_i = \frac{\phi(-\|\mathbf{u}_i^*\|)}{\sum_{i=1}^k \phi(-\|\mathbf{u}_i^*\|)} \quad (24)$$

式中,  $\phi(-\|\mathbf{u}_i^*\|)$  为标准正态分布累积函数在  $-\|\mathbf{u}_i^*\|$  处计算的函数值, 则 iPDF 可以表示为:

$$\tilde{h}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k w_i \varphi(\mathbf{u} | \mathbf{u}_i^*) \quad (25)$$

其中:

$$\varphi(\mathbf{u} | \mathbf{u}_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i^*)^2}{2}\right) \quad (26)$$

然后根据文献 [20] 中使用的采样方法即可生成  $N_{IS}$  个服从  $\tilde{h}(\mathbf{u})$  的重要样本。

## 2.4 收敛准则

由式 (19) 可知代理失效区域  $\tilde{\Omega}_S$  已经包含了区域  $\tilde{\Omega}_U$ , 因此添加的训练点将基本位于  $\tilde{\Omega}_U$  中。随着不断地加入新的训练点, 区域  $\tilde{\Omega}_U$  的大小将会不断减小,  $\tilde{\Omega}_S$  将不断地趋近于  $\tilde{\Omega}_F$ 。因此收敛条件定义为:

$$\varepsilon_{P_f} = \frac{\tilde{P}_{fP}^{IS}}{\tilde{P}_{fB}^{IS}} > \gamma \quad (27)$$

式中,  $\tilde{P}_{fP}^{IS}$  和  $\tilde{P}_{fB}^{IS}$  分别为系统失效区域的合理性度量 and 相信用度量;  $\gamma = 0.95$  为本文规定的公差。 $\tilde{P}_{fP}^{IS}$  和  $\tilde{P}_{fB}^{IS}$  的计算公式为:

$$\tilde{P}_{fP}^{IS} = \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} I_F(\mathbf{u}^{(i)} \in \tilde{\Omega}_F) \frac{\phi(\mathbf{u}^{(i)})}{\tilde{h}(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (28)$$

$$\tilde{P}_{fB}^{IS} = \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} I_F(\mathbf{u}^{(i)} \in \tilde{\Omega}_S) \frac{\phi(\mathbf{u}^{(i)})}{\tilde{h}(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (29)$$

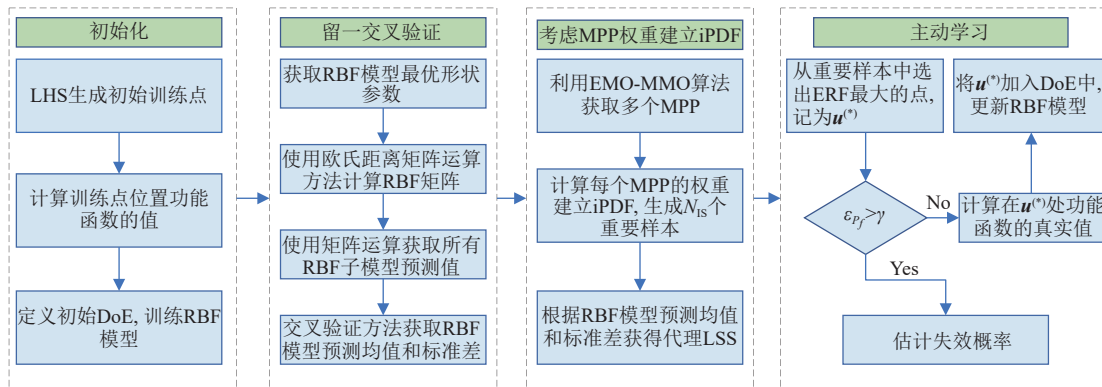


图 2 AL-RBF-IS 算法流程图

## 3 数值算例

本节展示了 3 个数值算例和 1 个工程算例来体现该算法的性能, 每个数值算例均用该算法独立执行 10 次, 求出平均结果。

### 3.1 二维 4 失效区域算例

该算例是文献 [7] 中的算例, 该算例相较文献 [21] 中的经典算例, 修改了参数  $k_1 = 7, k_2 = 6/\sqrt{2} + 4$ 。

## 2.5 AL-RBF-IS

本文提出的 AL-RBF-IS 方法的流程如图 2 所示, 具体过程如下。

- 1) 将随机变量转化为标准正态空间。
- 2) 采用拉丁超立方抽样 (Latin hypercube sampling, LHS) 方法生成少量初始训练点, 对于中低维问题, 一般为 12 个, 对于高维问题应适当增加初始训练点数量。采样空间选择  $[-5, 5]^n$ , 然后根据初始 DoE 构建初始 RBF 模型。
- 3) 使用欧式距离矩阵运算方法计算 RBF 矩阵, 获得 RBF 模型预测均值和标准差。
- 4) 根据文献 [1] 的 EMO-MMO 算法获取多个 MPP。
- 5) 计算每个 MPP 的权重并建立 iPDF, 生成  $N_{IS}$  个服从  $\tilde{h}(\mathbf{u})$  的重要样本。
- 6) 根据当前的 RBF 模型的预测信息和式 (20) 得到代理 LSS。
- 7) 在  $N_{IS}$  个重要样本中找出 ERF 最大的点, 记为  $\mathbf{u}^{(*)}$ 。
- 8) 如果  $\varepsilon_{P_f} > \gamma$ , 则说明 RBF 模型足够精确, 可以执行步骤 9), 否则, 计算在  $\mathbf{u}^{(*)}$  处功能函数的真实值, 将  $\mathbf{u}^{(*)}$  加入 DoE 中, 更新 RBF 模型。
- 9) 根据 RBF 模型预测失效概率。

功能函数定义为:

$$G(u_1, u_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} k_1 + \frac{(u_1 - u_2)^2}{10} - \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} \\ k_1 + \frac{(u_1 - u_2)^2}{10} + \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} \\ u_1 - u_2 + k_2 \\ u_2 - u_1 + k_2 \end{array} \right\} \quad (30)$$

式中,  $u_1, u_2$  服从标准正态分布, 失效概率的参考

值为  $p_f = 5.596 \times 10^{-9}$ , 参考值是基于子集模拟算法 100 次独立运行得到的<sup>[7]</sup>, 样本大小为  $10^7$ 。不同方法的计算结果见表 1。

表 1 不同方法的二维 4 失效区域算例结果

方法	失效概率 $P_f$	功能函数调用次数 $N_{calls}$	变异系数 $Cov/\%$
子集模拟 <sup>[7]</sup>	$5.596 \times 10^{-9}$	$10^7$	0.04
eAK-MCS <sup>[7]</sup>	$5.58 \times 10^{-9}$	61.9	1.57
ALK-EMO-IS	$5.63 \times 10^{-9}$	12+29.9	4.00
AL-RBF-IS	$5.6211 \times 10^{-9}$	12+26.6	2.58

从表 1 可以看出虽然该算例经过调整后失效概率很小, 但 eAK-MCS 方法和本文提出的算法仍然可以估计出较为准确的失效概率, 而 AL-RBF-

IS 相较于 eAK-MCS 使用的训练点更少。AL-RBF-IS 在一次计算中的学习过程如图 3 所示。从图中可以看出, 除去初始样本点外, 其他多数训练点都在失效区域与安全区域的边界附近, EMO-MMO 算法能够识别出所有的 MPP, 从而能够有效识别出极限状态平面。图 3 为 AL-RBF-IS 在一次测试中的学习过程, 图 4 为其学习结果, 第 4 次和最后的学习结果非常接近, 这是因为第 4 次学习, RBF 模型已经非常接近收敛准则。从图中可以看出利用 EMO-MMO 算法在每次学习过程中都能够识别出所有的 MPP, 使得 RBF 模型在达到收敛准则时, 能够预测所有的失效区域。

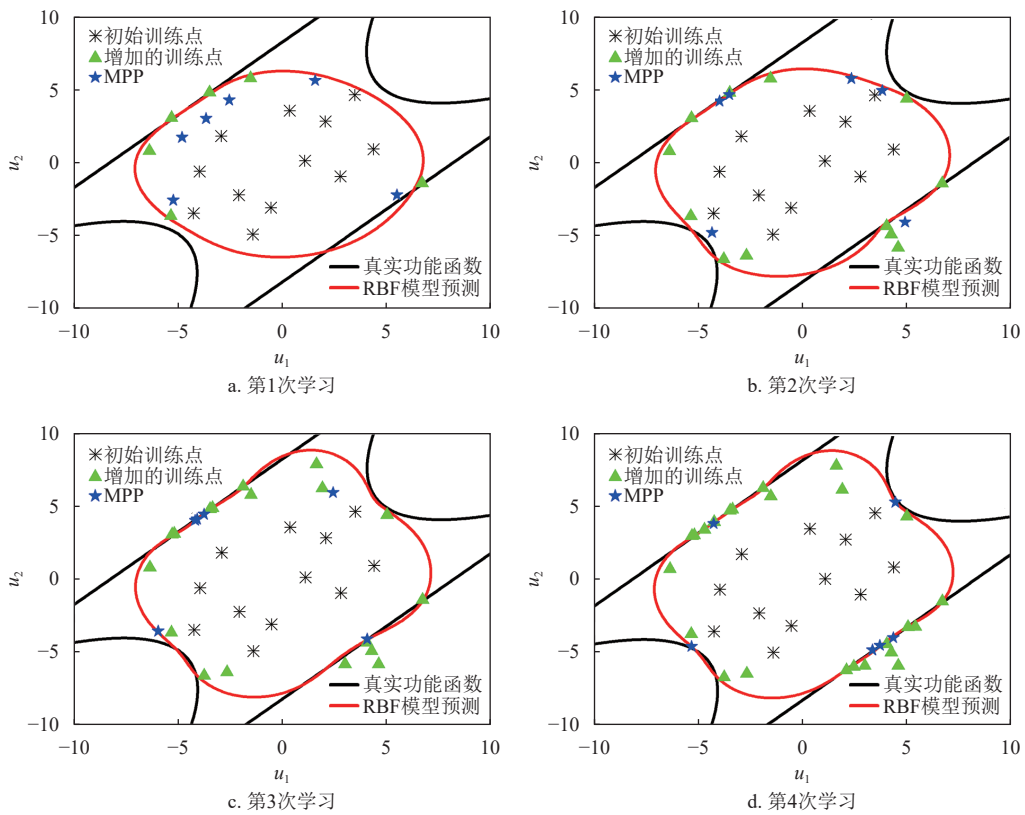


图 3 AL-RBF-IS 某一次学习过程

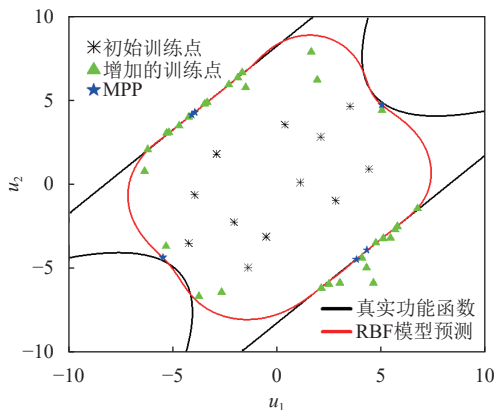


图 4 AL-RBF-IS 算法测试结果

### 3.2 非线性振荡器算例

该算例是一个六维的非线性无阻尼的振荡器, 如图 5 所示。功能函数定义为:

$$G(c_1, c_2, m, r, t_1, F) = 3r - \left| \frac{2F}{m\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{2}\right) \right| \quad (31)$$

式中,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ 。6 个独立随机变量的分布情况见表 2。变量  $F$  的标准差改为 0.075 后, 失效概率  $P_f = P_u(G(c_1, c_2, m, r, t, F) < 0)$  变得更小。参考值为  $P_f = 1.514 \times 10^{-8}$ 。

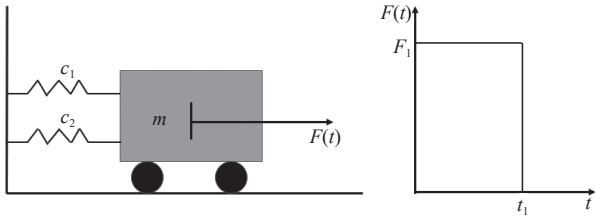


图 5 非线性振荡器系统

表 2 非线性振荡器系统输入随机变量分布

随机变量	$m$	$c_1$	$c_2$	$r$	$F$	$t$
均值	1	1	0.1	0.5	0.45	1
标准差	0.05	0.1	0.01	0.05	0.075	0.2

不同方法的计算结果见表 3。结果表明, 本文提出的 AL-RBF-IS 方法在求解非线性振荡器算例时, 有较好的表现, 与 AK-IS、eAK-MCS 等方法相比优势明显。本文提出的 AL-RBF-IS 方法的功能函数调用次数虽然略多于 ALK-EMO-IS 方法, 但变异系数更小。AL-RBF-IS 方法与 ALK-EMO-IS 方法的某一次学习过程对比如图 6 所示, 图中展示了失效概率和估计误差的变化情况, 所提方法预测的失效概率逐渐收敛于真实的失效概率, 误差逐渐达到收敛准则的要求, 同时迭代次数更少。

表 3 不同方法下非线性振荡器系统计算结果

方法	失效概率	功能函数调用次数	变异系数Cov/%
MCS <sup>[7]</sup>	$1.51 \times 10^{-8}$	$10^7$	0.04
AK-MCSi <sup>[7]</sup>	$1.44 \times 10^{-8}$	77	<5.00
AK-IS <sup>[45]</sup>	$1.53 \times 10^{-8}$	29+38	2.70
eAK-MCS <sup>[7]</sup>	$1.51 \times 10^{-8}$	44.7	8.35
AK-DIS <sup>[1]</sup>	$1.58 \times 10^{-8}$	48	—
ALK-EMO-IS <sup>[1]</sup>	$1.54 \times 10^{-8}$	36.6	4.08
AL-RBF-IS	$1.57 \times 10^{-8}$	12+27.4	2.88

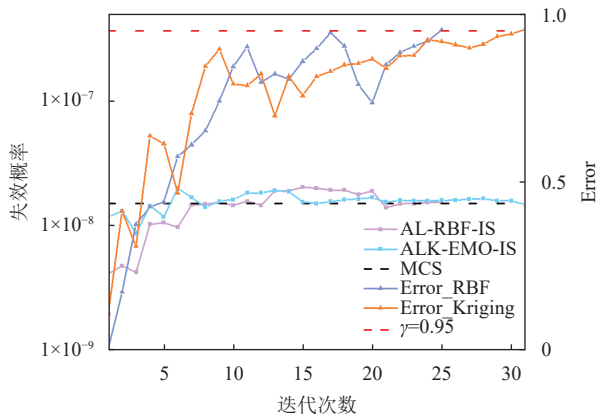


图 6 估计失效概率和估计误差的演变

### 3.3 23 杆桁架结构

23 杆桁架结构如图 7 所示, 结构受到 6 个垂直力作用, 该算例有 10 个独立的随机变量, 分别为横杆和斜杆的弹性模量 ( $E_1$  和  $E_2$ ) 和横截面积 ( $A_1$  和  $A_2$ ) 以及 6 个垂直力, 具体分布情况见表 4。功能函数定义为:

$$G(\mathbf{u}) = 160 - \Delta(\mathbf{u}) \quad (32)$$

式中,  $\Delta$  是桁架底部中点处的挠度。

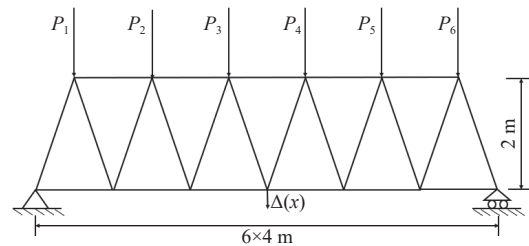


图 7 23 杆桁架结构

表 4 23 杆桁架结构随机变量分布

变量	分布类型	均值	标准差
弹性模量 $E_1, E_2/\text{MPa}$	对数正态	$2.1 \times 10^5$	$2.1 \times 10^4$
横截面积 $A_1/\text{mm}^2$	对数正态	$2.0 \times 10^3$	200
横截面积 $A_2/\text{mm}^2$	对数正态	$1.0 \times 10^3$	100
载荷 $P_1 \sim P_6/\text{N}$	极值分布	$5.0 \times 10^4$	$7.5 \times 10^3$

表 5 为不同方法的计算结果。参考文献 [1] 提出了结合 Kriging 模型和基于多模态优化的重要抽样可靠性分析方法, 该方法能够得到准确的结果, 但调用了 164.8 次功能函数, 而本文提出的方法仅调用了 87.3 次功能函数, 同样得出了准确的结果。这再一次体现了 AL-RBF-IS 方法的优势。AL-RBF-IS 方法与 ALK-EMO-IS 方法的学习过程对比如图 8 所示, 从图中可以看出失效概率逐渐收敛于真实的失效概率, 精度逐渐提高, 同时本文方法的迭代次数更少。

表 5 不同方法下 23 杆桁架结构计算结果

方法	失效概率 $P_f$	功能函数调用次数 $N_{\text{calls}}$	变异系数Cov/%
IS <sup>[1]</sup>	$6.17 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^5$	—
FORM <sup>[1]</sup>	$1.91 \times 10^{-7}$	120	—
SORM <sup>[1]</sup>	$6.45 \times 10^{-7}$	252	—
Full PCE <sup>[1]</sup>	$3.71 \times 10^{-7}$	443	—
Sparse PCE <sup>[1]</sup>	$2.58 \times 10^{-8}$	207	—
ALK-EMO-IS <sup>[1]</sup>	$6.10 \times 10^{-7}$	164.8	4.93
AK-PMC <sup>[22]</sup>	$6.24 \times 10^{-7}$	160.2	2.37
AL-RBF-IS	$6.0358 \times 10^{-7}$	12 + 75.3	5.05

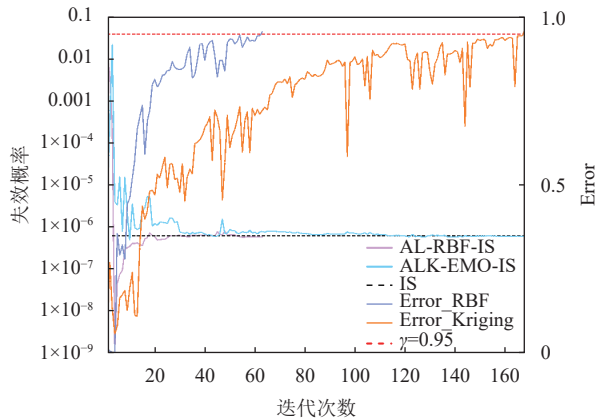


图 8 估计失效概率和估计误差的演变

### 3.4 工程应用

在工程实际中, 发动机的管路之间通过接头和螺母进行连接, 然后通过卡箍和支架固定到发动机上, 形成发动机的管路系统。发动机的工作状态一般处于随机振动的环境中, 而且管路系统一般都比较长, 且跨度较大, 这进一步导致管路系统的不稳定性。因此, 一般需要额外的支撑约束来增强其稳定性。本文以实际发动机燃油管路为研究对象, 研究其在随机振动激励下的可靠性问题。

本文采用 ANSYS APDL 命令建立管路的有限元模型, 采用 pipe 单元模拟管路, 支撑约束用刚度为  $1.72 \times 10^6$  N/m 的弹簧单元建立。管路系统节点总数为 44 个, 单元总数为 43 个, 具体模型如图 9 所示。在本文中随机激励以加速度功率谱密度函数 (PSD) 的形式给出, 如图 10 所示, 其数值根据 GJB 150.18A-2009 中冲击试验要求进行随机振动试验获得。激励施加在图 9 所示 P12 和 P15 端口的节点上, 方向为全局坐标系的 x 方向。通过 ANSYS 软件获得的管路系统 x 轴方向的应力云图如图 11 所示。

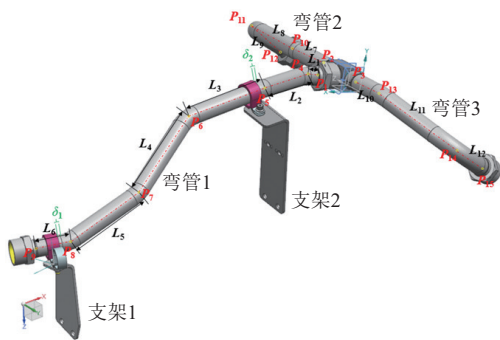


图 9 管路系统模型

本文考虑管路系统的几何尺寸、材料 10 个不确定性因素的影响, 随机输入变量的设置情况见

表 6, 其中部分直管是指图 9 中  $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_9$  和  $L_{12}$ 。基于最大应力的管路系统的功能函数定义为:

$$G(\mathbf{u}) = \sigma_s - \sigma_{\max}(\mathbf{u}) \quad (33)$$

式中,  $\sigma_s$  为最大许用应力, 本文取 63 MPa;  $\sigma_{\max}$  为基于有限元分析的最大应力;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  表示输入的随机变量,  $G(\mathbf{u}) \leq 0$  表示结构失效。

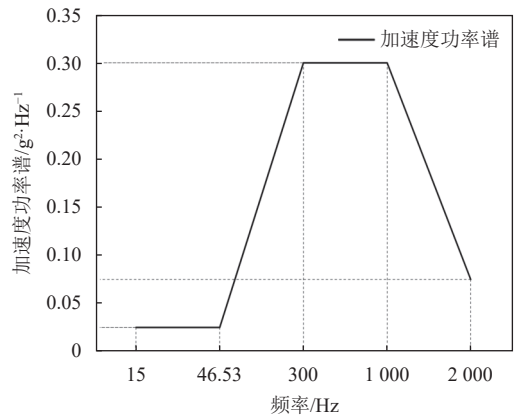


图 10 加速度功率谱密度函数

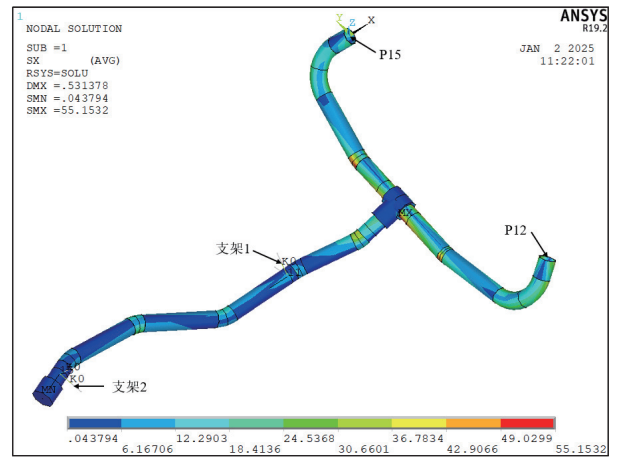


图 11 管路系统应力响应云图

表 6 管路系统随机变量分布

随机变量	分布类型	均值	标准差
管路材料弹性模量 $E_1$ /MPa	正态分布	$2 \times 10^5$	$1 \times 10^4$
管路材料密度 $\rho_1$ /kg·m <sup>-3</sup>	正态分布	7 916	395.8
堵头材料弹性模量 $E_2$ /MPa	正态分布	$2 \times 10^5$	$1 \times 10^4$
堵头材料密度 $\rho_2$ /kg·m <sup>-3</sup>	正态分布	7 850	392.5
部分直管外径 $D_1$ /m	正态分布	0.025 4	$1.27 \times 10^{-3}$
部分直管壁厚 $t_1$ /m	正态分布	$7.012 \times 10^{-4}$	$3.506 \times 10^{-5}$
堵头外径 $D_2$ /m	正态分布	0.033	$1.65 \times 10^{-3}$
三通外径 $D_3$ /m	正态分布	0.033	$1.65 \times 10^{-3}$
三通壁厚 $t_2$ /m	正态分布	$3.6 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$
弹簧线刚度 $k$ /N·m <sup>-1</sup>	正态分布	$1.72 \times 10^6$	$8.6 \times 10^4$

管路系统的可靠性分析属于小失效概率问题, 分别采用 ALK-EMO-IS 方法和 AL-RBF-IS 方法计算 10 次, 取平均值, 结果见表 7。ALK-EMO-IS 方法平均调用了 192.2 次真实功能函数, 求解出失效概率  $P_f = 1.6735 \times 10^{-5}$ , 变异系数  $CoV = 2.41\%$ 。

表 7 管路系统计算结果

方法	失效概率 $P_f$	功能函数调用次数 $N_{calls}$	变异系数 $CoV/\%$
ALK-EMO-IS	$1.67 \times 10^{-5}$	192.2	2.41
AL-RBF-IS	$1.64 \times 10^{-5}$	63.1	3.43

AL-RBF-IS 方法平均仅调用了 63.1 次真实功能函数, 初始样本点为 20 个, 之后在学习过程中添加了 43.1 个新的样本点。求解出失效概率  $P_f = 1.6353 \times 10^{-5}$ , 变异系数为  $CoV = 3.43\%$ 。从结果可以看出本文方法计算的失效概率精度较好, 同时调用的功能函数次数很少, 说明此方法能够较好地解决工程可靠性分析问题。如图 12 所示, 给出了 AL-RBF-IS 方法与 ALK-EMO-IS 方法在一次主动学习过程中的对比结果。可以看出即使面对复杂的工程问题, AL-RBF-IS 在不断加点学习的过程中, 其误差逐渐达到收敛准则的要求, 估计失效概率也逐渐逼近参考值, 与 ALK-EMO-IS 方法相比, 本文方法在达到相同精度时所需的迭代次数更少, 表现出更高的学习效率。

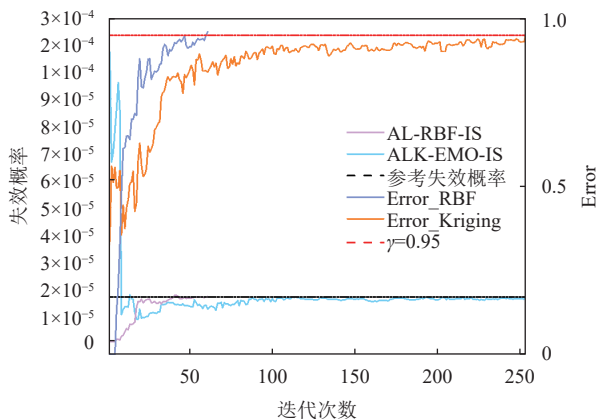


图 12 估计失效概率和估计误差的演变

## 4 结束语

为了解决可靠性分析中的小失效概率问题, 本文提出了一种结合径向基函数 (RBF) 和基于多模态优化的重要抽样的结构可靠性分析方法。该方法采用 RBF 模型建立基于 DoE 的真实功能函数的元模型, 得到代理 LSS, 然后利用 EMO-MMO 方法获得代理 LSS 上的 MPP, 根据每个 MPP 的权重建

立 iPDF。最后根据收敛准则不断添加新的训练点让 RBF 模型足够精确, 利用最后一次训练的 RBF 模型, 求解得出结构失效概率。通过算例测试得到以下结论。

1) 通过交叉验证方法得到 RBF 模型预测均值和标准差, 结合 EMO-MMO 方法使 AL-RBF-IS 方法的效率得到了很大的提高。

2) 与已有的 ALK-EMO-IS 方法相比, 本文所提的 AL-RBF-IS 方法保证了失效概率的计算精度, 同时效率有较好的提升。

3) AL-RBF-IS 方法在面对极小失效概率问题时也能得到准确的结果, 另外, 在解决实际工程中的隐式问题时, AL-RBF-IS 方法也有出色的表现。

## 参考文献

- [1] YANG X F, CHENG X. Active learning method combining Kriging model and multimodal-optimization-based importance sampling for the estimation of small failure probability[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121(21): 4843-4864.
- [2] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33: 145-154.
- [3] YANG X F, LIU Y S, GAO Y, et al. An active learning Kriging model for hybrid reliability analysis with both random and interval variables[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(5): 1003-1016.
- [4] SUN Z L, WANG J, LI R, et al. LIF: A new Kriging based learning function and its application to structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 157: 152-165.
- [5] WANG Z Y, SHAFIEEZADEH A. On confidence intervals for failure probability estimates in Kriging-based reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 196: 106758.
- [6] HU Z, MAHADEVAN S. Global sensitivity analysis-enhanced surrogate (GSAS) modeling for reliability analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(3): 501-521.
- [7] RAZAALY N, CONGEDO P M. Extension of AK-MCS for the efficient computation of very small failure probabilities[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 203: 107084.
- [8] YANG X F, LIU Y S, MI C Y, et al. Active learning Kriging model combining with kernel-density-estimation-based importance sampling method for the estimation of low failure probability[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2018, 140(5): 051402.
- [9] FAURIAT W, GAYTON N. AK-SYS: An adaptation of the AK-MCS method for system reliability[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 123: 137-144.

- [10] YANG X F, LIU Y S, MI C Y, et al. System reliability analysis through active learning Kriging model with truncated candidate region[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, 169: 235-241.
- [11] YANG X F, WANG T, LI J C, et al. Bounds approximation of limit-state surface based on active learning Kriging model with truncated candidate region for random-interval hybrid reliability analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121(7): 1345-1366.
- [12] HONG L X, LI H C, PENG K. A combined radial basis function and adaptive sequential sampling method for structural reliability analysis[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 90: 375-393.
- [13] LI X, GONG C L, GU L X, et al. A sequential surrogate method for reliability analysis based on radial basis function[J]. *Structural Safety*, 2018, 73: 42-53.
- [14] JING Z, CHEN J Q, LI X. RBF-GA: An adaptive radial basis function metamodeling with genetic algorithm for structural reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 189: 42-57.
- [15] LI G S, MA S C, ZHANG D Q, et al. An efficient sequential anisotropic RBF reliability analysis method with fast cross-validation and parallelizability[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, 241: 109600.
- [16] CHENG R, LI M Q, LI K, et al. Evolutionary multiobjective optimization-based multimodal optimization: Fitness landscape approximation and peak detection[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5): 692-706.
- [17] KLEIJNEN J P C, VAN BEERS W C M. Application-driven sequential designs for simulation experiments: Kriging metamodeling[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2004, 55(8): 876-883.
- [18] ZHOU T, PENG Y B. An active-learning reliability method based on support vector regression and cross validation[J]. *Computers & Structures*, 2023, 276: 106943.
- [19] BEN SALEM M, ROUSTANT O, GAMBOA F, et al. Universal prediction distribution for surrogate models[J]. *ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2017, 5(1): 1086-1109.
- [20] YANG X F, CHENG X, WANG T, et al. System reliability analysis with small failure probability based on active learning Kriging model and multimodal adaptive importance sampling[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(2): 581-596.
- [21] CADINI F, SANTOS F, ZIO E. An improved adaptive Kriging-based importance technique for sampling multiple failure regions of low probability[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 131: 109-117.
- [22] YANG X F, ZHANG Y, WANG T, et al. An active learning reliability method combining population Monte Carlo and Kriging model for small failure probability[J]. *Structures*, 2024, 70: 107621.

编辑 叶芳