

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.05.002

环域上平均曲率方程径向解的存在性

张露¹, 任苏灵²

(1.青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁 810007)
(2.兰州财经大学统计学院, 甘肃 兰州 730070)

[摘要] 本文借助于上下解方法研究环域上带 Neumann 边界的平均曲率方程

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v(x)}{\sqrt{1-|\nabla v(x)|^2}}\right)=f\left(|x|, v, \frac{dv}{dr}\right), & x \in D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}=0 & x \in \partial D \end{cases}$$

径向解的存在性, 其中 $A, B \in \mathbb{R}, 0 < A < B, D = \{x \in \mathbb{R}^N : A \leq |x| \leq B\}$. $f: [A, B] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, $\frac{dv}{dr}$ 表示径向导数, $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ 为外法向导数. 文章通过构造方程的上下解来保证上述方程解的存在性.

[关键词] Neumann 边值问题, 上下解, 径向解

[中图分类号] O175.8 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2025)05-0007-09

Radial Solutions of the Mean Curvature Equation in Annular

Zhang Lu¹, Ren Suling²

(1.School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining 810007, China)
(2.School of Statistics, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we obtain existence of radial solutions of the mean curvature equation with Neumann boundary condition in annular by constructing the upper and lower solutions,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v(x)}{\sqrt{1-|\nabla v(x)|^2}}\right)=f\left(|x|, v, \frac{dv}{dr}\right), & \text{in } D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}=0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

where $A, B \in \mathbb{R}, 0 < A < B, D = \{x \in \mathbb{R}^N : A \leq |x| \leq B\}$. $f: [A, B] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous function, $\frac{dv}{dr}$ represent the radial derivative and $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ is out ward normal derivative.

Key words: method of upper and lower solutions, Neumann boundary value problem, radial solutions

上下解方法作为研究非线性微分方程的一类重要方法获得了众多学者的关注, 取得了非常丰富的结论^[1-10]. 值得注意的是, 借助于上下解方法获得解的存在性的普遍条件是上下解存在, 但是对于大多数的方程是无法直接判断其是否存在上下解的, 本文尝试对环域上带 Neumann 边界的平均曲率方程构造出上下解, 从而得到解的存在性.

平均曲率方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right)=f\left(|x|, v, \frac{dv}{dr}\right), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

收稿日期: 2024-02-05.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(12101279)、甘肃省自然科学基金资助项目(21JR11RA133).

通讯作者: 张露, 博士, 讲师, 研究方向: 随机分析及其应用. E-mail: zhl992934235@163.com

式中 $\Omega \subset R^N$, 是一类有意义的拟线性微分方程, 它产生于 Lorentz-Minkowski 空间中超曲面的研究, 方程 (1) 主要是在研究超曲面时在该空间定义 $\sum_{j=1}^N (dx_j)^2 - (dt)^2$ 作为度量时得到的. 这类问题, 受到众多学者的关注和研究^[1, 11-20].

2007 年, 文[14]借助于上下解方法讨论了问题(1)的一维形式, 即一维 φ -Laplacian 问题

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = f(t, u, u'), & t \in [0, T] \\ u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T) \end{cases} \quad (2)$$

解的存在性, 其中 $\varphi: (-a, a) \rightarrow R (0 < a < \infty)$ 为单调递增的同胚映射且 $\varphi(0) = 0$. 他们获得了如下结果

定理 A 若问题(2)存在下解 α 和上解 β , 使得对任意的 $t \in [0, T], \alpha(t) \leq \beta(t)$, 则问题(2)存在解 u , 满足

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

进一步, 若 α 与 β 为严格上解和下解, 则上述关系中的严格不等号成立, 且有

$$d_{LS}[I-M, \Omega_{\alpha, \beta}, 0] = -1,$$

式中, M 表示问题(2)的不动点算子, $\Omega_{\alpha, \beta} = \{u \in C^1[0, T] : \alpha < u < \beta, \forall t \in [0, T], \|u'\|_{\infty} < a, u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T)\}$. $d_{LS}[I-M, \Omega_{\alpha, \beta}, 0]$ 表示算子 $I-M$ 在 $\Omega_{\alpha, \beta}$ 上关于 0 的 Leray-Schauder 度.

2013 年, 文[1]对奇异周期边值问题

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = g(t, u) + e(t), & t \in [0, T] \\ u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T) \end{cases}$$

构造了上下解, 其中 g, e 均为连续函数, g 在 $u=0$ 处允许有奇异性.

对于 Neumann 边界下高维平均曲率方程(1)的研究, 2010 年, 文献[11]将问题(1)转化为

$$\begin{cases} \left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}} \right)' = r^{N-1} f(r, u, u'), & r \in [A, B] \\ u'(A) = 0 = u'(B) \end{cases} \quad (3)$$

在非线性项满足一定的单调性条件时研究了上下解的存在性, 并借助于上下解方法获得了解的存在性.

自然地, 当非线性项不具有单调性时应该如何获得解的存在性是值得思考的问题. 为此, 本文将讨论环域上带 Neumann 边界的平均曲率方程

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}} \right) = f(|x|, v, \frac{dv}{dr}), & x \in D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial D \end{cases} \quad (4)$$

径向解的存在性, 其中 $f: [A, B] \times R^2 \rightarrow R$ 为连续函数, $\frac{dv}{dr}$ 表示径向导数, $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ 为外法向导数.

令 $r = |x|, v(x) = u(r)$, 可将问题(4)化为

$$\begin{cases} \left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}} \right)' = r^{N-1} f(r, u, u'), & r \in [A, B] \\ u'(A) = 0 = u'(B) \end{cases} \quad (5)$$

则要获得问题(4)的径向解存在性只需要研究问题(5)解的存在性.

1 预备知识

考虑 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} (r^{N-1} \varphi(u'))' = r^{N-1} f(r, u, u'), & r \in [A, B] \\ u'(A) = 0 = u'(B) \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\varphi: (-a, a) \rightarrow R$ 为单调递增的同胚映射且满足 $\varphi(0) = 0 (0 < a < \infty)$, $f: [A, B] \times R^2 \rightarrow R$ 连续.

问题(6)的解 u 是指满足 $\|u'\|_{\infty} < a, \varphi(u')$ 连续可微且使得(6)成立的连续可微函数.

为了方便, 下面给出一些定义及记号.

记 $C := C[A, B]$, $C^1 := C^1[A, B]$ 其范数分别为

$$\|u\|_{\infty} = \max_{r \in [A, B]} u(r), \quad \|u\| = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty}.$$

给定

$$C_{\dot{\gamma}}^1 = \{u \in C^1 : u'(A) = 0 = u'(B)\}$$

显然 $C_{\dot{\gamma}}^1$ 为 C^1 的闭子空间.

定义

$$\begin{aligned} Q: C &\rightarrow C, & Qu &= \frac{N}{B^N - A^N} \int_A^B r^{N-1} u(r) dr, \\ P: C &\rightarrow C, & Pu &= u(A), \\ \gamma(r) &= \frac{1}{r^{N-1}}, & r &\in (0, \infty), \end{aligned}$$

显然 $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续.

定义线性算子

$$\begin{aligned} L: C &\rightarrow C, & Lu(r) &= \gamma(r) \int_A^r t^{N-1} u(t) dt \quad (r \in (A, B]), \\ H: C &\rightarrow C^1, & Hu(r) &= \int_A^r u(t) dt \quad (r \in [A, B]). \end{aligned}$$

由文献[11]可知, L 为紧算子, H 为有界算子.

显然 f 的 Nemytskii 算子

$$N_f: C^1 \rightarrow C, \quad N_f(u) = f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)),$$

连续且将有界集映为有界集.

下面我们定义非线性算子 \mathcal{M}_f , 这个算子将在解的存在性研究中起至关重要的作用, 事实上, 借助于文献[11]的结论可知, 算子

$$\mathcal{M}_f: C_{\dot{\gamma}}^1 \rightarrow C_{\dot{\gamma}}^1, \quad \mathcal{M}_f = P + QN_f + H \circ \varphi^{-1} \circ L \circ (I - Q) \circ N_f.$$

为良定的紧算子.

有了这样一个算子, 问题(6)解的存在性问题将会转化为算子的不动点问题. 即对任意的 $u \in C_{\dot{\gamma}}^1$, 若 u 为问题(6)的解, 当且仅当 u 为算子 \mathcal{M}_f 的不动点.

下面我们先考虑一个简单问题

$$\begin{cases} (r^{N-1} \varphi(u'))' = r^{N-1} \eta(r), & r \in [A, B] \\ u'(A) = 0 = u'(B) \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\eta \in C$. 可以获得如下结论:

引理 1.1 若 $\eta \in C$ 满足

$$Q\eta = \frac{N}{B^N - A^N} \int_A^B r^{N-1} \eta(r) dr = 0, \quad (8)$$

则问题(7)存在解 u 且

$$u = Pu + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta). \quad (9)$$

证明 若(8)成立, 则问题(7)等价于

$$r^{N-1} \varphi(u'(r)) - A^{N-1} \varphi(u'(A)) = \int_A^r s^{N-1} \eta(s) ds.$$

由 $u'(A) = 0$ 得

$$u'(r) = \varphi^{-1}(L\eta(r)).$$

故有

$$u(r) = u(A) + \int_A^r \varphi^{-1}(L\eta(s)) ds = Pu + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta).$$

我们回顾上下解的定义.

定义 1.1^[11] 称 α 为问题(6)的下解是指, $\alpha \in C^1$ 满足 $\|\alpha'\|_\infty < a, r^{N-1}\varphi(\alpha') \in C^1, \alpha'(A) \geq 0 \geq \alpha'(B)$ 且 $\forall r \in [A, B]$

$$(r^{N-1}\varphi(\alpha'(r)))' \geq r^{N-1}f(r, \alpha(r), \alpha'(r)) \tag{10}$$

成立. 当(10)中取严格不等号时, 称 α 为问题(6)的严格下解.

称 β 为问题(6)的下解是指, $\beta \in C^1$ 满足 $\|\beta'\|_\infty < a, r^{N-1}\varphi(\beta') \in C^1, \beta'(A) \leq 0 \leq \beta'(B)$ 且 $\forall r \in [A, B]$

$$(r^{N-1}\varphi(\beta'(r)))' \leq r^{N-1}f(r, \beta(r), \beta'(r)) \tag{11}$$

成立. 称 β 为问题(6)的严格上解是指, (11)中取严格不等号.

本文总假设:

(H) $A > 0$ 且 $\varphi: (-a, a) \rightarrow R$ 为单调递增的同胚映射, 满足 $\varphi(0) = 0$, 其中 $0 < a < \infty$.

引理 1.2^[11] 若(H)成立, 且问题(6)存在下解 α 和上解 β , 使得 $\forall r \in [A, B]$ 有 $\alpha(r) \leq \beta(r)$, 则问题(6)存在解 u , 满足

$$\alpha(r) \leq u(r) \leq \beta(r), \quad \forall r \in [A, B].$$

进一步, 若 α, β 为严格下解和严格上解, 则有

$$\alpha(r) < u(r) < \beta(r), \quad \forall r \in [A, B],$$

且

$$d_{IS}[I - \mathcal{M}_f, \Omega_{\alpha, \beta}, 0] = -1,$$

式中,

$$\Omega_{\alpha, \beta} = \{u \in C^1; \alpha(r) < u(r) < \beta(r), \quad \forall r \in [A, B], \quad \|u'\|_\infty < a\}.$$

引理 1.3^[11] 若(H)成立且问题(6)存在下解 α 和上解 β , 则问题(6)至少存在一个解.

下面给出一个记号, $\forall e \in C$, 记 $e^+ = \max\{e, 0\}$, $e^- = \max\{-e, 0\}$,

$$E = Qe = \frac{N}{B^N - A^N} \int_A^B r^{N-1} e(r) dr,$$

$$E_\pm = Qe^\pm = \frac{N}{B^N - A^N} \int_A^B r^{N-1} e^\pm(r) dr.$$

显然, $E = E_+ - E_-$.

2 主要结果及证明

下面借助于上下解方法讨论问题(6)解的存在性, 从而获得(4)的解的存在性结论.

为此我们先对问题(6)构造上下解, 并估计它的界.

命题 2.1 若存在常数 x_1 及 $e \in C$ 满足

$$f(r, x, y) \leq e(r), \quad \forall (r, x, y) \in [A, B] \times [x_1, x_1 + a(B-A)] \times [-a, a]. \tag{12}$$

如果

$$E = Qe \leq 0, \tag{13}$$

则问题(6)存在下解 α , 且

$$x_1 \leq \alpha \leq x_1 + a(B-A). \tag{14}$$

特别地, 当(12)式中严格不等号成立时, α 为严格下解.

证明 下面分两种情况证明.

情形 1 若 $E_+ = 0$, 则由(13)可知 $e \leq 0$. 此时, 取 $\alpha \equiv x_1$, 有

$$(r^{N-1}\varphi(\alpha'(r)))' = 0 \geq r^{N-1}e(r) \geq r^{N-1}f(r, \alpha(r), \alpha'(r)).$$

显然, $\alpha \equiv x_1$ 为问题(6)的下解.

情形 2 若 $E_+ > 0$, 由于

$$\frac{N}{B^N - A^N} \int_A^B r^{N-1} [e^+(r)E_- - e^-(r)E_+] dr = 0.$$

令 $\eta(r) = \frac{1}{E_+} [e^+(r)E_- - e^-(r)E_+]$. 根据引理 1.1, 问题

$$\begin{cases} (r^{N-1}\varphi(\xi'))' = r^{N-1}\eta(r), & r \in [A, B], \\ \xi'(A) = 0 = \xi'(B) \end{cases}$$

存在解 ξ 满足 $\xi = P\xi + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta)$. 令

$$\alpha = x_1 + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta) - \min_{[A, B]} (H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta)).$$

显然

$$\alpha' = \varphi^{-1} \circ L(\eta) = \xi',$$

所以有 $\alpha'(A) = \alpha'(B) = 0$. 由条件(H)可知, $\|\alpha'\|_{\infty} < a$.

由连续性可知, 存在 $r_1, r_2 \in [A, B]$, 使得 $\alpha(r_1) = \alpha_L, \alpha(r_2) = \alpha_M$. 则有

$$\max_{[A, B]} \alpha - \min_{[A, B]} \alpha = \int_{r_1}^{r_2} \alpha'(s) ds \leq \int_A^B |\alpha'(s)| ds \leq a(B-A),$$

因此(14)式成立.

由条件(13)有 $E_+ \leq E_-$, 则

$$(r^{N-1}\varphi(\alpha'(r)))' = r^{N-1}\eta(r) = r^{N-1} \frac{1}{E_+} [e^+(r)E_- - e^-(r)E_+] \geq r^{N-1}e(r) \geq r^{N-1}f(r, \alpha, \alpha').$$

因此, α 为问题(6)的下解. 进一步, 对(12)式中取严格不等号的情形, 可以类似地证明.

注 2.1 若 $e \equiv 0$, 只需 $f(r, x_1, 0) \leq 0$, 就可以保证问题(6)存在下解 $\alpha \equiv x_1$.

类似地, 可以获得上解存在性结果.

命题 2.2 若存在常数 x_2 及 $d \in C$ 满足

$$f(r, x, y) \geq d(r), \quad \forall (r, x, y) \in [A, B] \times [x_2, x_2 + a(B-A)] \times [-a, a]. \quad (15)$$

如果

$$D = Qd \geq 0, \quad (16)$$

则问题(6)存在上解 β , 且

$$x_2 \leq \beta \leq x_2 + a(B-A). \quad (17)$$

特别地, 当(15)式中严格不等号成立时, β 为严格上解.

证明 证明方法与命题 2.1 类似. 这里只简单说明.

情形 1 若 $D_- = 0$ 时, 取 $\beta \equiv x_2$ 即可.

情形 2 若 $D_- > 0$ 时, 选取 $\eta(r) = \frac{1}{D_-} [d^+(r)D_- - d^-(r)D_+]$. 此时, 令

$$\beta = x_2 + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta) - \min_{[A, B]} (H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta)).$$

可以得到, β 为问题(6)的上解.

注 2.2 若 $d \equiv 0$, 只需 $f(r, x_2, 0) \geq 0$, 就可以保证问题(6)存在下解 $\beta \equiv x_2$.

综上可以得到问题(6)解的存在性结论.

定理 2.1 若存在常数 x_i 及 $c_i \in C$ 满足

$$(-1)^{(i+1)}f(r, x, y) \leq (-1)^{(i+1)}c_i(r), \quad \forall (r, x, y) \in [A, B] \times [x_i, x_i + a(B-A)] \times [-a, a] \quad (18)$$

且

$$(-1)^{(i+1)}Qc_i \leq 0, \quad (19)$$

对 $i=1, 2$ 成立. 则问题(6)至少存在一个解. 进一步, 若

$$x_1 + a(B-A) \leq x_2, \quad (20)$$

则问题(6)的解 u 满足

$$x_1 \leq u \leq x_2 + a(B-A). \quad (21)$$

证明 借助于命题 2.1 及命题 2.2, 由条件(18), (19)可以证明问题(6)存在下解 α 和上解 β , 分别满足(14), (17). 由引理 1.3 知, 问题(6)至少存在一个解.

进一步, 根据条件(20)得

$$\alpha(r) \leq u(r) \leq \beta(r), \quad \forall r \in [A, B].$$

由引理 1.2 可知, 问题(6)存在解 u , 满足(21).

例 2.1 取 $A=1, B=2$, 考虑问题

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right)=\arctan v-\frac{\pi}{4}, & x \in D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}=0 & x \in \partial D \end{cases} \quad (22)$$

径向解的存在性.

令 $r=|x|, v(x)=u(r)$, 则有

$$\begin{cases} \left(r^{N-1}\frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}}\right)'=r^{N-1}\left(\arctan u-\frac{\pi}{4}\right), & r \in [1, 2] \\ u'(1)=0=u'(2) \end{cases} \quad (23)$$

取 $x_1=-1$, 则 $x_1+a(B-A)=-1+a=0$, 取 $c_1(r)=-\frac{\pi}{4}$, 显然

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan u - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4} = c_1(r) \quad \forall u \in [-1, 0], r \in [1, 2]$$

且

$$Qc_1 < 0.$$

取 $x_2=2$, 则 $x_2+a(B-A)=2+a=3$, 令 $c_2(r)=0.4r-0.5$, 计算可得

$$c_2(r) \leq 0.3 < \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \leq \arctan u - \frac{\pi}{4} \leq \arctan 3 - \frac{\pi}{4}, \quad \forall u \in [2, 3], r \in [1, 2]$$

且

$$Qc_2 = \frac{N}{2^N-1} \int_1^2 r^{N-1}(0.4r-0.5) dr \geq 0.$$

所以条件(18)-(20)成立, 根据定理 2.1 可知, 问题(22)存在解 u , 且

$$-1 \leq \alpha \leq u \leq \beta \leq 3.$$

结合注 2.1, 注 2.2 以及上述定理我们不加证明的给出如下结论.

推论 2.1 若(H)成立. 如果存在常数 x_1, x_2 满足

$$f(r, x_2, 0)f(r, x_1, 0) \leq 0,$$

则问题(6)至少存在一个解. 进一步, 若 $x_1 < x_2$ 且

$$f(r, x_1, 0) \leq 0, \quad f(r, x_2, 0) \geq 0,$$

则问题(6)的解 u , 满足

$$x_1 \leq u(r) \leq x_2, \quad \forall r \in [A, B].$$

此时, $\alpha \equiv x_1, \beta \equiv x_2$ 分别为问题(6)的下解和上解.

注 2.3 对于问题(23), 由推论 2.1 可以直接得到常数上下解, 即 $\alpha \equiv 0, \beta \equiv 2$. 显然大多数问题不能够直接获得上下解. 文献[11]给出了如下结论

定理 B 若(H)成立, $f: [A, B] \times R \rightarrow R$ 连续且 $f(r, \cdot)$ 为非减或非增函数, 则问题

$$\begin{cases} (r^{N-1}\varphi(u'))'=r^{N-1}f(r, u), & r \in [A, B] \\ u'(A)=0=u'(B) \end{cases} \quad (24)$$

有解的充要条件是存在常数 $c \in R$, 使得

$$\int_A^B r^{N-1}f(r, c) dr = 0.$$

可以看出在非线性项 $f(r, \cdot)$ 单调时, 定理 B 能够获得上下解. 而本文并不要求非线性项单调, 我们举例说明.

例 2.2 取 $A=1, B=2$, 考虑问题

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right) = -v^6 + 0.38|x| - 0.4, & x \in D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial D \end{cases} \quad (25)$$

径向解的存在性.

令 $r = |x|, v(x) = u(r)$, 则有

$$\begin{cases} \left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}}\right)' = r^{N-1}(-u^6 + 0.38r - 0.4), & r \in [1, 2] \\ u'(1) = 0 = u'(2) \end{cases} \quad (26)$$

容易看出, 问题(26)不存在平凡的上解, 而且非线性项不是单调的. 下面我们借助命题 2.2 对上述问题构造上解.

取 $x_2 = -\frac{1}{2}$, 则 $x_2 + a(B-A) = -\frac{1}{2} + a = \frac{1}{2}$, 取 $c_2(r) = 0.4r - 0.5$, 显然

$$-u^6 + 0.38r - 0.4 > 0.4r - 0.5, \quad \forall u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], r \in [1, 2]$$

且

$$Qc_2 = \frac{N}{2^N - 1} \int_1^2 r^{N-1} (0.4r - 0.5) dr \geq 0.$$

则根据命题 2.1, 问题(26)存在上解 β , 满足 $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. 容易验证

$$\beta = x_2 + H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta) - \min_{[A, B]} (H \circ \varphi^{-1} \circ L(\eta))$$

为问题(26)的上解. 其中

$$\eta(r) = \frac{(2^N - 1)(N+1)}{0.1N - 0.5 \times 1.25^N + 0.5} \begin{cases} (0.5 - 0.4r) \frac{2^N(0.3N - 0.5) + 0.5 \times 1.25^N}{(2^N - 1)(N+1)}, & 1 \leq r < \frac{5}{4}, \\ (0.4r - 0.5) \frac{0.1N - 0.5 \times 1.25^N + 0.5}{(2^N - 1)(N+1)}, & \frac{5}{4} \leq r \leq 2. \end{cases}$$

显然, $\alpha = -1$ 为问题(26)的下解. 故问题(25)存在解 u , 满足

$$-1 = \alpha \leq u \leq \beta \leq \frac{1}{2}.$$

下面我们考虑非线性项满足一定增长条件时方程

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v(x)}{\sqrt{1-|\nabla v(x)|^2}}\right) + \psi(|x|)v(x) = f(|x|, v), & x \in D \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial D \end{cases} \quad (27)$$

径向解的存在性, 其中 $\psi \in C$.

定理 2.2 若 (H) 成立, $\Psi = Q\psi > 0$, 且

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(r, x)}{x} > \Psi \geq \psi_L > \limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(r, x)}{x}, \quad \forall r \in [A, B], \quad (28)$$

则问题(27)至少存在一个非平凡解, 其中 $\psi_L = \min_{[A, B]} \psi(r)$.

证明 只需讨论

$$\begin{cases} \left(r^{N-1} \frac{u'}{\sqrt{1-|u'|^2}}\right)' + r^{N-1} \psi(r)u(r) = r^{N-1} f(r, u), & r \in [A, B] \\ u'(A) = 0 = u'(B) \end{cases} \quad (29)$$

解的存在性.

因为 $\psi_L > \limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(r,x)}{x}$, 故而对充分小的 $\xi \in R$, 可得

$$f(r, \xi) \leq \psi(r)\xi, \quad \forall r \in [A, B].$$

取 $\alpha = \xi$, 可知 α 为问题(29)的下解.

另外, 由(28)可知, 存在 $\varepsilon > 0, x_2 > \max\left\{\frac{(B-A)\Psi_+}{\varepsilon}, \alpha\right\}$, 使得

$$f(r, x) \geq (\Psi + \varepsilon)x, \quad \forall r \in [A, B], x \geq x_2. \tag{30}$$

取

$$d(r) = -\psi x_2 - (B-A)\psi^+ + \min_{[x_2, x_2+B-A]} f(r, x), \quad \forall r \in [A, B].$$

容易看出, $\forall x \in [x_2, x_2+B-A]$

$$-\psi x = \psi^- x - \psi^+ x \geq \psi^- x_2 - \psi^+ [x_2+B-A].$$

故

$$f(r, x) - \psi(r)x \geq d(r), \quad \forall r \in [A, B].$$

由(30)及 x_2 , 可得

$$D = Qd = \min_{[x_2, x_2+B-A]} f(r, x) - x_2 \Psi - (B-A)\Psi_+ \geq (\Psi + \varepsilon)x_2 - x_2 \Psi - (B-A)\Psi_+ \geq 0.$$

由命题 2.2, 问题(29)存在下解 β , 且 $x_2 \leq \beta \leq x_2+B-A$. 又 $\alpha \leq \beta$, 故问题(29)至少存在一个解 u 使得 $\alpha \leq u \leq \beta$, 即问题(27)至少存在一个非平凡的径向解.

推论 2.2 若 $H = Qh > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(r, x)}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(r, x)}{x} = 0, \quad \forall r \in [A, B].$$

则问题(27)至少存在一个非平凡解.

[参考文献]

[1] BEREANU C, GHEORGHE D, ZAMORA M. Periodic solutions for singular perturbations of the singular φ -Laplacian operator [J]. Communications in contemporary mathematics, 2013, 15: 1-22.

[2] RACHŮNKOVÁ I, TVRDÝ M. Construction of lower and upper functions and their application to regular and singular periodic boundary value problems [J]. Nonlinear analysis, 2001, 47(7): 3937-3948.

[3] RACHŮNKOVÁ I, TVRDÝ M. Method of lower and upper functions and the existence of solutions to singular periodic problems for nonlinear differential equations of order two [J]. Miskolc mathematical notes, 2000, 61(2): 135-143.

[4] RACHŮNKOVÁ I. Upper and lower solutions and multiplicity results [J]. Journal of mathematics analysis and applications, 2000, 246(2): 446-464.

[5] RACHŮNKOVÁ I. Upper and lower solutions and topological degree [J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1999, 234(2): 311-327.

[6] BONHEURE D, COSTER C D. Forced singular oscillators and the method of lower and upper solutions [J]. Topological methods in nonlinear analysis, 2003, 22(2): 297-317. DOI: 10.12775/TMNA.2003.041.

[7] CABADA A. An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions [J]. Boundary value problems, 2011(1): 1-18. DOI: 10.1155/2011/893753.

[8] LIU X P. The method of lower and upper solutions for mixed fractional four-point boundary value problem with [formula omitted]-Laplacian operator [J]. Applied mathematics letters, 2017, 65: 56-62. DOI: 10.1016/j.aml.2016.10.001.

[9] LIN L, LIU X, FANG H. Method of upper and lower solutions for fractional differential equations [J]. Electronic journal of differential equations, 2012(100): 596-602. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.05.016.

[10] MA R, ZHANG L. Construction of lower and upper solutions for first-order periodic problem [J]. Boundary value problems, 2015: 1-15.

[11] BEREANU C, JEBELEAN P, MAWHIN J. Radial solutions for Neumann problems involving mean curvature operators in Euclidean and Minkowski spaces [J]. Mathematische nachrichten, 2010, 283(3): 379-391.

- [12] TREIBERGS A. Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space[J]. *Inventiones mathematicae*, 1982, 66(1) : 39–56.
- [13] BEREANU C, MAWHIN J. Boundary-value problems with non-subjective φ -Laplacian and one-side bounded nonlinearity[J]. *Advanced differential equation*, 2006, 11(1) : 35–60.
- [14] BEREANU C, MAWHIN J. Existence and multiplicity result for some nonlinear problems with singular φ -Laplacian[J]. *Journal of differential equations*, 2007, 243(2) : 536–557.
- [15] LUO H, DAI G W. Global structure of a nodal solutions set of mean curvature equation in static spacetime[J]. *Acta mathematica scientia (series B)*, 2022, 42(5) : 2078–2086.
- [16] DAI G W. Bifurcation and nonnegative solutions for problems with mean curvature operator on general domain[J]. *Indiana university mathematics journal*, 2018, 67(6) : 2103–2121.
- [17] MA R, HE Z. Positive radial solutions for Dirichlet problem of quasilinear differential system with mean curvature operator in Minkowski space[J]. *Journal of fixed point theory and applications*, 2021, 23(1) : 1–13.
- [18] LU Y, LI Z, CHEN T. Multiplicity of Solutions for non-homogeneous dirichlet problem with one-dimension Minkowski-Curvature operator[J]. *Qualitative theory of dynamical systems*, 2022, 21(4) : 1–19.
- [19] CAO X, DAI G W. Global structure of positive solutions for problem with mean curvature operator on an annular domain[J]. *Rocky mountain journal of mathematics*, 2018, 48(6) : 1799–1814.
- [20] DAI G W, ROMERO A. Global bifurcation of solutions of the mean curvature spacelike equation in certain Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetimes[J]. *Journal of differential equations*, 2018, 265(6) : 2402–2434.

[责任编辑:陆炳新]