doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.06.001

# 黎曼流形间的两类广义调和映照的 Liouville 定理

曹祥志

(南京晓庄学院信息工程和人工智能学院,江苏 南京 211171)

[**摘要**]　在本文中,我们主要利用守恒定律推导广义映射的单调性公式,包括从度量测度空间出发的带有 $m$ 形式和位势函数的 φ-F-调和映照耦合 φ-F-交响映射. 我们用关于度量测度空间的 Ricci 曲率上界和截面曲率上界的条件得到了 φ-F-V-调和映照的 Liouville 定理.

[**关键词**]　Liouville 定理,φ-F-交响映照,带有 $m$ 形式和位势函数的 φ-F-调和映照

[**中图分类号**]O186.1　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2025)06-0001-10

# Liouville Type Theorem for Two Kinds of Generalized Harmonic Maps Between Riemannian Manifold

Cao Xiangzhi

(Information and Engineering College of Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China)

**Abstract**: In this paper, we mainly derive monotonicity formula of generalized map from metric measure space via conservation law, including φ-F-harmonic map coupled with φ-F-symphonic map with $m$-form and potential. We also get Liouville theorem for φ-F-V-harmonic maps from metric measure space in terms of the upper bound of Ricci curvature and the bound about sectional curvature.

**Key words**: Liouville theorem, φ-F-V-symphonic map, φ-F-symphonic map with $m$-form and potential

## 1　前言

调和映照有很多推广,例如 F-调和映照. Ara 等[1-3]引入 F-调和映照且研究了 F-调和调照的稳定性和不稳定性.关于用守恒律的方法得到 F-调和映照的 Liouville 定理,参考这些工作[4-7]. 用守恒律也可以研究微分形式的 Liouville 定理,比如文献[8-9].

设 $u:(M,g)\rightarrow(N,h)$ 为黎曼流形之间的光滑映照. Nakauchi[10-12]研究了交响映照,它是泛函 $\int_M \frac{\| u^* h \|^2}{4} \mathrm{d}v$ 的临界点. 受到 Nakauchi 这些工作的启发,Han 等[13]研究了如下泛函 $\int_M F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)\mathrm{d}v$ 的单调性公式. 该泛函的临界点被称为 F 交响映照.特别地,当 $F(x)=x$,它被叫做交响映照. Han 等[14]和 Feng 等[15]研究了带有位势函数的 F-稳态映照的单调性和稳定性.

Feng 等[15]引入 $\varphi_{S,F}$-调和映照,它是泛函 $\int_M F\left(\frac{\| S_u \|^2}{4}\right)\mathrm{d}v_g$ 的临界点,其中 $S_u=\frac{1}{2}\| du \|^2 g-u^* h$. 他们也研究了这类映照的单调性和稳定性. 这类映照的压力能量张量为

$$T(\cdot,\cdot)=F\left(\frac{\| S_u \|^2}{4}\right)g(\cdot,\cdot)-F'\left(\frac{\| S_u \|^2}{4}\right)h(\sigma_u(\cdot),du(\cdot)),$$

其中 $\sigma_u=h(du(\cdot),du(e_i))du(e_i)$. 直接计算它的散度(参考[15]),得到 $\operatorname{div}(T)(X)=h(\tau_F,du(X))$,

其中 $\tau_F(u)=\operatorname{div}(\sigma_{F,u})$, $\sigma_{F,u}(\cdot)=F'\left(\frac{\| S_u \|^2}{4}\right)\sigma_u(\cdot)$, $X$ 是 $M$ 上的向量场.

**收稿日期**:2024-12-29.
**基金项目**:江苏省高等学校自然科学研究(基础科学)面上资助项目(22KJD110004).
**通讯作者**:曹祥志,博士,讲师,研究方向:几何分析. E-mail:aaa7756kijl@163.com

Han 等[16]研究了泛函 $\int_M F\left(\frac{\|T_u\|^2}{4}\right)\mathrm{d}v_g$ 的单调性公式,其中 $T_u=u^*h-\frac{1}{m}\|du\|^2g$. 它的压力能量张量为

$$T(\cdot,\cdot)=F\left(\frac{\|T_u\|^2}{4}\right)g(\cdot,\cdot)-F'\left(\frac{\|T_u\|^2}{4}\right)h(\sigma_u(\cdot),du(\cdot)).$$

它的散度是 $\mathrm{div}(T)(X)=h(\tau_F,du(X))$,其中,$\tau_F(u)=\mathrm{div}(\sigma_{F,u})$,$\sigma_{F,u}=F'\left(\frac{\|T_u\|^2}{4}\right)\sigma_u(\cdot)$,$X$ 是 $M$ 上的向量场. Han 等[17]定义了能量泛函

$$E_{\varphi_{S,p,\varepsilon}}(u)=\int_M\frac{1}{2p}\left[\frac{m-2p}{p^2}\|du\|^{2p}+m^{\frac{p}{2}-1}\|u^*h\|^p\right]+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2\mathrm{d}v_g.$$

这个泛函的临界点叫做 $\Phi_{S,p,\varepsilon}$-调和映照.

设 $u:(M,g)\to(N,h)$,$N$ 带有 Kahler 结构,受 Faddeev-Niemi 模型[18]的强耦合极限的启发,Speight 和 Svensson[19-20]研究了能量泛函

$$\int_M\frac{\|u^*\omega\|^2}{2}\mathrm{d}v_g.\tag{1.1}$$

进一步,Han[21]导出了微分形式拉回的 F-能量的单调公式 $\int_M F\left(\frac{\|u^*\omega\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v_g$,其中 $F$ 是 $M$ 上的正函数,$\omega$ 是子流形 $(N,h)$ 的第二基本形式.

Branding[22]引入带有二形式和位势函数的调和映照并且研究了相应的 Dirchlet 问题的存在性. 文献[23]研究了从带边的黎曼面出发的带有二形式和位势函数的调和映照的 Dirichlet 问题的存在性.

受到上述结果的启发,在本文,文献[9]中列出的径向曲率条件被用来研究广义调和映照的单调性. 我们主要考虑如下泛函

$$E(u)=\int_M\left[F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right]e^{-\varphi}+u^*B\mathrm{d}v_g.\tag{1.2}$$

其中 $B$ 是 $N$ 上的 $m$ 形式,$F\geqslant0$,$H\geqslant0$.

我们先给出两个定义.

**定义 1.1**　令 $u:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为黎曼流形之间的光滑映照. 如果映照 $u$ 满足

$$\begin{aligned}&\delta^\nabla\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi)+\mathrm{div}_g(\sigma_{F,u})-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)\sigma_u(\nabla\varphi)+\\&\frac{1}{\varepsilon^n}(1-|u|^2)u+Z(du(e_1)\wedge\cdots\wedge du(e_m))-\nabla H(u)=0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

我们称 $u$ 为 Ginzburg-Landau 型 φ-F-调和映照耦合带有 $m$ 形式和位势函数的 φ-F-交响映照.

我们将在引理 2.7 中证明泛函(1.2)的 Euler-Lagrange 方程为式(1.3).对于该映照,我们将在定理 3.1 中用文献[9]中的曲率条件导出它的单调性公式.

Jost 等[24]引入 Hermitian 调和映照. V-调和映照是 Hermitian 调和映照的自然推广. 在过去的几十年里,V-调和映照被深入研究了,例如存在性,唯一性,读者可以参考文献[25].

Wang 等[26]得到了从度量测度空间出发的 φ-调和映照的 Liouville 定理.在文献[4],定理 C 中,如果出发流形 $(M,g)$ 满足曲率条件 $-a^2\leqslant K_M\leqslant0$,$Ric^M(g)\leqslant-b^2$,Liu 得到了从黎曼流形$(M,g)$出发的具有慢发散 F-能量的 F-调和映照的 Liouville 定理.然而,这两篇文章中的曲率条件不同于通常文献中的曲率条件,如文献[9]、文献[27].

**定义 1.2**(φ-F-V 调和映照). 映照 $u$ 叫做 φ-F-V-调和映照,如果

$$\delta^\nabla\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi-V)=0.\tag{1.4}$$

对于这类映射,我们将使用 Wang 等[26]中的方法得到定理 4.1.从我们的证明中可以看出,我们的条件也可以用来研究 φ-F-调和映照与 φ-F-交响映照的 Liouville 定理.

本文的主要目的是通过守恒律建立两类广义调和映射在一般曲率条件下的 Liouville 定理,比如定理 3.1 的曲率条件,我们的主要结果是定理 3.2 和定理 4.2.

本文主要使用如下记号[5]

$$d_F=\sup_{t\geqslant 0}\frac{tF'(t)}{F(t)},l_F=\inf_{t\geqslant 0}\frac{tF'(t)}{F(t)}.$$

本文的证明中,如果没有特别说明,我们选取的标架都是关于 $(M,g)$ 的么正标架$\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Hess$(r)$ 表示 $r$ 的 Hessian 矩阵. $X^{\#}$和 $X^{b}$ 均表示 $X$ 的关于度量 $g$ 的对偶微分形式.

## 2 预备知识

对于黎曼流形 $(M,g)$,我们选取关于度量 $g$ 的么正标架$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$,如果没有特殊说明,都默认选取这样的标架. 对于 $(k+1)$-形式 $\Omega\in\Gamma(\Lambda^{N+1}T^*N)$,通过

$$\langle\eta,Z_x(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_k)\rangle_g=\Omega_x(\eta,\xi_1,\cdots,\xi_k),\quad dB=\Omega.$$

我们可以定义向量丛 Hom$(\Lambda^kTN,TN)$ 的截面 $Z$,其中 $x\in M$ 和 $\eta,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_x\in T_xN$.

**引理 2.1**[28] 设 $u_t:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为 $u$ 的光滑形变使得 $u_0=u,\frac{\partial u_t}{\partial t}|_{t=0}=V$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\int_M u^*B=\int_M\Omega(V,(du)^m(vol_g^{\#}))\mathrm{d}v_g,\tag{2.1}$$

其中$(du)^m(vol_g^{\#}):=du(e_1)\wedge du(e_2)\cdots\wedge du(e_m)$.

**引理 2.2**(第一变分公式) 设 $u_t:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为 $u$ 的光滑形变使得 $u_0=u,\frac{\partial u_t}{\partial t}|_{t=0}=V$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\int_M\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+u^*B+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=$$

$$-\int_M\langle\delta^{\nabla}\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi)-Z_x(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_k)-\nabla H,V\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g.$$

**证明** 我们知道,证明第一变分公式的主要工具是散度定理. 命 $\Psi:(-\delta,\delta)\times M\to N$ 的定义为 $\Psi(t,x)=u_t(x)$. 众所周知,我们可以延拓定义在 $(-\delta,\delta)$ 上的向量场 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $M$ 上的向量场 $X$ 到 $(-\delta,\delta)\times M$. 跟随[30]的做法,通过表达式 $g(X_t,Y)=\langle d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),du(Y)\rangle$,我们可以定义向量场 $X_t$,通过标准的计算,可以得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M F\left(\frac{\|d\Psi\|^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M H(\Psi)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=\int_M F'\left(\frac{\|d\Psi\|^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(d\Psi(e_i),d\Psi(e_i))\right)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+$$
$$\int_M\langle\nabla H(\Psi),d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\rangle\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=-\int_M\langle\delta^{\nabla}\left(F'\left(\frac{\|d\Psi\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|d\Psi\|^2}{2}\right)d\Psi(\nabla\varphi)-\nabla H,d\Psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\tag{2.2}$$

其中 $\tilde{\nabla}$ 是诱导联络. 结合引理 2.1,不难完成证明.

从文献[13]中的证明过程,不难得到

**引理 2.3**[13]、[31] 设 $u_t:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为 $u$ 光滑形变使得 $u_0=u,\frac{\partial u_t}{\partial t}\Big|_{t=0}=V$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\int_M F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=-\int_M\langle\mathrm{div}_g(\sigma_{F,u})-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)du(\nabla\varphi),V\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g,$$

其中 $\sigma_{F,u}(\cdot)=F'\left(\frac{|u^*h|^2}{4}\right)\sigma_u(\cdot),\sigma_u(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}(du(\cdot),du(e_i))du(e_i)$.

**引理 2.4**[13]) 设 $u:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为黎曼流形间的光滑映照.考虑如下张量

$$T_1(\cdot,\cdot)=F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)g(\cdot,\cdot)-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)h(\sigma_u(\cdot),du(\cdot)),$$

那么,对于 $(M,g)$ 上的向量场 $X$,有 $\mathrm{div}(T_1)(X)=-h(\mathrm{div}_g(\sigma_{F,u}),du(X))$.

**引理 2.5**[17]　设 $u_t:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为 $u$ 的光滑形变使得 $u_0=u,\frac{\partial u_t}{\partial t}|_{t=0}=V$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\int_M\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u_t|^2)^2e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=-\int_M\langle\frac{1}{\varepsilon^n}(1-|u|^2)u,V)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g.$$

**引理 2.6**[17]　对于$(M,g)$上的向量场 $X$,那么可得

$$\mathrm{div}_g\left(\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2g\right)(X)=-\langle\frac{1}{\varepsilon^n}(1-|u|^2)u,du(X)\rangle.$$

综合引理 2.4. 引理 2.5,引理 2.6,可得

**引理 2.7**　设 $u:(M^m,g)\to(N^n,h)$ 为黎曼流形间的光滑映照. 能量泛函(1.2)的 Euler-Lagrange 方程为

$$\delta^\nabla\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi)+\mathrm{div}_g(\sigma_{F,u})-F'\left(\frac{|u^*h|^2}{4}\right)\sigma_u(\nabla\varphi)+$$
$$\frac{1}{\varepsilon^n}(1-|u|^2)u+Z(du(e_1)\wedge\cdots\wedge du(e_m))-\nabla H(u)=0.\tag{2.3}$$

## 3　带有位势和 $m$ 形式的 φ-F-调和映照耦合 φ-F-交响映照

在本节我们将导出方程(1.3)的解的单调性公式,利用这一公式,得到 Liouville 定理.

**引理 3.1**　定义 $\varphi$-$F$-压力能量张量

$$S=F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)g-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)u^*h+H(u)g,$$

以及

$$T(\cdot,\cdot)=F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)g(\cdot,\cdot)-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)h(\sigma_u(\cdot),du(\cdot))+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2g(\cdot,\cdot)$$

如果 $u$ 是方程(1.3)的解,对于 $M$ 上的向量场 $X$,可得

$$\mathrm{div}(S+T)(X)=-\langle du(X),F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi)-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)\sigma_u(\nabla\varphi)\rangle.$$

**证明**　由文献[1,8]中的相关公式,可得

$$(\mathrm{div}\ S)(X)=-\langle\tau_{F,u}-\nabla H(u),du(X)\rangle,$$

其中 $\tau_{F,u}=\delta^\nabla\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)$. 由引理 2.4 和引理 2.6,可知

$$(\mathrm{div}T)(X)=-\langle\mathrm{div}_g(\sigma_{F,u})+\frac{1}{\varepsilon^n}(1-|u|^2)u,du(X)\rangle.$$

因此,我们有

$$\mathrm{div}(T+S)(X)=\langle Z(du(e_1)\wedge\cdots\wedge du(e_m)),du(X)\rangle$$
$$-\langle du(X),F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi)-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)du(\nabla\varphi)\rangle,$$

利用张量 $Z$ 的反对称性,我们可以完成证明.

**引理 3.2**　设 $(M^m,g=\eta^2g_0,e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g)$ 为带有极点 $x_0$ 的完备黎曼流形. 假设存在两个函数 $h_1(r)$ 和 $h_2(r)$使得

$$h_1(r)[g_0-dr\otimes dr]\leqslant Hess_{g_0}(r)\leqslant h_2(r)[g_0-dr\otimes dr].$$

进一步,如果 $rh_2(r)\geqslant1,\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\geqslant0,H\geqslant0$,那么

$$\langle S+T,{}^g\nabla X^b\rangle \geqslant \left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+H(u)\right)\times$$
$$\left(1+(m-1)rh_1(r)-4rd_Fh_2(r)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-4d_F)\right). \tag{3.1}$$

其中 $S,T$ 和引理 3.1 中的记号含义一致.

**证明** $S,T$ 和引理 3.1 中的记号一致,$X=\nabla\left(\frac{1}{2}r^2\right)$,$g=\eta^2g_0$,那么我们有

$${}^g\nabla X^b=r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}g+\frac{1}{2}\eta^2\mathcal{L}_X(g_0). \tag{3.2}$$

设 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 关于度量 $g_0$ 的一组么正标架,$e_m=\frac{\partial}{\partial r}$. 注意到 $\{\hat{e}_i=\eta^{-1}e_i\}$ 关于度量 $g$ 的一组么正标架. 因此通过常规的计算可得

$$\eta^2\langle S,\frac{1}{2}\mathcal{L}_X(g_0)\rangle_g\geqslant\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+H\right)(1+(m-1)rh_1(r)-2rd_Fh_2(r)) \tag{3.3}$$

以及

$$r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\langle S,g\rangle\geqslant r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+H(u)\right).$$

注意到 $\|u^*h\|^2=\sum_{i,j=1}^m h(du(e_i),du(e_j))^2=\sum_{i,j=1}^m h(\sigma_u(e_i),du(e_j))$,类似于(3.3)的推导过程,可知

$$\langle\eta^2T,\frac{1}{2}\mathcal{L}_X(g_0)\rangle_g\geqslant\left(F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2\right)(1+(m-1)rh_1(r)-4rd_Fh_2(r)) \tag{3.4}$$

以及

$$r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\langle T,g\rangle=r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\langle F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)g-F'\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)h(\sigma_u(\cdot),du(\cdot))+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2g(\cdot,\cdot),g(\cdot,\cdot)\rangle\geqslant$$
$$r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-4d_F)\left(F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2\right).$$

综合以上几个式子,不难完成证明.

**定理 3.1** 设 $(M^m,g=\eta^2g_0,e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g)$ 为带有极点 $x_0$ 的完备黎曼流形,$(N^n,h)$ 为黎曼流形. 设 $u:M\to N$ 为方程(1.3)的解,设

$$\partial_r\varphi\leqslant 0,H>0,r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\geqslant 0,d_F\leqslant\frac{m}{4},rh_2(r)\geqslant 1.$$

进一步,假设流形 $M$ 的径向曲率 $K_r$ 满足下列条件之一

(1)如果 $-\frac{A(A-1)}{r^2}\leqslant K_r\leqslant-\frac{A_1(A_1-1)}{r^2}$,其中 $A\geqslant A_1\geqslant 1$,$1+(m-1)A_1-4d_FA>0$.

(2)如果 $-\frac{A}{r^2}\leqslant K_r\leqslant-\frac{A_1}{r^2}$ 其中 $A_1\leqslant A$ 以及 $1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1+4A_1}}{2}-2d_F(1+\sqrt{1+4A})>0$.

(3)$\frac{B_1}{r^2}\leqslant K_r\leqslant-\frac{B}{r^2}$,$0\leqslant B_1\leqslant B\leqslant\frac{1}{4}$,且 $1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4B}}{2}-(1+\sqrt{1+4B_1})2d_F>0$.

(4)$\frac{B_1(1-B_1)}{r^2}\leqslant K_r\leqslant-\frac{B(1-B)}{r^2}$ 其中,$0\leqslant B_1,B\leqslant 1$,以及 $1+(m-1)\left(\left|B-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)-2d_F(1+\sqrt{1+4B_1(1-B_1)})>0$.

(5)$-\alpha^2\leqslant K_r\leqslant-\beta^2$,其中,$\alpha>0,\beta>0$ 以及 $(m-1)\beta-\alpha 4d_F>0$.

(6)$K=0$,且 $m-4d_F>0$.

(7)$-\frac{A}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\leqslant K_r\leqslant\frac{B}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}$ 且 $\varepsilon>0,A\geqslant 0,0<B<2\varepsilon$ 且 $m-(m-1)\frac{B}{2\varepsilon}-4d_Fe^{\frac{A}{2\varepsilon}}>0$.

那么,对于 $R_1 \leqslant R_2$,可得

$$\frac{\int_{B_{R_1}(x)}\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{R_1^\sigma} \leqslant$$

$$\frac{\int_{B_{R_2}(x)}\left(F\left(\frac{\| du \|}{2}\right)+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{R_2^\sigma}, \tag{3.5}$$

$$\sigma=\begin{cases}1+(m-1)A_1-4d_F A, & \text{如果 } K_r \text{ 满足(1)}\\ 1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1+A_1}}{2}-2d_F(1+\sqrt{1+4A}), & \text{如果 } K_r \text{ 满足(2)}\\ 1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4B}}{2}-2d_F(1+\sqrt{1+4B_1}), & \text{如果 } K_r \text{ 满足(3)}\\ 1+(m-1)\left(\left|B-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)-2d_F(1+\sqrt{1+4B_1(1-B_1)}), & \text{如果 } K_r \text{ 满足(4)}\\ (m-1)\beta-4d_F\alpha, & \text{如果 } K_r \text{ 满足(5)}\\ m-4d_F, & \text{如果 } K_r \text{ 满足(6)}\\ m-(m-1)\frac{B}{2\varepsilon}-4d_F e^{\frac{1}{2\varepsilon}}, & \text{如果 } K_r \text{ 满足(7)}\end{cases}$$

**证明**　众所周知,下式成立

$$\int_{B_R(x)}\mathrm{div}(i_X(S+T))e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=\int_{B_R(x)}\langle S+T,\nabla X^b\rangle_g e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}i_X(\mathrm{div}(S+T))e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{3.6}$$

根据黎曼流形上的散度定理,可知

$$\int_{B_R(x)}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{-\varphi}i_X(S+T))\mathrm{d}v_g=\int_{B_R(x)}\langle S+T,\nabla X^b\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g-\int_{B_R(x)}(S+T)(X,\nabla\varphi)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}i_X(\mathrm{div}(S+T))e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{3.7}$$

于是

$$\int_{\partial B_R(x)}(S+T)(X,n)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\leqslant R\frac{d}{dR}\int_{B_R(x)}\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{3.8}$$

另一方面,利用公式(2.3),以及 $S$ 和 $T$ 的定义,可知

$$e^{-\varphi}[-(S+T)(X,\nabla\varphi)+i_X(\mathrm{div}(S+T))]=-\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+H+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)\right)\nabla_X e^{-\varphi}. \tag{3.9}$$

因此,由(3.9),式(3.7)的右边等于

$$\int_{B_R(x)}\langle S+T,{}^g\nabla X^b\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+H+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4e^n}(1-|u|^2)^2\right)(\nabla_X e^{-\varphi})\mathrm{d}v_g.$$

注意到 $\partial_r\varphi\geqslant 0$,由式(3.1),我们得到

$$\int_{B_R(x)}\langle S+T,{}^g\nabla X^b\rangle e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\geqslant\int_{B_R(x)}\left(1+(m-1)rh_1(r)-4d_F rh_2(r)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-4d_F)\right)\times\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{3.10}$$

根据定理中的条件(1)-(7)和文献[9],可知

$$1+r(m-1)h_1(r)-4d_F rh_2(r)\geqslant 0.$$

把式(3.8),(3.10)代入式(3.6),得到

$$R\frac{d}{dR}\int_{B_R(x)}\left(F\left(\frac{\| du \|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\| u^* h \|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\geqslant$$

$$\sigma\int_{B_R(x)}\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g,\tag{3.11}$$

两边积分后,不难完成证明.

接下来,我们给出广义慢发散的定义. 如果存在正函数 $\psi(x)$ 使得 $\int_{R_0}^{\infty}\frac{1}{r\psi(r(x))}\mathrm{d}x=\infty$,使得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0))}\frac{\left(F\left(\frac{|du|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)}{\psi(r(x))}e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g<\infty$. 那么称 $u$ 具有广义慢发散的能量. 这个定义推广了通常调和映照的能量慢发散的观念[27].

**定理 3.2** 在定理 3.1 相同的条件下,设 $u:M\to N$ 为方程(1.3)的解. 设 $|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C}{2r}$. 其中 $C$ 是一个常数,$C<\sigma$,$\sigma$ 同(3.5)定义的一致. 如果当 $R\to\infty$,

$$\int_{B_R(x)}\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=o(R^\sigma).$$

那么,$u$ 为常值映照.

**证明** 我们只需要在能量广义慢发散条件下证明 $u$ 是常数. 同定理 3.1 中的证明过程类似,也可得(3.8)式. 如果能量密度 $e(u)$ 不恒等于 0,那么存在 $R_0>0$ 使得当 $R>R_0$,有

$$R\int_{B_R(x_0)}\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\geqslant C',$$

其中常数 $C'>0$. 由(3.11),可得

$$\int_{\partial B_R(x_0)}\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}S\geqslant\frac{\sigma C'}{R}.$$

选取函数 $\psi(x)>0$,使得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)}\frac{\left(F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)+F\left(\frac{\|u^*h\|^2}{4}\right)+\frac{1}{4\varepsilon^n}(1-|u|^2)^2+H(u)\right)e^{-\varphi}}{\psi(r(x))}\mathrm{d}v_g\geqslant\sigma C'\int_{R_0}^{\infty}\frac{dR}{R\psi(R)}=\infty,$$

这显然和定理的条件矛盾.

**注 3** 我们推广了[[27],定理 3.1,3.2],[[22],命题 3.4]. 另外,虽然定理 1 类似于[[29],定理 4.1]. 但是,在这里,我们使用的曲率条件不同.

由定理 3.2 易证:

**定理 3.3** 在定理 3.1 相同的条件下,设 $D\subset M$ 是带有 $C^1$ 边界和极点的有界的星状区域. 设 $u:M\to N$ 是(1.3)的解且 $u|_{\partial D}=y\in N$,那么 $u$ 在 $D$ 上是常值.

## 4 φ-F-V-调和映照

在本节,我们使用文献[[26],定理 1.3]中的曲率条件处理 $\varphi$-$F$-$V$-调和映照

$$\delta^{\nabla}\left(F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du\right)-F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)du(\nabla\varphi-V)=0.\tag{4.1}$$

**定理 4.1** 设$(M^m,\eta^2g_0,e^{-\varphi}dv)$ 为带有极点 $x_0$ 的度量测度空间.设 $r(x)=d_{g_0}(x,x_0)$. 假设$(M,g_0)$为非正截面曲率的单连通完备非紧黎曼流形,且 $-a^2\leqslant K_M(g_0)\leqslant 0$. 设$(N,h)$为黎曼流形,$b>0$,和$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 0$,$\frac{\partial\log\eta}{\partial r}\geqslant 0$,$\|V\|_\infty\leqslant\frac{\delta_0}{4R}$. $u:(M^m,\eta^2g_0,e^{-\varphi}dv)\to(N,h)$为 $\varphi$-$F$-$V$ 调和映射.

假设$(M,\eta^2g_0,e^{-\varphi}dv)$满足下列条件之一:

(1) $Ric^M(g_0)\leqslant -b^2$,$d_F<1$,$b\geqslant 2a$,$d_F\leqslant\frac{m}{2}$;

(2) $Ric_{\varphi}^{\infty}(g_0)\leqslant -b^2, d_F<1, b\geqslant 2a, d_F\leqslant \frac{m}{2}$;

(3) $Ric_{\varphi}^{\infty}(g_0)\leqslant -b^2$或 $Ric^{M}(g_0)\leqslant -b^2$,

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\leqslant 1+(br)coth(br)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)-2d_F arcoth(ar).$$

那么对于 $R_2\geqslant R_1\geqslant r_0>0$,可得

$$\frac{\int_{B_{R_1}(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F(e(u)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{R_1^{\frac{\delta_0}{2}l_F}}\leqslant\frac{\int_{B_{R_2}(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F(e(u)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{R_2^{\frac{\delta_0}{2}l_F}}.$$

因此能量有限的 $\varphi$-$F$-$V$-调和映照 $u:(M,\eta^2 g_0,\mathrm{d}v_g)\to(N,h)$一定是常值映照.

**证明**　我们在 $B_R(x_0)$上选取关于 $g_0$ 的一组么正标架 $\{e_i\}=\{e_s,\partial_r\}$,设 $r(x)$为 $x$ 到 $x_0$ 的测地距离函数.定义张量 $S_F$为

$$S_F=F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)g-F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)u^*h.$$

设 $X=r\frac{\partial}{\partial r}$,那么

$$\int_{B_R(x)}\mathrm{div}(i_X S_F)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g=\int_{B_R(x)}\langle S_F,\nabla X^{\#}\rangle_g e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}i_X(\mathrm{div}S_F)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{4.2}$$

因此可得

$$\int_{B_R(x)}\mathrm{div}(e^{-\varphi}S_F)\mathrm{d}v_g=\int_{B_R(x)}\langle S_F,{}^g\nabla X^{\#}\rangle_e{}^{-\varphi}\mathrm{d}v_g-\int_{B_R(x)}S(X,\nabla\varphi)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}i_X(\mathrm{div}S_F)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \tag{4.3}$$

利用散度定理,式(4.3)中等号左边可以被估计为

$$\int_{\partial B_R(x)}S_F(X,n)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\leqslant R\int_{\partial B_R(x)}Fe^{-\varphi}\mathrm{d}S. \tag{4.4}$$

直接计算可得:

$$\langle S_F,{}^g\nabla X^{\#}\rangle_g-S(X,\nabla\varphi)+i_X(\mathrm{div}S_F)=\langle S_F,{}^g\nabla X^{\#}\rangle_g-\left(F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\right)\nabla_X\varphi+F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)u^*h(X,\nabla\varphi)-\langle du(X),$$

$$\tau_F(u)\rangle=\langle S_F,{}^g\nabla X^{\#}\rangle_g-\left(F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\right)\nabla_X\varphi+F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)h(du(X),du(V)).$$

因此,式(4.3)的右边为

$$\int_{B_R(x)}\langle S_F,{}^g\nabla X^{\#}\rangle_g e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g-F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)(\nabla_X\varphi)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g+\int_{B_R(x)}F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)h(du(X)\cdot du(V))e^{-\varphi}d\mathrm{d}v_g, \tag{4.5}$$

同前,我们有

$$\langle S,{}^g\nabla X^{\#}\rangle=\langle S,r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}g+\frac{1}{2}\eta^2\mathcal{L}_X(g_0)\rangle.$$

式(4.5)中的被积函数

$$\langle\eta^2 e^{-\varphi}S,\frac{1}{2}\mathcal{L}_X(g_0)\rangle_g-e^{-\varphi}F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\nabla_X\varphi=e^{-\varphi}\left(F\left(\frac{|du|^2}{2}\right)\right)(1+r\Delta_{\varphi}r(e_i,e_i))-$$

$$e^{-\varphi}F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\left|du\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right|^2-e^{-\varphi}\sum_{i,j=1}^{m-1}F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)rHess_{g_0}(r)(e_i,e_j)\langle du(e_i),du(e_j)\rangle.$$

因此,可得

$$e^{-\varphi}\langle S_F,\nabla X^{\#}\rangle_g-e^{-\varphi}F\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\nabla_X\varphi\geqslant$$

$$-e^{-\varphi}\left[1-\frac{1}{2d_F}\left(1+brcoth(br)-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right)\right]F'\left(\frac{\| du\|^2}{2}\right)\left|du\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right|^2-$$

$$e^{-\varphi}\sum_{i=1}^{m-1}\left(arcoth(ar)-\frac{1}{2d_F}\left[1+brcoth(br)-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right]\right)\times F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\langle du(e_i),du(e_i)\rangle, \quad (4.6)$$

其中 $d_F\leqslant\frac{m}{2},r>0.$

设 $r_0$满足 $r_0coth(r_0)>0$. 利用定理中的条件 $d_F<1,b\geqslant 2a,d_F\leqslant\frac{m}{2}$,利用函数 $H(r)=rcoth(r)$ 的导数性质,可知存在正常数 $\delta_0,r_0$使得[26]

$$-\left(ar\ coth(ar)-\frac{1}{2d_F}\left[1+brcoth(br)-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right]\right)\geqslant\frac{\delta_0}{2},$$

$$-\left[1-\frac{1}{2d_F}\left(1+brcoth(br)-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right)\right]\geqslant\frac{\delta_0}{2}.$$

其中 $r(x)\geqslant r_0$.因此,我们对式(4.5)如下估计

$$(4.5)\text{式}\geqslant(\delta_0-2R\|V\|_\infty)\int_{B_R(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e(u)e^{-\varphi}dv, \quad (4.7)$$

其中 $\delta_0>0$ 依赖于 $r_0$ 的正数. 结合(4.4),(4.5),(4.7),对于 $R\geqslant r_0$,可得

$$R\int_{\partial B_R(x_0)}F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}S\geqslant(\delta_0-2R\|V\|_\infty)\int_{B_R(x_0)}F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e(u)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g\geqslant$$

$$2l_F(\delta_0-2R\|V\|_\infty)\int_{B_R(x_0)}F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g. \quad (4.8)$$

这给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\int_{B_R(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v\geqslant\frac{\delta_0 l_F}{2R}\int_{B_R(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v,\quad R\geqslant R_0.$$

因此对于 $R_2\geqslant R_1\geqslant R_0$,可得

$$\frac{\int_{B_R(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F(e(u)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{\frac{\delta_0 l_F}{2R}}\leqslant\frac{\int_{B_R(x_0)\setminus B_{r_0}(x_0)}F(e(u)e^{-\varphi}\mathrm{d}v}{R_2^{\frac{\delta_0}{2}l_F}}$$

由(4.8),同[26]的做法类似,可知 $u$ 是常值.

其次,假设条件(2)成立.由[[26],推论 A.1],可知

$$e^{-\varphi}\langle S_F,{}^g\nabla X^\#\rangle_g-e^{-\varphi}F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\nabla_X\varphi\geqslant$$

$$-e^{-\varphi}\left[1-\frac{1}{2d_F}\left(1+brcoth(br)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right)\right]F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\left|du\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right|^2-$$

$$e^{-\varphi}\sum_{i=1}^{m-1}F'\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\left(arcoth(ar)-\frac{1}{2d_F}\left[1+brcoth(br)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right]\right)\langle du(e_i),du(e_i)\rangle \quad (4.9)$$

设 $r_0$ 满足 $r_0coth(r_0)>0$.然而,条件 $d_F<1,b\geqslant 2a,d_F\leqslant\frac{m}{2}$ 意味着存在正复数使得 $\delta_0,r_0$ 使得[26]当 $r(x)\geqslant r_0$ 时,

$$-\left(arcoth(ar)-\frac{1}{2d_F}\left[1+brcoth(br)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right]\right)\geqslant\frac{\delta_0}{2},$$

$$-\left[1-\frac{1}{2d_F}\left(1+brcoth(br)+r\frac{\partial\log\eta}{\partial r}(m-2d_F)\right)\right]\geqslant\frac{\delta_0}{2}.$$

其余步骤同条件(1)的情形的证明.

最后,我们在条件(3)下证明.根据(4.6),同文献[26]的做法那样,我们可以证明 $u$ 独立于 $r$. 由[26,推论 A.2],可知

$$\int_M F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v \geqslant \int_{r_0}^{R}\int_{S^{n-1}} F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)A(r,\theta)e^{-\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_{n-1} \geqslant Ce^{bR}\int_{S^{n-1}} F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\mathrm{d}\theta_{n-1}.$$

因此如果 $\int_{S^{n-1}} F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)\mathrm{d}\theta_{n-1} \neq 0$,我们有 $\int_M F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}\mathrm{d}v = \infty$. 因此 $e(u) \equiv 0$,因此 $u$ 是常值映照.

首先,给出 $\varphi$-$F$-$V$-慢发散的定义. 如果存在正函数 $\psi(x)$ 使得

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{r(x)\psi(r(x))}\mathrm{d}x = \infty .$$

使得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)} \frac{F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)}{\psi(r(x))}e^{-\varphi}\mathrm{d}v_g < \infty .$$

那么,称 $u$ 具有 $\varphi$-$F$-$V$-慢发散的能量. 这个定义推广了通常调和映照的能量慢发散的观念[27].

**定理 4.2**　同定理 4.1 的条件,另外,如果当 $R\to\infty$,$u$ 的 $F$-能量满足渐近条件

$$\int_{B_R(x_0)} F\left(\frac{\|du\|^2}{2}\right)e^{-\varphi}dv_s = o(R^{\delta_0}),$$

那么 $u$ 是一个常值映照. 特别地,如果 $u$ 的能量是有限的或者慢发散,那么具有有限 $F$-能量的 $\varphi$-$F$-$V$-调和映照 $u:(M, g=\eta^2 g_0, \mathrm{d}v_g)\to(N,h)$ 一定是常值映照.

同调和映照类似,易证:

**推论 4.2**　在定理 4.2 相同的条件下,另外取 $\varphi(x)=0$,$F(x)=x$,可得能量有限或慢发散的 $V$-调和映照 $u:(M, g=\eta^2 g_0, \mathrm{d}v_g)\to(N,h)$,一定是常值映照.

## [参考文献]


[1] ARA M. Geometry of $F$-harmonic maps[J]. Kodai mathematical journal,1999,22(2):243-263.

[2] ARA M. Instability and nonexistence theorems for $F$-harmonic maps[J]. Illinois journal of mathematics,2001,45(2):657-679.

[3] ARA M. Stability of $F$-harmonic maps into pinched manifolds[J]. Hiroshima mathematical journal,2001,31(1):171-181.

[4] LIU J. Liouville-type theorems for $F$-harmonic maps on non-compact manifolds[J]. Kodai mathematical journal,2005,28(3):483-493.

[5] DONG Y,LIN H,YANG G. Liouville theorems for $F$-harmonic maps and their applications[J]. Results in mathematics,2016,69(1-2):105-127.

[6] ZHOU Z. Liouville theorems of $F$-stationary maps[J]. Acta mathematica scientia,2010,30(6):1677--1685.

[7] LI L,ZHOU Z. Monotonicity of $F$-stationary maps[J]. Journal of mathematics,2012,32(1):17-24.

[8] DONG Y,WEI S W. On vanishing theorems for vector bundle valued $p$-forms and their applications[J]. Communications in mathematical physics,2011,S04(2):.329-368.

[9] WEI S W. Dualities in comparison theorems and bundle-valued generalized harmonicforms on noncompact manifolds[J]. Science China(mathematics),2021,64(7):1649-1702.

[10] KAWAI S,NAKAUCHI N. Some results for stationary maps of a functional related to pullback metrics[J]. Nonlinear analysis. theory,methods & applications,2011,74(6):2284-2295.

[11] NAKAUCHI N. A variational problem related to conformal maps[J]. Osaka journal of mathematics,2011,48(3):719-741.

[12] NAKAUCHI N,Takenaka Y. A variational problem for pullback metrics[J]. Ricerche di matematica,2011,60(2):219-235.

[13] HAN Y B,WANG Y,XUE Y. Liouville theorems for $F$-stationary maps[J]. Journal of Xinyang Normal University(natural science edition),2021,34(1):16-21.

[14] HAN Y B,FENG S. Monotonicityformulas and the stability of $F$-stationary maps with potential[J]. Houston journal of mathematics,2014 40(3):681-713.

[15] FENG S,HAN Y B,LI X,et al. The geometry of $\Phi_S$-harmonic maps[J]. The journal of geometric analysis,2021,31(10):9469-9508.


(下转第 110 页)