

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.05.001

求解多重线性 PageRank 问题的切比雪夫加速法

蒋贺兰, 谈雪媛

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 论文提出了一种求解多重线性 PageRank 问题的切比雪夫加速方法, 改进了已有的移位不动点迭代, 并给出了收敛性分析. 数值实验表明, 提出的算法具有可行性和有效性.

[关键词] 张量, 多重线性 PageRank, 不动点迭代, 切比雪夫加速

[中图分类号] O241.7 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2025)05-0001-06

A Chebyshev Acceleration for Multilinear PageRank Problem

Jiang Helan, Tan Xueyuan

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: We propose a Chebyshev acceleration strategy for solving the multilinear PageRank problem. We modify the existing shifted fixed-point iteration and exhibit the convergence analysis of our new method. Numerical experiments are given to demonstrate the the feasibility and effectiveness of the suggested algorithm.

Key words: tensor, multilinear PageRank, fixed-point iteration, Chebyshev acceleration

多重线性 PageRank 问题^[1]是将经典的 PageRank 模型^[2]推广到高阶马尔可夫链上所提出的一类问题, 该问题的解被定义为多重线性 PageRank 向量.

为了求解多重线性 PageRank 向量, Gleich 等学者在[1]中提出了 5 种方法: 不动点迭代, 移位不动点迭代, 内外迭代, 逆迭代, 以及牛顿法. 此后, 为寻求更高效的求解算法, 大量学者在此基础上做进一步的研究, 其中基于不动点迭代和基于牛顿法是常用的两类方法. 一方面, 求解多重线性 PageRank 是一个寻求不动点的过程, 部分学者基于此提出了一些改进, 包括松弛策略^[3], epsilon 算法^[4], Anderson 加速技术^[5], 向量 Aitken 外推^[6], 以及多项式方法^[7-8]. 另一方面, 由于多重线性 PageRank 问题本质上涉及到非线性方程组的求解, 故牛顿法及其改进方法也是解决该问题的一个基本工具. 多重线性 PageRank 向量可以解释为 Perron 特征向量, Meini 等学者因此将多重线性 PageRank 问题进行重述, 提出了 Perron 牛顿法^[9]. 为了避免在每次迭代中对 Fréchet 导数产生的雅可比条件进行 LU 分解, Guo 等学者设计了改进的牛顿法^[10]. 而 Bucci 等学者则讨论了解的几何结构和全局性质, 给出了相应的预测-校正-牛顿法^[11]. 此外, 因为多重线性 PageRank 问题可以进一步改写为 Z-特征向量问题, 所以处理非负 Z-特征对的相关理论和算法也适用该问题, 详细内容可以参考文献[12-13].

移位不动点迭代是不动点迭代的一种优化策略, 其移位因子的最优选择影响着算法的收敛速度. 为改善求解多重线性 PageRank 问题的算法的收敛性能, 本文考虑将移位不动点迭代的常数因子替换为周期因子序列, 经过分析, 该序列的最优选择是一个极大极小值的最佳逼近问题, 可利用仿射平移后的切比雪夫多项式求解. 由此本文提出了求解多重线性 PageRank 问题的切比雪夫加速法.

1 多重线性 PageRank 模型

定义 1^[1] 对于任意 m 阶 n 维实张量 $\mathcal{P} = (p_{n_1, n_2, \dots, n_m} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n})$, 如果

收稿日期: 2024-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11871280).

通讯作者: 谈雪媛, 博士, 副教授, 研究方向: 计算数学. E-mail: tanxueyuan@njnu.edu.cn

$$p_{n_1, n_2, \dots, n_m} \geq 0, \sum_{n_1=1}^n p_{n_1, n_2, \dots, n_m} = 1, \forall n_2, \dots, n_m \in \{1, 2, \dots, n\},$$

则 \mathcal{P} 是一个随机张量.

定义 2^[14] 令 $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ 是一个 m 阶 n 维的实张量, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\mathcal{P}\mathbf{x}^{m-1} \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维向量, 其分量满足

$$(\mathcal{P}\mathbf{x}^{m-1})_{n_1} = \sum_{n_2, n_3, \dots, n_m=1}^n p_{n_1, n_2, \dots, n_m} x_{n_2} \cdots x_{n_m}, n_1 \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

定义 3^[1] 令 $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ 是一个 m 阶 n 维随机张量, 则多重线性 PageRank 向量 \mathbf{x}_* 是一个随机向量, 且满足下列方程

$$\mathbf{x} = \alpha \mathcal{P}\mathbf{x}^{m-1} + (1-\alpha)\mathbf{v}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 是随机向量, $\alpha \in [0, 1)$ 是固定的概率常数.

注 1 当 $m=2$ 时, 多重线性 PageRank 问题可以简化为传统的 PageRank 问题.

注 2^[15] 令 $\mathbf{R} := \mathcal{P}_{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n^{m-1}}$ 是张量 \mathcal{P} 按第一个指标展开的随机矩阵. 那么, 式(1)等价于

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{R}(\underbrace{\mathbf{x} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}}_{m-1 \text{ 个}}) + (1-\alpha)\mathbf{v} = \alpha \mathbf{R}\mathbf{x}^{\otimes(m-1)} + (1-\alpha)\mathbf{v}. \tag{2}$$

如果 $m=3$, 则

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} p_{111} & \cdots & p_{1n1} & p_{112} & \cdots & p_{1n2} & \cdots & p_{11n} & \cdots & p_{1nn} \\ p_{211} & \cdots & p_{2n1} & p_{212} & \cdots & p_{2n2} & \cdots & p_{21n} & \cdots & p_{2nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n11} & \cdots & p_{nn1} & p_{n12} & \cdots & p_{nn2} & \cdots & p_{n1n} & \cdots & p_{nnn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}.$$

注 3^[1] 当 $\alpha < \frac{1}{m-1}$ 时, 多重线性 PageRank 问题的解是唯一的. 除非特殊说明, 本文假定 $\alpha < \frac{1}{m-1}$.

求解多重线性 PageRank 问题的不动点迭代(简称为 FP)形如

$$\mathbf{x}_{k+1} = \alpha \mathbf{R}\mathbf{x}_k^{\otimes(m-1)} + (1-\alpha)\mathbf{v}, \tag{3}$$

移位不动点迭代(简称为 SFP)形如

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\alpha}{1+\gamma} \mathbf{R}\mathbf{x}_k^{\otimes(m-1)} + \frac{1-\alpha}{1+\gamma} \mathbf{v} + \frac{\gamma}{1+\gamma} \mathbf{x}_k, \tag{4}$$

其中, 移位参数 γ 是一个常数. 在某些情况下, 移位不动点迭代较不动点迭代有更好的收敛表现.

记 $\omega = \frac{1}{1+\gamma}$, 令 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个非线性映射, 满足:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{R}\mathbf{x}^{\otimes(m-1)} + (1-\alpha)\mathbf{v}, \tag{5}$$

将 ω 和 f 代入到式(4), 则有替代格式

$$\mathbf{x}_{k+1} = \omega f(\mathbf{x}_k) + (1-\omega)\mathbf{x}_k, \tag{6}$$

其中, 实系数 ω 称为该迭代的因子.

本文对上述式子产生的非线性序列进行改进, 利用切比雪夫插值, 分析并选择合适的因子, 提出求解多重线性 PageRank 问题的切比雪夫加速法.

2 多重线性 PageRank 问题的切比雪夫加速法

2.1 选择移位因子

假设一组标量因子序列 $\{\omega_k\}$ 满足

$$\omega_{pT+i} = \omega_i, i=0, 1, 2, \dots, T-1,$$

其中, p 是任意非负整数, T 是任意正整数, T 是这组因子序列的一个周期. 将(6)式中的 ω 替换成 ω_k 得到

$$\mathbf{x}_{k+1} = \omega_k f(\mathbf{x}_k) + (1-\omega_k)\mathbf{x}_k. \tag{7}$$

令 $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是第 k 步迭代后的更新函数, 并定义 $g_k(\mathbf{x}) = \omega_k f(\mathbf{x}) + (1-\omega_k)\mathbf{x}$, 则由(7)生成的序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 等价于

$$\mathbf{x}_{k+1} = g_k(\mathbf{x}_k). \quad (8)$$

对于任意非负整数 k , 序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 都收敛到 g_k 的不动点 \mathbf{x}_* , 即多重线性 PageRank 问题(1)的解. 由于 g_k 的导数是 Lipschitz 连续的, 可利用泰勒公式将 g_k 在点 \mathbf{x}_* 展开, 得到引理 1.

引理 1 由(8)式定义的迭代序列收敛到多重线性 PageRank 问题的唯一解, 误差满足

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) \mathbf{e}_k + O(\|\mathbf{e}_k\|^2), k=0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$ 是第 k 步迭代的误差向量. $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \nabla f(\mathbf{x}_*)$ 是一个 n 阶方阵, 并且

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = \alpha R(\mathbf{I} \otimes \mathbf{x}_* \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_* + \mathbf{x}_* \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{x}_* \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_* + \dots + \mathbf{x}_* \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_* \otimes \mathbf{I}).$$

证明 对非线性系统 g_k 在点 \mathbf{x}_* 应用泰勒公式展开, 得到

$$g_k(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x}_*) + \nabla g_k(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2).$$

由于 \mathbf{x}_* 是 g_k 的不动点, 且在点 \mathbf{x}_* 的雅可比矩阵 $\nabla g_k(\mathbf{x}_*) = \mathbf{I} - \omega_k(\mathbf{I} - \nabla f(\mathbf{x}_*))$, 令 $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \nabla f(\mathbf{x}_*)$, 得到

$$g_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_* + (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2).$$

令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, 并由迭代关系得到

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* = g_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_* = (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) \mathbf{e}_k + O(\|\mathbf{e}_k\|^2).$$

上述方程对任意非负整数 k 都成立, 证毕.

为方便讨论, 本文接下来研究矩阵 \mathbf{B} 的特征值的范围. 根据 Gerschgorin 圆盘定理^[16], 易得到引理 2.

引理 2 令 Λ 是引理 1 给出的矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 的所有特征值构成的集合, 并且令

$$a_i = \min_i \left\{ b_{ii} - \sum_{j=1, i \neq j}^n |b_{ij}| \right\}, \quad (10)$$

$$b_i = \max_i \left\{ b_{ii} + \sum_{j=1, i \neq j}^n |b_{ij}| \right\}, \quad (11)$$

则有

$$\max_{\lambda \in \Lambda} |\lambda| \leq \max_{x \in [a, b]} |x|. \quad (12)$$

注 4 设矩阵 \mathbf{B} 是三阶的, 图 1 直观地显示了其特征值的可能分布, 可以清楚看到, 无论是哪种情况, 不等式(12)都是成立的.

引理 3 由(8)式定义的迭代序列收敛到多重线性 PageRank 问题的唯一解, 并且满足误差 inequality

$$\|e_{(p+1)T}\| \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k x) \right| \|e_{pT}\| + O(\|e_0\|^2), \quad (13)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

其中, a 和 b 分别由式(10)和(11)定义, 且 $e_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$.

证明 对(9)式的结果递推, 由于因子序列 $\{\omega_k\}$ 的周期为 T , 故有

$$\begin{aligned} e_{(p+1)T} &= (\mathbf{I} - \omega_{(p+1)T-1} \mathbf{B}) e_{(p+1)T-1} + O(\|e_{(p+1)T-1}\|^2) = (\mathbf{I} - \omega_{T-1} \mathbf{B}) e_{(p+1)T-1} + O(\|e_{(p+1)T-1}\|^2) = \\ &= (\mathbf{I} - \omega_{T-1} \mathbf{B}) [(\mathbf{I} - \omega_{(p+1)T-2} \mathbf{B}) e_{(p+1)T-2} + O(\|e_{(p+1)T-2}\|^2)] + O(\|e_{(p+1)T-1}\|^2) = \dots = \prod_{k=0}^{T-1} (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) e_{pT} + \\ &= \sum_{i=1}^T \prod_{k=T-i+1}^{T-1} (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) O(\|e_{(p+1)T-i}\|^2), p = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

对 $e_{(p+1)T}$ 取范数, 则有

$$\begin{aligned} \|e_{(p+1)T}\| &\leq \left\| \prod_{k=0}^{T-1} (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) e_{pT} \right\| + \sum_{i=1}^T \left\| \prod_{k=T-i+1}^{T-1} (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) \right\| O(\|e_{(p+1)T-i}\|^2) \leq \rho \left(\prod_{k=0}^{T-1} (\mathbf{I} - \omega_k \mathbf{B}) \right) \|e_{pT}\| + \\ &= \sum_{i=1}^T O(\|e_{(p+1)T-i}\|^2) = \max_{\lambda \in \Lambda} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k \lambda) \right| \|e_{pT}\| + O(\|e_0\|^2) \leq \end{aligned}$$

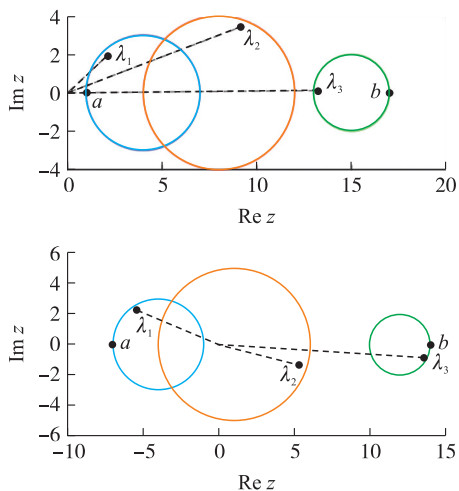


图 1 矩阵 \mathbf{B} 的阶数是 3

Fig. 1 The order of matrix \mathbf{B} is 3

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k x) \right| \|e_{pT}\| + O(\|e_0\|^2), p=1, 2, \dots$$

上述式子的最后一个不等式利用了引理 2 的结果,证毕.

由引理 3 知向量序列 $\{x_k\}$ 加速收敛的关键是需要找到一组特定的因子序列 $\{\omega_k^*\}_{k=0}^{T-1}$, 满足

$$\min_{\omega_k, k=0, 1, \dots, T-1} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k x) \right|. \tag{14}$$

对于上述极大极小值问题, 本文借助于切比雪夫多项式插值^[17]. 对于第一类 n 次切比雪夫多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1, 1],$$

利用变量替换

$$x = \frac{2}{b-a} \lambda - \frac{b+a}{b-a},$$

将 $T_n(x)$ 变换为下面的仿射切比雪夫多项式

$$G_n(\lambda) = \cos \left[\arccos \left(\frac{2}{b-a} \lambda - \frac{b+a}{b-a} \right) \right], \lambda \in [a, b].$$

由切比雪夫交替定理^[18], 因子序列可定义为

$$\omega_k^* = \left[\frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2T} + \frac{b+a}{2} \right]^{-1}, k=0, 1, \dots, T-1, \tag{15}$$

其中, $\{\omega_k^*\}_{k=0}^{T-1}$ 是仿射变换后的切比雪夫多项式 $G_T(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的根的倒数, 据文献[19]可知

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k^* x) \right| = \frac{1}{|G_T(0)|}. \tag{16}$$

2.2 收敛性分析

由前述讨论, (8) 式中的待定因子序列将由 (15) 式的 ω_k^* 给出, 从而得到基于移位不动点迭代的切比雪夫加速方法, 并得出下面的收敛性结果.

定理 1 令 \mathcal{P} 是一个 m 阶 n 维的实随机张量, \mathbf{x}_k 是由 (8) 式定义的迭代格式产生的第 k 步的近似向量, 其中的因子 ω_k 由 (15) 式确定取值. 当给定一个初始向量 \mathbf{x}_0 , $\{\mathbf{x}_k\}$ 将收敛到多重线性 PageRank 问题 (1) 的唯一解, 并满足误差不等式

$$\|e_{pT}\| \leq c^p \|e_0\| + O(\|e_0\|^2), p=1, 2, \dots, \tag{17}$$

其中, $e_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*$, $c = \frac{1}{|G_T(0)|}$.

证明 由 (13) 和 (16) 式可得

$$\begin{aligned} \|e_{pT}\| &\leq \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=0}^{T-1} (1 - \omega_k^* x) \right| \|e_{(p-1)T}\| + O(\|e_0\|^2) = c \|e_{(p-1)T}\| + O(\|e_0\|^2) \leq \\ &c [c \|e_{(p-2)T}\| + O(\|e_0\|^2)] + O(\|e_0\|^2) = \\ &c^2 \|e_{(p-2)T}\| + cO(\|e_0\|^2) + O(\|e_0\|^2) = \\ &c^2 \|e_{(p-2)T}\| + O(\|e_0\|^2) \leq \dots \leq c^p \|e_0\| + O(\|e_0\|^2), \end{aligned}$$

从而得到不等式 (17), 证毕.

2.3 算法设计

由于在算法实施中, 我们无法提前计算 $I - \nabla f(\mathbf{x})$ 在不动点 \mathbf{x}_* 处的矩阵, 进而也无法确定周期因子序列的取值, 因此本文提出了一个可行的方案: 在每 hT ($h=1, 2, 3, \dots$) 步时, 将矩阵更新为 $I - \nabla f(\mathbf{x})$ 在当前迭代点 \mathbf{x}_k 的矩阵. 我们称这个算法为基于移位不动点迭代的不精确切比雪夫加速法, 简记为 ICA-SFP. 具体的迭代步骤如算法 1 所示.

算法 1 ICA-SFP: 基于移位不动点迭代的不精确切比雪夫加速

输入: 随机矩阵 \mathbf{R} (由随机张量 \mathcal{P} 展开), 概率 α , 周期 T , 初始向量 \mathbf{x}_0 , 随机传送向量 \mathbf{v} , 终止误差 ε , 最大迭代次数 k_{\max} 以及正整数 h . 初始化 $k=0$ 和 $s=0$.

迭代步骤:

1. 计算 $f(\mathbf{x}_0) = \alpha \mathbf{R} \mathbf{x}_0^{\otimes(m-1)} + (1-\alpha) \mathbf{v}$;
2. 计算 $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \nabla f(\mathbf{x}_0)$;
3. 计算由(10)和(11)式确定的 a 和 b ;
4. 当满足条件 $k < k_{\max}$ 时,执行第 4.1 至 4.3 步;
 - 4.1. 令 $s = 0$;
 - 4.2. 当满足条件 $s < T$ 时,执行第 4.2.1 至第 4.2.4 步;
 - 4.2.1. 计算 $\omega_k = \left[\frac{b-a}{2} \cos \frac{(2s+1)\pi}{2T} + \frac{b+a}{2} \right]^{-1}$;
 - 4.2.2. 计算 $f(\mathbf{x}_k) = \alpha \mathbf{R} \mathbf{x}_k^{\otimes(m-1)} + (1-\alpha) \mathbf{v}$;
 - 4.2.3. 计算 $\mathbf{x}_{k+1} = (1-\omega_k) \mathbf{x}_k + \omega_k f(\mathbf{x}_k)$;
 - 4.2.4. 如果满足条件 $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_1 < \varepsilon$, 则停止迭代并且输出 \mathbf{x}_{k+1} , 否则令 $k = k+1$, 及 $s = s+1$, 返回第 4.2 步
- 4.3. 如果满足条件 $\frac{k}{T} \in h\mathbf{Z}^+$, 则更新矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \nabla f(\mathbf{x}_k)$, 并计算由(10)和(11)式确定的 \mathbf{B} 的 a 和 b , 返回第 4 步

3 数值实验

本文将已有的不动点迭代和移位不动迭代与新算法进行比较, 为了方便起见, 分别用 FP, SFP 和 ICA-SFP 表示. 测试的多重线性 PageRank 问题对应的是三阶张量. 迭代次数和运行时间分别用 IT 和 CPU 表示, 初始向量 \mathbf{x}_0 选择为零向量, 取非负传送向量 $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)^T$ 和终止误差 $\varepsilon = 10^{-10}$, 当迭代向量满足

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_1 < \varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots,$$

时, 迭代终止.

本文从佛罗里达大学的稀疏矩阵市场^[20]上随机选取部分测试矩阵, 基于文献[7]中提出的构造方法, 将测试矩阵转化为本文所需的随机矩阵 \mathbf{R} . 测试矩阵的相关信息如表 1, 其中 nnz 表示的是非零元的个数, nnz_r 表示的是每一行非零元的平均个数.

表 1 测试矩阵的相关信息

Table 1 The information of real database

	阶数	nnz	nnz _r		阶数	nnz	nnz _r
can_1054	1 054	12 196	11.6	msc01440	1 440	44 998	31.2
lshp1270	1 270	8 668	6.8	yeast_30NN	1 484	62 350	42.0

在 $\alpha = 0.490$ 的情况下, FP, SFP, 和 ICA-SFP 三种算法的收敛结果显示在表 3 中. 对于 SFP 算法, 移位因子 ω 的取值是经过多次试验后的拟最优选择, 相关数据放于表 2. 对于 ICA-SFP 算法, 取适当间隔 $h = 4$. 结合定理 1, 如果 T 的取值太小, 那么 ICA-SFP 方法的收敛速度可能没有明显提升, 加速效果微乎其微, 但如果 T 的取值太大, 计算因子序列的值会更耗时, 在大规模问题里, ICA-SFP 方法的计算成本会高, 因此根据相应问题的计算量, 本实验的周期 T 选择在 4 到 8 之间, 间隔为 1.

表 2 SFP 迭代的拟最优因子 ω

Table 2 The quasi-optimal factor ω for SFP

	can_1054	lshp1270	msc01440	yeast_30NN
ω	1.52	1.52	1.51	1.44

表 3 当 $\alpha = 0.490$ 时, 几种迭代的收敛结果

Table 3 The convergence results when $\alpha = 0.490$

	can_1054		lshp1270		msc01440		yeast_30NN	
	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
FP	748	17.124 2	748	25.686 1	748	31.791 9	748	39.102 9
SFP	487	11.054 3	487	17.943 3	491	21.056 6	515	24.926 6
ICA-SFP ($T=4$)	336	8.335 3	336	12.003 0	336	15.310 3	336	18.121 2
ICA-SFP ($T=5$)	305	7.476 2	305	11.098 5	305	13.890 8	305	17.013 1
ICA-SFP ($T=6$)	282	6.912 9	282	10.450 9	282	13.037 0	282	15.637 0
ICA-SFP ($T=7$)	266	6.575 9	266	9.598 4	266	12.213 5	266	14.136 0
ICA-SFP ($T=8$)	256	6.292 5	256	9.374 0	264	12.151 1	304	16.030 5

从表 3 可以看出,三种算法都成功收敛到多重线性 PageRank 问题的解. 在五种给定周期下,ICA-SFP 算法的数值表现都优于其它两种算法,随着周期 T 增加,ICA-SFP 算法所需的 IT 和 CPU 均在减少.

4 结论

本文给出了多重线性 PageRank 的切比雪夫加速方法,相关收敛理论分析和数值实验表明该算法具有可行性和有效性. 另外,算法中的周期 T 在一定程度上影响着收敛速度,因此,对周期 T 的最优选择值得继续研究.

致谢:论文在撰写过程中参考了四川农业大学沈照力老师提供的生成随机矩阵 R 的代码,在此表示感谢.

[参考文献]

- [1] GLEICH D F, LIM L H, YU Y. Multilinear PageRank[J]. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 2015, 36(4): 1507–1541.
- [2] LANGVILLE A N, MEYER C D. *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [3] LIU D, LI W, VONG S W. Relaxation methods for solving the tensor equation arising from the higher-order Markov chains[J]. *Numerical linear algebra with applications*, 2019, 26(5): e2260.
- [4] CIPOLLA S, ZAGLIA M R, TUDISCO F. Extrapolation methods for fixed-point multilinear PageRank computations[J]. *Numerical linear algebra with applications*, 2020, 27(2): e2280.
- [5] LAI F, LI W, PENG X, CHEN Y. Anderson accelerated fixed-point iteration for multilinear PageRank[J]. *Numerical linear algebra with applications*, 2023, 30(5): e2499.
- [6] BOUBEKRAOUI M, BENTBIB A H, JBILOU K. Vector Aitken extrapolation method for multilinear PageRank computations[J]. *Journal of applied mathematics and computing*, 2023, 69(1): 1145–1172.
- [7] ZHOU S, WEN C, SHEN Z, CARPENTIERI B. The MFPIO Iteration and the FPMPE method for multilinear PageRank computations[J]. *Journal of computational and applied mathematics*, 2025, 454: 116192.
- [8] BENTBIB A H, BOUBEKRAOUI M, JBILOU K. Extrapolation methods for multilinear PageRank[J]. *Numerical algorithms*, 2024: 1–31.
- [9] MEINI B, POLONI F. Perron-based algorithms for the multilinear pagerank[J]. *Numerical linear algebra with applications*, 2018, 25(6): e2177.
- [10] GUO P, GAO S, GUO X. A modified Newton method for multilinear PageRank[J]. *Taiwanese journal of mathematics*, 2018, 22(5): 1161–1171.
- [11] BUCCI A, POLONI F. A continuation method for computing the multilinear PageRank[J]. *Numerical linear algebra with applications*, 2022, 29(4): e2432.
- [12] CHANG K, ZHANG T. On the uniqueness and non-uniqueness of the positive Z -eigenvector for transition probability tensors[J]. *Journal of mathematical analysis and applications*, 2013, 408(2): 525–540.
- [13] BENSON A R, GLEICH D F. Computing tensor Z -eigenvectors with dynamical systems[J]. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 2019, 40(4): 1311–1324.
- [14] QI L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor[J]. *Journal of symbolic computation*, 2005, 40(6): 1302–1324.
- [15] GOLUB G H, VAN LOAN C F. *Matrix Computations*[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.
- [16] KOSTIĆ V. On general principles of eigenvalue localizations via diagonal dominance[J]. *Advances in computational mathematics*, 2015, 41: 55–75.
- [17] SAUER T. *Numerical analysis*[M]. Pearson Education, Inc, Boston, 2011.
- [18] LORENTZ G G. *Approximation of functions*[M]. Holt, Rine Hart and Winston, New York, 1966.
- [19] YI J, CHAI L, ZHANG J. Average consensus by graph filtering: New approach, explicit convergence rate, and optimal design[J]. *IEEE transactions on automatic control*, 2019, 65(1): 191–206.
- [20] DAVIS T A, HU Y. The University of Florida Sparse Matrix Collection[J]. *ACM transactions on mathematical software*, 2011, 38(1): 1–25.

[责任编辑:陆炳新]