

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.06.002

# 一维广义 Interpolating Aubry-André-Fibonacci 模型中的量子相变

王凤梅, 刘 甲

(山西科技学院通识教育学院, 山西 晋城 048000)

[摘要] 本文主要研究了具有 p 波超导配对的一维广义 Interpolating Aubry-André-Fibonacci 模型中的局域化转变,发现通过调控系统参数会诱导系统发生量子相变. 当化学势接近余弦结构时,系统依次经历了扩展相、中间相和局域相的转变,并给出了相边界的解析解;通过计算平均逆参与率、归一化的平均参与率、分形维度等序参量,并进行标度分析,发现解析结果与数值结果一致,进一步确认系统确实发生了相变;当化学势接近斐波那契结构时,通过计算分形维度、参与率、平均分形维度等序参量,指出系统的相边界发生了非平庸的变化,数值结果和解析结果出现偏离,同时扩展相被抑制,系统出现退局域化现象,中间相增多,且位于带边区域的本征态更容易由局域相进入中间相. 说明可以通过调控系统参数改变化学势结构,进而诱导系统发生量子相变. 这一结论为具有 p 波超导配对的准周期结构中相变的研究提供了新的参考.

[关键词] 量子相变,准周期,广义 Interpolating Aubry-André-Fibonacci 模型,p 波超导,中间相

[中图分类号]O431 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2025)06-0011-09

## Quantum Phase Transition in One Dimension Generalized Interpolating Aubry-André-Fibonacci Model

Wang Fengmei, Liu Jia

(General Education College, Shanxi Institute of Science and Technology, Jincheng 048000, China)

**Abstract:** In this paper, we investigate the localization transition in a one-dimensional lattice described by generalized Interpolating Aubry-André-Fibonacci model with p-wave superconducting pairing. We demonstrate that the quantum phase transition can be induced by tuning the system parameters. Focusing on the case when the chemical potential approaches the cosine structure, the system undergoes transitions sequentially from the extended phase to the intermediate phase, and from the intermediate phase to the localized phase. The analytical solutions of these phase transition boundaries are provided. Further more, by calculating order parameters such as the average inverse participation rate, the normalized average participation rate, the fractal dimension and analyzing the scaling behavior, we find the numerical results are fully coincide with the analytical solutions. Based on the above results, we confirm that the system indeed undergoes the phase transition. However, when the chemical potential is close to the Fibonacci structure, by calculating the fractal dimension, the participation rate, the average fractal dimension and other order parameters, it is observed that non-trivial changes have occurred in the phase boundaries of the system, resulting in deviations between the numerical results and analytical solutions. Especially, the extended phase is suppressed and the system exhibits delocalization transition, which induced the increasing of the intermediate phase. Moreover, our research shows that the eigenstates within the band edge regions are more likely to be driven from the localized phase into an intermediate phase by the tuning of parameters. The conclusion of this paper indicates we can induce the quantum phase transition through changing the potential structure by adjusting the parameters of system. This work provides a new perspective on the study of phase transitions in quasi-periodic structures with p-wave superconducting pairing.

**Key words:** quantum phase transition, quasiperiodic, generalized Interpolating Aubry-André-Fibonacci model, p-wave superconducting pairing, intermediate phase

收稿日期:2025-02-22.

基金项目:国家自然科学基金项目(11547134)、山西省基础研究计划面上项目(202203021211337)、山西科技学院高层次人才科研启动经费项目(2023010,2024010,2024017).

通讯作者:刘甲,硕士,副教授,研究方向:量子输运. E-mail:519033536@qq.com

量子局域化的研究在凝聚态物理中起着重要的作用<sup>[1]</sup>,特别是自 1958 年安德森局域化现象<sup>[2]</sup>的发现以来. 安德森局域化已经在不同的系统中进行了研究<sup>[3]</sup>,结果表明安德森局域现象中的金属绝缘体转变被局限于高维系统中,且存在能量依赖的迁移率边<sup>[4]</sup>,在低维无序系统中并不存在扩展局域相变<sup>[5]</sup>. 然而,近年来人们在一维系统中发现了一种确定化学势的非周期系统,其局域化特征既不同于周期性的系统,又不同于完全无序的随机无序系统,而是介于两者之间<sup>[6]</sup>,因而被称为准周期系统<sup>[7]</sup>,并且在这样的一维系统中观察到了扩展局域相变.

扩展局域相变在一维准周期势系统中的成功实现引起了物理学家们的广泛关注. 人们对各种形式的准周期化学势进行了研究,并在不同的实验平台上得以成功实现,如光子晶体<sup>[8]</sup>、超冷原子<sup>[9]</sup>和腔极化子<sup>[10]</sup>等. Aubry-André 模型<sup>[11]</sup>和斐波那契模型<sup>[12-13]</sup>是最为经典的两种准周期结构,但它们的局域化特征完全不同. Aubry-André 模型<sup>[11]</sup>的化学势由周期为无理数的余弦函数调制,具有自对偶性质,这一性质在一维系统中引发扩展局域相变<sup>[14]</sup>. 当化学势调制强度等于 2 倍的跃迁强度时为扩展局域相变点,当化学势调制强度低于相变点的值时,所有本征态都是扩展的,反之,整体呈现局域化状态. 在相变点所有本征态的波函数都为临界态,这跟准周期结构的长程有序相关. Roati 等<sup>[15]</sup>借助超冷原子技术,精细调控一维双色光晶格的势场,成功地在实验上实现了这一模型,并观察到了理论上预测的局域化特征. 相比于 Aubry-André 模型,斐波那契结构是由两种不同的原子按照 Fibonacci 数列生成的规则排列形成,也称为 Fibonacci 准晶结构<sup>[16-19]</sup>. 其化学势通常为按照 Fibonacci 数列交替出现的固定离散值. Fibonacci 模型对于任意的化学势强度,系统中既没有扩展相也没有局域相,所有的本征态都是临界态. 这一结构在实验方面也引起了关注<sup>[20-21]</sup>. 这两类准周期结构虽然结构不同,但它们都为 Interpolating Aubry-André-Fibonacci (IAAF) 模型的两种极限情况. Goblot 等<sup>[22]</sup>在理论和实验方面均验证了 Interpolating Aubry-André-Fibonacci 模型从 Aubry-André 极限状态向斐波那契极限状态转变的过程. 近年来,人们利用超冷原子费米气体体系和半导体纳米线诱导 p 波配对,将 p 波配对引入准周期系统,由于 p 波配对与准周期势的竞争,以及准周期系统本身的长程关联性,可诱导出丰富的量子态,比如 Wang 等<sup>[23]</sup>在具有 p 波超导配对的一维 Aubry-André 模型中发现系统中出现了临界态,且由 Aubry-André 模型的临界点变成了临界区,与纯相之间有清晰的相边界;古燕等<sup>[24]</sup>在斐波那契结构中引入 p 波超导配对,发现在具有 p 波超导配对的斐波那契模型的系统中拓扑超导相的波函数具有多重分形行为,系统整体进入临界态;Guo<sup>[25]</sup>在具有 p 波超导配对的 IAAF 模型中用数值计算了量子相变,发现系统中出现了多种不同类型的迁移率边. 相比于 Aubry-André 模型和 Fibonacci 模型,具有 p 波超导配对的一维广义 IAAF 模型的相变行为研究相对较少. p 波超导配对究竟如何影响其相变,仍是一个有待深入探讨的问题.

本文主要研究了具有 p 波超导配对的一维广义 IAAF 模型中的量子相变,发现通过调控准周期化学势的参数,可诱导系统发生相变;当化学势接近余弦结构时,系统依次经历了扩展相、临界相和局域相的转变,同时给出了这三种相边界的解析解,得出数值结果和解析结果一致. 当化学势接近斐波那契结构时,相边界被破坏,解析结果出现偏离,扩展相被抑制,系统出现退局域化现象,诱导出更多中间相,且位于带边区域的本征态比位于带心区域的本征态更容易发生去局域化行为.

## 1 理论模型

考虑存在 p 波超导配对的一维准周期系统,其哈密顿量可写为:

$$\hat{H} = -J \sum_i (\hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i + h.c.) + \sum_i V_i \hat{n}_i + \sum_i \Delta (\hat{c}_{i+1} \hat{c}_i + h.c.), \quad (1)$$

其中, $i$  为格点指标, $\hat{c}_i^\dagger$ ( $\hat{c}_i$ ) 为粒子的产生湮灭算符, $J$  为最近邻格点间粒子的跃迁强度,( $J=1$ ) 设为能量单位, $\hat{n}_i$  表示第  $i$  个格点上的粒子数算符, $\Delta$  为 p 波超导配对势,本文计算中取正实数,且文中的所有计算均在周期性边界条件下进行. 准周期格点势能  $V_i$  为

$$V_i = V \tanh[A \cos(2\pi\alpha i + \varphi)] / \tanh A, \quad (2)$$

其中, $\varphi$  为势能相位,为了不失一般性,取  $\varphi=0$ ;  $V$  是准周期势能的调制强度, $\alpha$  为非公度参数. 本文计算中取  $\alpha = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ .  $A$  作为一种调控参数,其取值被限制在  $A \rightarrow 0$  和  $A \rightarrow \infty$  之间的任意值. 由于粒子-空穴对称

性,可以使用博戈留波夫变换将哈密顿量(公式 1)对角化. 引入一组准粒子算符:

$$\hat{\gamma}_n^\dagger = \sum_{i=1}^L [u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i], \quad (3)$$

其中,  $\hat{\gamma}_n^\dagger$  ( $\hat{\gamma}_n$ ) 为博戈留波夫准粒子的产生(湮灭)算符,  $L$  是系统的格点数,  $n$  为能量指标, 利用 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 变换<sup>[26]</sup>将公式 1 对角化后可写为:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^L E_n \left( \hat{\gamma}_n^\dagger \hat{\gamma}_n - \frac{1}{2} \right), \quad (4)$$

其中,  $E_n$  为准粒子的本征能量, 根据准粒子算符与哈密顿量(公式 1)的对易关系可得到 BdG 方程:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中,  $u_n$  和  $v_n$  是系统的本征态波函数. 这里,  $\hat{h}_{ij} = -t(\delta_{j,i-1} + \delta_{j,i+1}) + V_i \delta_{j,i}$ ,  $\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1})$ ,  $u_n^T = (u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,L})$ ,  $v_n^T = (v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,L})$ . 通过求解 BdG 方程(公式 5)可得到准粒子的本征能量  $E_n$  和对应的本征态波函数  $u_n, v_n$ . 当哈密顿量(公式 1)中  $\Delta=0$  时, 系统退化为 Hiramoto 等<sup>[27]</sup>提出的准周期模型. 当  $A$  较小时, 系统中存在扩展局域相变; 当  $A$  足够大时, 相变比较复杂, 系统中存在依赖于  $A$  的迁移率边; 当  $A \rightarrow 0$  时系统退化为 Aubry-André 模型<sup>[11]</sup>. 当  $\Delta \neq 0, A \rightarrow 0$  时,  $V_i$  退化为标准的余弦函数  $V \cos(2\pi\alpha i + \varphi)$ , 此时系统等价于具有  $p$  波超导配对的 Aubry-André 模型, Wang 等<sup>[23]</sup>发现此系统依次经历了由扩展相到临界相的转变, 相变点为  $V=2(J-\Delta)$ , 从临界相到局域相的局域相的转变, 转变点为  $V=2(J+\Delta)$ ; 本文主要讨论  $\Delta \neq 0$  的情况下,  $A$  的取值为  $A \rightarrow 0$  和  $A \rightarrow \infty$  之间的任意值时的相变情况.

通过引入一些序参量可以定量地描述波函数的性质. 本文首先定义可以区分扩展态、临界态和局域态的序参量逆参与率<sup>[28]</sup>和归一化的参与率<sup>[29]</sup>. 对于第  $n$  个 BdG 方程的本征态, 其逆参与率可表示为

$IPR^{(n)} = \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)$ , 本征态满足归一化条件  $\sum_{i=1}^L (u_{n,i}^2 + v_{n,i}^2) = 1$ . 其中  $i$  为第  $n$  个本征态中第  $i$  个元素的指标. 对于扩展态,  $IPR^{(n)} \sim \frac{1}{2L}$ , 热力学极限下,  $IPR^{(n)}$  趋于 0; 若第  $n$  个本征态为局域态,  $IPR^{(n)}$  趋于有限值;

归一化的参与率可定义为  $NPR^{(n)} = [2L \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)]^{-1}$ , 跟逆参与率相反, 若  $NPR^{(n)} \sim \frac{1}{2L}$ , 对应的本征态展示局域特性, 当  $L \rightarrow \infty$  时,  $NPR^{(n)}$  的值趋于 0; 若  $NPR^{(n)}$  为有限值, 对应的本征态展示扩展态的特性. 对于中间态的区域则可以通过归一化的参与率和逆参与率的平均值来判定<sup>[30]</sup>, 其定义如下

$$\langle IPR \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{2L} IPR^{(n)}, \quad (6)$$

$$\langle NPR \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{2L} NPR^{(n)}. \quad (7)$$

对于完全扩展相, 满足  $\langle IPR \rangle \sim \frac{1}{2L}$  且  $\langle NPR \rangle$  的值为有限值; 对于完全局域相, 满足  $\langle NPR \rangle \sim \frac{1}{2L}$  且  $\langle IPR \rangle$  的值为有限值; 若  $\langle NPR \rangle$  和  $\langle IPR \rangle$  的值都是有限值时, 对应于中间相区. 为了更直观地描述系统的相图, 本文引入了可以区分纯相和扩展相的序参量  $\eta$ <sup>[30,25]</sup>, 其定义如下:

$$\eta = \log_{10} [\langle IPR \rangle \times \langle NPR \rangle]. \quad (8)$$

在纯相区(完全局域相或完全扩展相),  $\eta < \log_{10}(-2L)$ ; 在中间相区,  $\log_{10}(-2L) < \eta < 1$ .

对于大尺寸的系统, 可以计算分形维度<sup>[31]</sup>来刻画本征态的局域特性. 对于第  $n$  个本征态, 分形维度可以定义为:

$$T_n = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln IPR^{(n)}}{\ln 2L}. \quad (9)$$

当  $T_n \rightarrow 1$  时, 对应的本征态为扩展态; 当  $T_n \rightarrow 0$  时, 对应的本征态为局域态. 而平均分形维度可以表征整个系统的特性, 可写为:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^L T^{(n)}. \quad (10)$$

当系统为扩展相时,  $\langle T \rangle \rightarrow 1$ ; 当系统为局域相时,  $\langle T \rangle \rightarrow 0$ . 当系统中存在中间相时, 平均分形维度的取值为  $[0, 1]$ .

## 2 结果分析与讨论

### 2.1 相变的研究

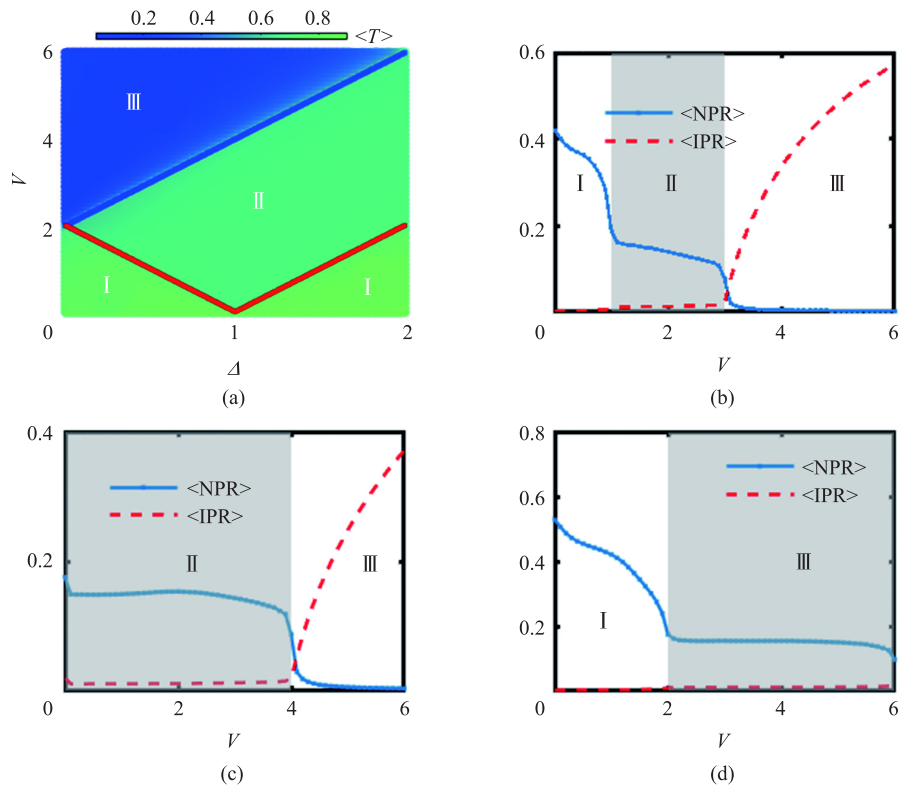
本小节主要讨论  $\Delta \neq 0, A$  有限小时, 系统中的相变情况. 为了确定相边界的位置, 采用文献[22]提供的数学方法对  $A$  极限小时的格点势能进行近似处理, 并根据对偶性进行计算<sup>[23]</sup>. 得到扩展相到临界相的相变点为:

$$V_c = \frac{2|J-\Delta|}{\left(1 + \frac{1}{6}A^2\right)}. \quad (11)$$

由临界相到局域相的相变点为:

$$V_c = \frac{2|J+\Delta|}{\left(1 + \frac{1}{6}A^2\right)}. \quad (12)$$

为了验证上述结论, 本文在周期性边界条件下, 通过数值求解 BdG 方程(公式 5), 计算了相关序参量. 图 1(a) 给出了平均分形维度  $\langle T \rangle$  对  $(V, \Delta)$  的相图, 以  $\langle T \rangle$  的大小为填充颜色. 这里,  $\alpha = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, L = 377, A = 0.05$ . 由图上结果可知系统有三个不同的相区, 由不同深度的颜色分开, I 区为扩展相, II 区为中间相,



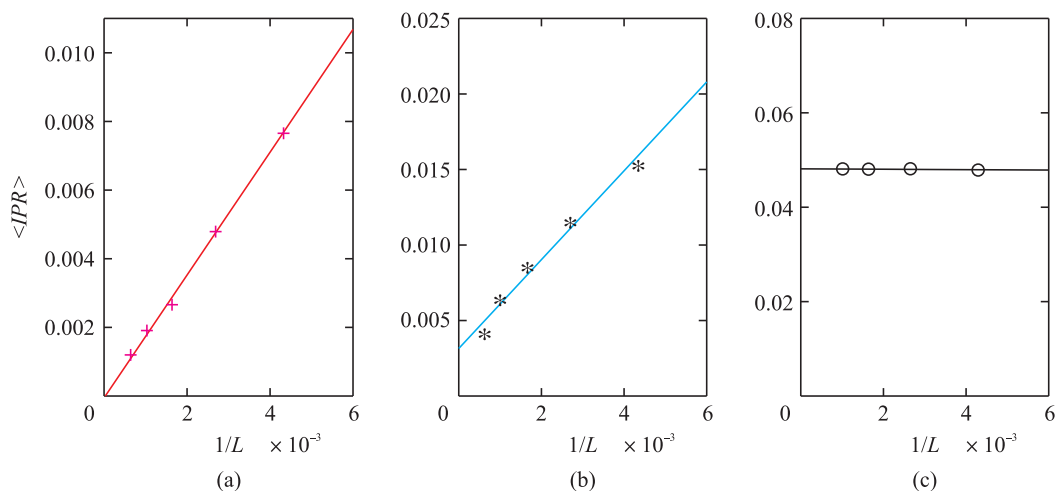
(b)  $\Delta = 0.5$ ; (c)  $\Delta = 1$ ; (d)  $\Delta = 2$ ; ( $L = 377, A = 0.05$ ).

图 1 (a) 平均分形维度  $\langle T \rangle$  对  $(V, \Delta)$  的相图 (蓝色线为中间相到局域相的解析相变点, 红色线为扩展相到局域相的解析相变点); (b) (c) (d)  $\langle IPR \rangle$  和  $\langle NPR \rangle$  随无序强度  $V$  的变化.

Fig. 1 (a) Phase diagram of the average fractal dimension  $\langle T \rangle$  versus  $(V, \Delta)$  (the blue line represents the analytical solution of the transition point between the intermediate and localized phase while the red line represents the analytical solution of the transition point between the extend and intermediate phase). (b) (c) (d)  $\langle IPR \rangle$  and  $\langle NPR \rangle$  as a function of the modulation strength  $V$ .

III 区为局域相. 蓝色的线为中间相和局域相的解析结果,红色的线为扩展相和中间相的解析结果. 说明在  $A$  有限小时,系统存在由参数  $(V, \Delta)$  诱导的相变,且数值结果和解析结果一致. 这是本小节的重要结论. 为了验证这个结论,图(b)(c)(d)分别展示了不同区域的  $\langle NPR \rangle$  和  $\langle IPR \rangle$  随无序强度  $V$  的变化. 灰色标记的区域为中间相区. 图(b)中  $\Delta=0.5$  时,有两条相边界把系统分为三个相区,其中  $V_{c1} \approx 1$  为扩展相和中间相的相变点,  $V_{c2} \approx 3$  为中间相和局域相的相变点;图(c)中  $\Delta=1$  时,系统有一条相边界对应一个相变点  $V_c \approx 4$ ,把系统分为中间相和局域相两个相区;图(d)中  $\Delta=2$  时,系统有一条相边界对应一个相变点  $V_c \approx 2$ ,把系统分为扩展相和中间相两个相区;这与图 1(a)的结论相吻合,说明结论是正确的.

为了进一步验证不同相区的扩展局域特性,在不同的区域任选一点,在对应格点数为斐波纳数列的项做标度分析,其中  $L = F_n = 233, 377, 610, 987, 1597$ . 图 2(a)是在 I 区中任取  $\Delta=0.2, V=1.0$  时的  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  的变化,红色“+”是计算结果,实线为拟合结果,  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  呈线性变化,可以看到在  $L \rightarrow \infty, \langle IPR \rangle \rightarrow 0$ , 展示扩展态的特征,表明该区确实为扩展相区;图 2(b)是在 II 区中任取  $\Delta=1, V=2$  时的  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  的变化曲线,蓝色“\*”为计算结果,实线为拟合结果,  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  线性增加,且  $\lim_{L \rightarrow \infty} \langle IPR \rangle \approx 0.0031$ , 是明显远小于局域相的有限值,展示中间相的特征,说明该区域确实是中间相;图 2(c)是在 III 区中任取  $\Delta=0.5, V=5.0$  时的  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  的变化曲线,黑色“o”为计算结果,实线为拟合结果,  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  的变化方程为  $\langle IPR \rangle = -0.438L^{-1} + 0.4818$ , 呈线性变化,在  $L \rightarrow \infty$  时,  $\langle IPR \rangle \rightarrow 0.4818$  为一有限值,对应区域的本征态为局域态,表明该区确实为局域相区. 通过标度分析,说明相变跟图 1 的结论一致.



(a)  $\Delta=0.2, V=1.0$ ; (b)  $\Delta=1, V=2$ ; (c)  $\Delta=0.5, V=5.0 (A=0.05)$

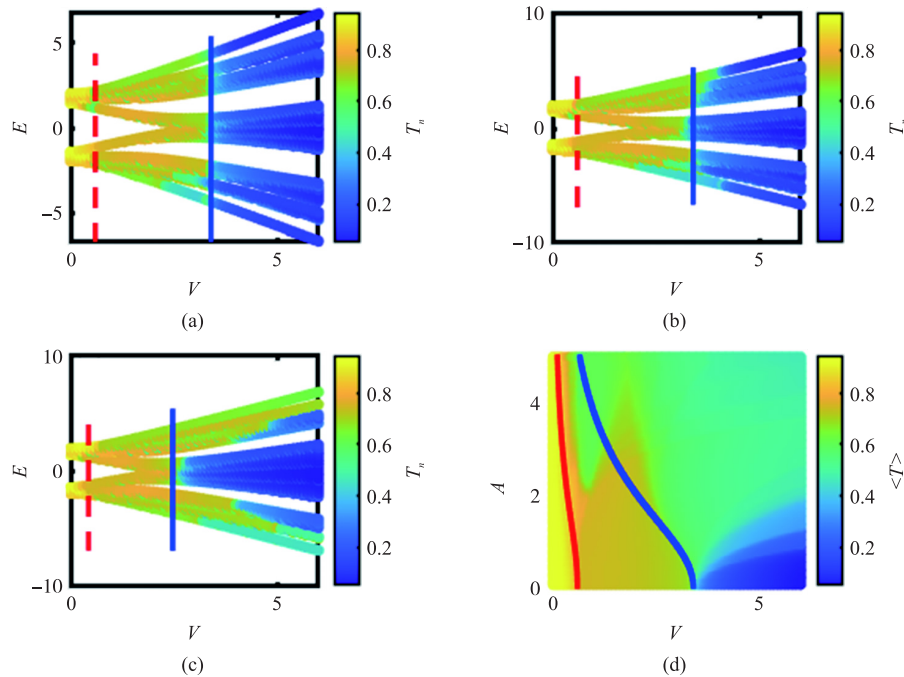
图 2  $\langle IPR \rangle$  随  $\frac{1}{L}$  的变化

Fig. 2  $\langle IPR \rangle$  as a function of  $\frac{1}{L}$

## 2.2 中间相的特征

系统从一个相区过渡到另一个相区时,可能经历扩展态、局域态、临界态中的两种或者三种状态共存的中间相区,平均分形维度无法确定不同的中间相区,为此需要计算系统中每个本征态的分形维度进行区分. 图 3(a)(b)(c)展示了  $\Delta=0.7, L=377$  时分形维度  $T_n$  随本征能量  $E$  和准周期化学势调制强度  $V$  的变化. 黄色区域为扩展相区,蓝色区域为局域相,混合颜色标记的彩色区域为中间相区;红色虚线和蓝色实线分别为扩展相与临界相、临界相与局域相相边界的解析结果. 图 3(a)中  $A=0.05$  时,数值相边界和解析结果一致;图 3(b)中  $A=0.5$  时,相边界的数值结果和解析结果都有了微小的偏离,局域相区的部分本征态发生了向临界态的转变. 图 3(c)中  $A=1.5$  时,局域相区靠近带边的本征态发生了由局域态向临界态

的转变,导致系统只剩下扩展相和中间相的相边界,相边界的数值结果和解析结果有了较大的偏离. 为了进一步观察参数  $A$  有限小时对局域化的影响,图 3(d) 给出了平均分形维度  $\langle T \rangle$  随参数  $A$  和  $V$  的变化. 红色虚线和蓝色实线为相边界的解析结果. 在  $A$  有限小的极限下,数值结果和解析结果一致,随着参数  $A$  的增大,扩展区逐渐变窄,而局域区的本征态很快转变为临界态,数值结果与解析结果偏离越来越大,说明有限小范围内,参数  $A$  的增大更容易导致系统发生去局域化行为,诱导出更多临界态.



(a)  $A=0.05$ ; (b)  $A=0.5$ ; (c)  $A=1.5$ ; (d) 平均分形维度  $\langle T \rangle$  随参数  $A$  和无序强度  $V$  的变化 ( $\Delta=0.7, L=377$ ).

图 3 分形维度  $T_n$  作为本正能量  $E$  和无序强度  $V$  的函数

Fig. 3 The fractal dimension  $T_n$  as a function of the energy spectrum  $E$  and the modulation strength  $V$

为了验证图 3 中的结论,图 4 给出了  $\Delta=0.7, V=4$  时不同区域的本征态对应 IPR 随参数  $A$  的变化. 图 4(a) 是带边第 750 个本征态,在  $A \rightarrow 0$  时为局域态,随着  $A$  的增大,在  $A$  较小时便转变为临界态,图 4(b) 是带心第 383 个本征态,在  $A \rightarrow 0$  时为局域态,随着  $A$  的增大,局域行为发生了变化,但依然是局域态,并没有发生转变,说明位于带边的本征态更容易发生去局域化转变.

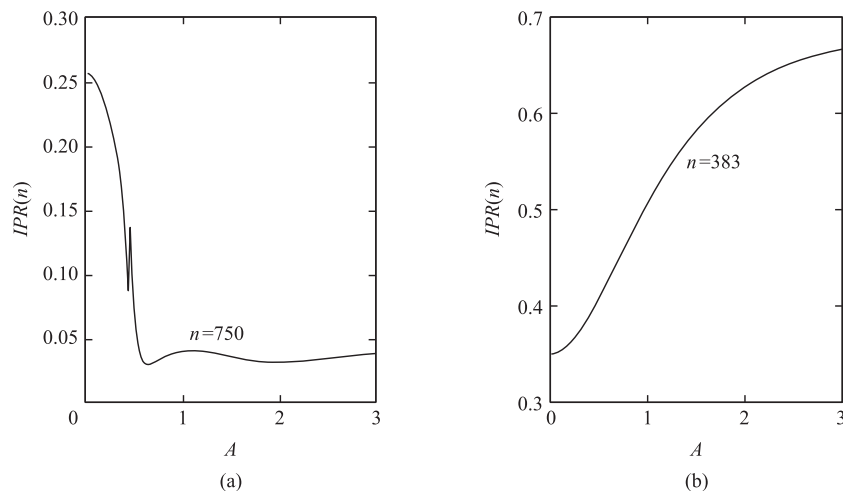


图 4 本征态的  $IPR^{(n)}$  随参数  $A$  的变化,对应的能级指标为 (a)  $n=750$  (b)  $n=383$  ( $\Delta=0.7, V=4, L=377$ ).

Fig. 4 The inverse participation rate  $IPR^{(n)}$  varies with the parameter  $A$  and the corresponding energy level indices

(a)  $n=750$  (b)  $n=383$  ( $\Delta=0.7, V=4, L=377$ ).

为了更加精细地刻画中间相的性质,图 5(a)给出了  $\Delta=0.7, V=4, A=1.5$  时系统中所有本征态的分形维度  $T_n$  在不同的系统尺寸下随归一化能级指标  $n/2L$  的变化. 图 5 中系统被分成了三个区域:I 区和 III 区  $T_n$  趋于有限值,对应临界区,位于带边区域,II 区  $T_n$  的值趋于 0,对应局域区,位于带心区域;图 5(b)进一步计算了平均分形维度  $\langle T \rangle$  随  $1/\log(2L)$  的变化,在热力学极限下,I 区和 III 区对应的  $\langle T \rangle$  均趋近于有限值,证明对应区域为临界相区,II 区的  $\langle T \rangle$  趋近于 0,证明对应的状态为局域相区. 在  $A=0.05$  时,这部分本征态均为局域态,说明随着参数  $A$  的增大,带边区域确实发生了去局域化行为,导致中间相增加,而带心仍保持局域态,说明参数  $A$  在同一值下,带边确实更容易发生去局域化行为.

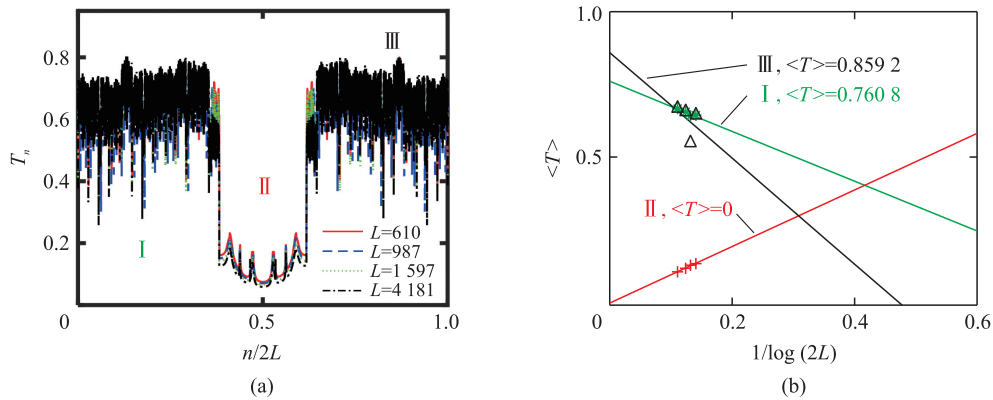


图 5 (a) 分形维度  $T_n$  随归一化能级指标  $\frac{n}{2L}$  的变化;(b) 平均分形维度  $\langle T \rangle$  随  $\frac{1}{\log(2L)}$  的变化( $\Delta=0.7, V=4, A=1.5$ ).

Fig. 5 (a) The fractal dimension  $T_n$  varies with the normalized index of energy  $\frac{n}{2L}$ ; (b) The average fractal

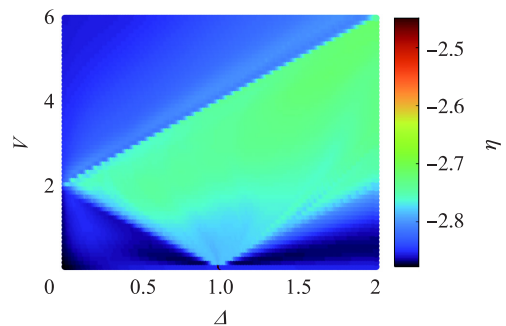
dimension  $\langle T \rangle$  as a function of  $\frac{1}{\log(2L)}$  ( $\Delta=0.7, V=4, A=1.5$ ).

### 2.3 局域相图

为了能够把中间相和纯相区分开来,图 6 给出  $\Delta-V$  的平面相图,以  $\eta$  的大小为填充颜色. 该图包含两个区域,两部分蓝色区域为纯相区,对应图 1(a)中的 I 区和 III 区,绿色部分为中间相区,对应图 1(a)中的 II 区. 这与前面的结论完全吻合. 说明  $A$  较小时,系统中确实存在依赖于系统参数的量子相变.

### 2.4 参数 $A$ 引起的相变

前面讨论了参数  $A$  较小时的相变,参数  $A$  较大时系统的局域情况又与哪些参数有关,本小节就这一问题进行讨论. 图 7 给出了参数  $A$  不同时,准周期化学势的部分分布图和平均分形维度  $\langle T \rangle$  对  $(V, \Delta)$  的相图,以  $\langle T \rangle$  的大小为填充颜色. 黄色为扩展相区,蓝色为局域相区,混合颜色对应中间相区. 图 7(a)(b)中的蓝色实线和红色实线分别为临界相和局域相、扩展相和临界相的解析相边界. 这里,  $\alpha = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, L=377$ . 从图中可以看出系统的相变同样依赖于超导配对势和化学势调制强度. 其中图 7(a)中  $A=0.5$  时,系统有三种相且相边界非常清晰,只是与解析相边界有一些偏离;(b)图中  $A=5$  和(c)图中  $A=50$  时,纯相逐渐减少,中间相区明显增加,相边界不规则,与解析相边界偏离较大;(d)图中  $A=500$  时,完全局域相几乎全部消失. 说明参数  $A$  的增大会导致中间相的增加. 对比图(e)  $A=0.5$  时,其化学势分布类似于 Aubry-André 模型的化学势和(f)  $A=5$ , (g)  $A=50$ , (h)  $A=500$  时随着  $A$  的增大,其化学势分布逐渐接近于斐波那契替换规则从  $\pm 1$  值切换的化学势,在准周期调制强度  $V$  较小时,随着参数  $A$  的增加,临界区对扩展区产生了抑制作用,导致图 3 中的扩展区越来越窄;在准周期调制强度  $V$  较大时,随着参数  $A$  的增加,诱导系统发生去局域化行为,从而诱导出更多临界态.

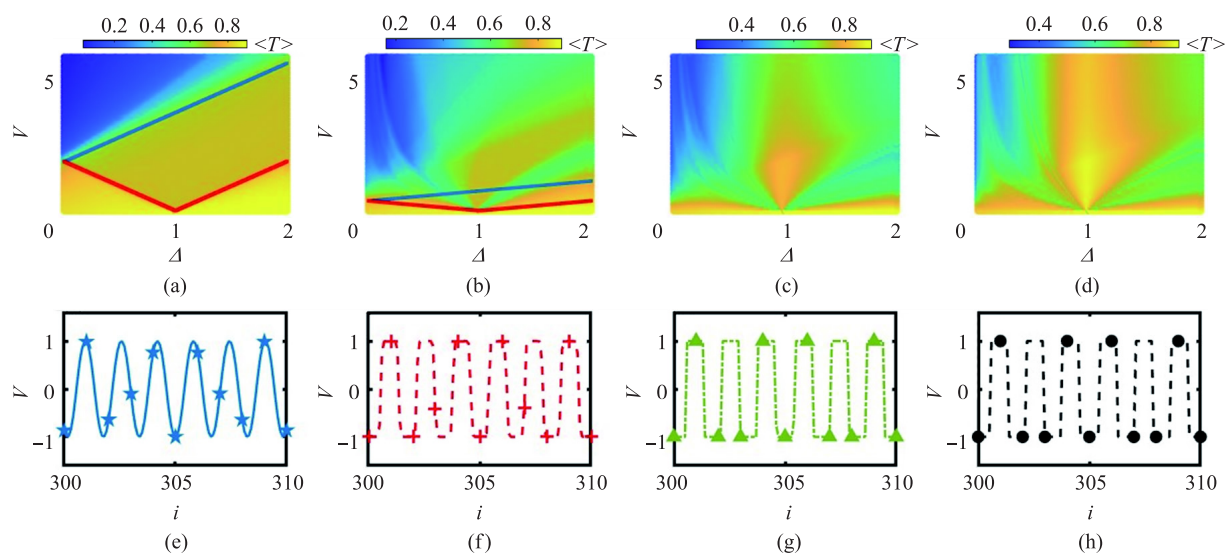


蓝色为中间相,绿色为纯相( $A=0.05, L=377$ ).

图 6 以  $\eta$  的大小为填充颜色的  $\Delta-V$  平面局域相图

Fig. 6 Localization phase diagram in  $\Delta-V$  plane, colored by the magnitude of  $\eta$

边界. 这里,  $\alpha = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, L=377$ . 从图中可以看出系统的相变同样依赖于超导配对势和化学势调制强度. 其中图 7(a)中  $A=0.5$  时,系统有三种相且相边界非常清晰,只是与解析相边界有一些偏离;(b)图中  $A=5$  和(c)图中  $A=50$  时,纯相逐渐减少,中间相区明显增加,相边界不规则,与解析相边界偏离较大;(d)图中  $A=500$  时,完全局域相几乎全部消失. 说明参数  $A$  的增大会导致中间相的增加. 对比图(e)  $A=0.5$  时,其化学势分布类似于 Aubry-André 模型的化学势和(f)  $A=5$ , (g)  $A=50$ , (h)  $A=500$  时随着  $A$  的增大,其化学势分布逐渐接近于斐波那契替换规则从  $\pm 1$  值切换的化学势,在准周期调制强度  $V$  较小时,随着参数  $A$  的增加,临界区对扩展区产生了抑制作用,导致图 3 中的扩展区越来越窄;在准周期调制强度  $V$  较大时,随着参数  $A$  的增加,诱导系统发生去局域化行为,从而诱导出更多临界态.



(a) (e)  $A=0.5$ ; (b) (f)  $A=5$ ; (c) (g)  $A=50$ ; (d) (h)  $A=500 (L=377)$ .

图 7 (a) (b) (c) (d) 平均分形维度  $\langle T \rangle$  对  $(V, \Delta)$  的相图; (e) (f) (g) (h) 化学势分布  
Fig. 7 (a) (b) (c) (d) Phase diagram of the average fractal dimension  $\langle T \rangle$  versus  $(V, \Delta)$   
and (e) (f) (g) (h) the chemical potential distribution

### 3 结论

本文主要研究了具有 p 波超导配对的一维广义 Interpolating Aubry-André-Fibonacci 模型中的局域化相变,发现通过调控系统参数会诱导系统发生量子相变. 当准周期化学势中的参数  $A \rightarrow 0$  时,化学势接近余弦结构,系统依次经历了扩展相、中间相和局域相的转变,利用泰勒展开和对偶性对系统进行处理,进一步给出了参数  $A$  在有限范围内时相边界的解析解;通过计算平均逆参与率、归一化的平均参与率、分形维度等序参量,并分析序参量的标度变化,发现解析与数值结果一致,进一步确认系统确实发生了量子相变;随着准周期化学势中的参数  $A$  的增大,化学势逐渐接近斐波那结构,通过计算分形维度、参与率、平均分形维度等序参量,系统中的相边界发生非平庸的改变,数值结果和解析结果出现偏离,扩展相被中间相所抑制,并且带边首先出现了退局域化行为,从而诱导出更多的中间相. 说明可以通过调控系统参数改变化学势结构,进而诱导系统发生量子相变. 这一结论对具有 p 波超导配对的准周期结构中相变的研究具有重要意义.

#### [ 参考文献 ]

[ 1 ] LEE P A, RAMAKRISHNAN T V. Disordered electronic systems[J]. Reviews of modern physics, 1985, 57(2) : 287-337.  
 [ 2 ] ANDERSON P. W. Absence of diffusion in certain random lattices[J]. Physical review, 1958, 109(3) : 1492-1505.  
 [ 3 ] LAHINI Y, BROMBERG Y, CHRISTODOULIDES D N, et al. Quantum correlations in two-particle Anderson localization [J]. Physical review letters, 2010, 105(16) : 163905.  
 [ 4 ] LIU Y B, ZHANG W Y, YI T C, et al. Quantum criticality of generalized Aubry-André models with exact mobility edges using fidelity susceptibility[J]. Physical review E, 2024, 109(5) : 054123.  
 [ 5 ] THOULESS D J. Electrons in disordered systems and the theory of localization[J]. Physics reports, 1974, 13(3) : 93-142.  
 [ 6 ] SHECHTMAN D, BLECH I, GRATIAS D. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry [J]. Physical review letters, 1984, 53(20) : 1951-1953.  
 [ 7 ] SARMA D S, KOBAYASHI A, PRANG R E. Proposed experimental realization of anderson localization in random and incommensurate artificially layered systems[J]. Physical review letters, 1986, 56(12) : 1280-1283.  
 [ 8 ] YU S, QIU W C, CHONG Y, et al. Engineered disorder in photonics[J]. Nature reviews materials, 2021, 6(3) : 226-243.  
 [ 9 ] SEMEGHINI G, LANDINI M, CASTILHO P, et al. Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization[J]. Nature physics, 2015, 11(7) : 554-559.

- [10] NI X, CHEN K, WEINER M, et al. Observation of Hofstadter butterfly and topological edge states in reconfigurable quasiperiodic acoustic crystals[J]. *Communications physics*, 2019, 2(1):55–60.
- [11] AUBRY, ANDRÉ S. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices[J]. *Annals of Israel Physics Society*, 1980, 3(18):133–164.
- [12] KOHMOTO M, KADANOF L P, TANG C. Localization problem in one dimension: mapping and escape[J]. *Physical review letters*, 1983, 50(23):1870–1872.
- [13] OSTLUND S, PANDIT R, RAND D, et al. One-dimensional Schrödinger equation with an almost periodic potential[J]. *Physical review letters*, 1983, 50(23):1873–1876.
- [14] SINHA A, RAMS M M, DZIARMAGA J. Kibble-Zurek mechanism with a single particle: dynamics of the localization-delocalization transition in the Aubry-André model[J]. *Physical review B*, 2019, 99(9):094203.
- [15] ROATI G, ERRICO D, FALLANI L, et al. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate[J]. *Nature*, 2008, 453(7197):895–898.
- [16] JAGANNATHAN A. The Fibonacci quasicrystal: case study of hidden dimensions and multifractality[J]. *Reviews of modern physics*, 2021, 93(4):045001.
- [17] KRAUS Y E, ZILBERBERG O. Topological equivalence between the Fibonacci quasicrystal and the Harper model[J]. *Physical review letters*, 2012, 109(11):116404.
- [18] DOMÍNGUEZ-ADAME F. Eigenvalues of non-Hermitian Fibonacci Hamiltonians[J]. *Physica B: condensed matter*, 2001, 307(4):247–250.
- [19] MACÉ N, JAGANNATHAN A, KALUGIN P, et al. Critical eigenstates and their properties in one- and two-dimensional quasicrystals[J]. *Physical review B*, 2017, 96(5):045138.
- [20] BABOUX F, LEVY E, LEMAÎTRE A, et al. Measuring topological invariants from generalized edge states in polaritonic quasicrystals[J]. *Physical review B*, 2017, 95(16):161114.
- [21] REISNER M, TAHMI Y, PIÉCHON F, et al. Experimental observation of multifractality in Fibonacci chains[J]. *Physical review B*, 2023, 108(6):064210.
- [22] GOBLOT V, ŠTRKALJ A, PERNE N, et al. Emergence of criticality through a cascade of delocalization transitions in quasiperiodic chains[J]. *Nature physics*, 2020, 16(8):832–836.
- [23] WANG J, LIU X J, GAO X L, et al. Phase diagram of a non-Abelian Aubry-André-Harper model with p-wave superfluidity[J]. *Physical review B*, 2016, 93(10):104504.
- [24] 古燕, 王智鹏, 陆展鹏. 准晶势调制的一维 p 波超导体中的拓扑量子相变[J]. *物理学报*, 2025, 74(10):42–50.
- [25] GUO C. Multiple intermediate phases in the interpolating Aubry-André-Fibonacci models[J]. *Physical review B*, 2024, 109(17):174203.
- [26] HEMMEN J L V. A note on the diagonalization of quadratic boson and fermion Hamiltonians[J]. *Zeitschrift für Physik B condensed matter*, 1980, 38(3):271–277.
- [27] HIRAMOTO H, KOHMOTO M. New localization in a quasiperiodic system[J]. *Physical review letters*, 1989, 62(23):2714–2717.
- [28] SZYNISZEWSKI M. Unscrambling of single-particle wave functions in systems localized through disorder and monitoring[J]. *Physical review B*, 2024, 110(2):4303–4315.
- [29] WANG Y C, XU X, ZHANG L, et al. One-dimensional quasiperiodic mosaic lattice with exact mobility edges[J]. *Physical review letters*, 2020, 125(19):196604.
- [30] DAI Q, LU Z P, XU Z H. Emergence of multifractality through cascade-like transitions in a mosaic interpolating Aubry-André-Fibonacci chain[J]. *Physical review B*, 2023, 108(14):144207.
- [31] CALLUM W D. Critical states and anomalous mobility edges two-dimensional diagonal quasicrystals[J]. *Physical review B*, 2024, 109(1):014210.

[责任编辑:杜忆忱]