doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2026.01.001

# 整系数多项式$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$的不可约性研究

赵飞燕

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 本文研究了整系数多项式$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$在有理数域上的不可约性. 通过分析在整点上的取值性质,得到了当$n$为奇数且$n\geqslant 9$时,对所有的素数$p$,该多项式在有理数域上均不可约;当$n$为偶数且$n\geqslant 10$时,若素数$p<(n/2)!-1$,则该多项式在有理数域上不可约.

[关键词] 整系数多项式,有理数域,不可约,抽屉原理

[中图分类号]O174.14 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2026)01-0001-04

# On the Irreducibility of Integral Coefficient Polynomial $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$

Zhao Feiyan

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract**: This paper investigates the irreducibility of the integral coefficient polynomial $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$ over the rational number field. We have the conclusion that when $n$ is odd and $n\geqslant 9$, for all prime numbers $p$, the polynomial is irreducible in the rational number field; when $n$ is even and $n\geqslant 10$, if the prime number $p<(n/2)!-1$, then the polynomial is irreducible.

**Key words**: integral coefficient polynomial, rational number field, irreducible, Pigeon Hole Principle

1908 年,Schur[1]提出了形如

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm 1$$

的整系数多项式在有理数域上是否可约的问题(这里$a_1,a_2,\cdots,a_n$为两两不同的整数,全文中都默认此假设). 1909 年,Westlund[2]和 Flügel[3]分别独立地解决了这个问题. 国内许多高等代数教材中也都把此问题作为习题或例题给出:

**性质 1**[4] 整系数多项式$\Phi_{-1}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$在有理数域上不可约.

**性质 2**[4] 对整系数多项式$\Phi_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$,

(1)当$n$是奇数时,$\Phi_1(x)$在有理数域上不可约;

(2)当$n$是偶数且$n\geqslant 6$时,$\Phi_1(x)$在有理数域上不可约.

特别地,当$n=2$和 4 时,Flügel[3]给出了$\Phi_1(x)$可约时的充要条件为

$$\Phi_1(x)=(x-c)(x-c+2)+1=(x+c-1)^2$$

和
$$\Phi_1(x)=(x-c)(x-c+1)(x-c+2)(x-c+3)+1=((x+c)^2-3(x+c)+1)^2,$$

其中$c$为任意整数.

Schur 问题的解决自然地引发我们对整系数多项式

$$\Phi_{\pm p}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$$

收稿日期:2024-10-07.

基金项目:南京师范大学高等代数融合型课程项目.

通讯作者:赵飞燕,副教授,研究方向:代数组合. E-mail:alinazhao@njnu.edu.cn

的不可约性进行研究,其中 $p$ 为素数.

Pólya[5] 证明了当 $n\geqslant 17$ 且 $n$ 为奇数时,对任意的素数 $p$, $\Phi_{\pm p}(x)$ 在有理数域上不可约. 1933 年, Dorwart 和 Ore[6] 进一步证明了,当 $n\geqslant 11$ 且 $n$ 为奇数时,对任意的素数 $p$, $\Phi_{\pm p}(x)$ 在有理数域上不可约;当 $n$ 为偶数时, $\Phi_{\pm p}(x)$ 只可能有两个次数相同的因式. 本文的主要目的是对 Dorwart 和 Ore 的结果进行进一步改进与细化,得到了如下的结论.

**定理**　当 $n\geqslant 9$ 时,对整系数多项式 $\Phi_{\pm p}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\pm p$,

(1)若 $n$ 是奇数,则对任意的素数 $p$, $\Phi_{\pm p}(x)$ 在有理数域上不可约;

(2)若 $n$ 是偶数且 $p<(n/2)!-1$,则 $\Phi_{\pm p}(x)$ 在有理数域上不可约.

对整系数多项式不可约性的判别进行研究一直是高等代数的一个重要问题,本文仅仅讨论了一类特殊的多项式的不可约性. 对于其他特殊类型的多项式的不可约性结果可见文献[7-8].

## 1　主要引理

整系数多项式在不同整数下的取值对多项式的不可约性有很强的影响,张萍[9] 和王月明[10] 分别证明了下面的事实:

**引理 1**[9]　设整系数多项式 $f(x)$ 在 5 个不同整数处的取值为 $\pm1$,则 $f(x)$ 在这些整数处必全取 1 或者全取 $-1$.

**引理 2**[10]　设整系数多项式 $f(x)$ 在 6 个不同整数处的取值为 $\pm2$,则 $f(x)$ 在这些整数处必全取 2 或者全取 $-2$.

在此基础上,对于一般的素数,我们也可以得到:

**引理 3**　设 $p$ 是素数,若整系数多项式 $f(x)$ 在 6 个不同的整数处取值为 $\pm p$,则 $f(x)$ 在这些整数处必全取 $p$ 或者全取 $-p$.

**证明**　当 $p=2$ 时,由引理 2,结论成立;下面假设 $p\geqslant 3$.

若结论不成立,则存在 6 个不同整数,不妨设为 $a_1,a_2,\cdots,a_6$,满足

$$f(a_i)=p,\quad f(a_j)=-p,\quad a_i\neq a_j,1\leqslant i,j\leqslant 6.$$

**情况 1**　$f(x)$ 在 5 个点处取值为 $p$,1 个点处取值为 $-p$. 不妨设 $f(a_i)=p$, $1\leqslant i\leqslant 5$. 则 $f(x)$ 的形式为

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)g(x)+p,$$

其中, $g(x)$ 为整系数多项式. 由 $f(a_6)=-p$,得

$$(a_6-a_1)(a_6-a_2)(a_6-a_3)(a_6-a_4)(a_6-a_5)g(a_6)=-2p. \tag{1}$$

因为 $a_6-a_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 是两两不同的整数, $g(a_6)$ 为整数,而 $-2p=2\cdot p\cdot 1\cdot(-1)$ 至多只能分解成 4 个不同的整数的乘积,与(1)的形式矛盾,从而 $f(a_6)\neq -p$. 故情况 1 不存在.

**情况 2**　$f(x)$ 在 4 个点处取值为 $p$,2 个点处取值为 $-p$. 不妨设 $f(a_i)=p$, $1\leqslant i\leqslant 4$,且 $a_1<a_2<a_3<a_4$. 则 $f(x)$ 的形式为

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)g(x)+p,$$

其中, $g(x)$ 为整系数多项式. 由 $f(a_5)=f(a_6)=-p$,得

$$\begin{cases}(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)g(a_5)=-2p\\(a_6-a_1)(a_6-a_2)(a_6-a_3)(a_6-a_4)g(a_6)=-2p\end{cases}.$$

即 $-2p$ 可以分解成两组 5 个整数的乘积,且每组中至少含有 4 个不同整数. 进一步,若这 4 个不同整数按从大到小,从左往右的顺序排的话,它们的差均相同,分别是 $a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3$. 考虑 $-2p$ 的所有满足以上条件的分解,总共有以下 4 种.

**表 1　$-2p$ 的含 4 个不同整数的分解**

**Table 1　The decomposition of $-2p$ involves four distinct integers**

| $-2p$ 的包含 4 个不同整数的分解形式 | 前 4 个不同整数的差 | $-2p$ 的包含 4 个不同整数的分解形式 | 前 4 个不同整数的差 |
|---|---|---|---|
| $p\cdot2\cdot1\cdot(-1)\cdot1$ | $p-2,1,2$ | $2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-p)\cdot(-1)$ | $1,2,p-1$ |
| $p\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)$ | $p-1,2,1$ | $1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-p)\cdot1$ | $2,1,p-2$ |

这 4 种形式中存在有前 4 个数差相等的两组分解当且仅当 $p=2$ 或 4. 因为 $p\geqslant 3$,且为素数,所以情况 2

不存在.

**情况 3** $f(x)$在 3 个点处取值为$p$,3 个点处取$-p$. 不妨设$f(a_i)=p$,$1\leqslant i\leqslant 3$,且$a_1<a_2<a_3$. 则$f(x)$的形式为

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)g(x)+p,$$

其中,$g(x)$为整系数多项式. 由$f(a_4)=f(a_5)=f(a_6)=-p$,得

$$\begin{cases}(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)g(a_4)=-2p\\(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)g(a_5)=-2p.\\(a_6-a_1)(a_6-a_2)(a_6-a_3)g(a_6)=-2p\end{cases}$$

即$-2p$可以分解成 3 组 4 个整数的乘积,且每组中至少含有 3 个不同整数. 进一步,若这 3 个不同整数按从大到小,从左往右的顺序排的话,它们的差均相同,分别是$a_2-a_1$,$a_3-a_2$. 考虑$-2p$所有满足以上条件的分解,总共有以下 10 种.

**表 2　$-2p$ 的含 3 个不同整数的分解**

**Table 2　The decomposition of $-2p$ involves three distinct integers**

| $-2p$ 的包含 3 个不同整数的分解形式 | 前 3 个不同整数的差 | $-2p$ 的包含 3 个不同整数的分解形式 | 前 3 个不同整数的差 |
|---|---|---|---|
| $2p\cdot1\cdot(-1)\cdot1$ | $2p-1,2$ | $2\cdot1\cdot(-p)\cdot1$ | $1,p+1$ |
| $p\cdot2\cdot1\cdot(-1)$ | $p-2,1$ | $2\cdot(-1)\cdot(-p)\cdot(-1)$ | $3,p-1$ |
| $p\cdot2\cdot(-1)\cdot1$ | $p-2,3$ | $1\cdot(-2)\cdot(-p)\cdot(-1)$ | $3,p-2$ |
| $p\cdot1\cdot(-2)\cdot1$ | $p-1,3$ | $1\cdot(-1)\cdot(-2p)\cdot(-1)$ | $2,2p-1$ |
| $p\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)$ | $p+1,1$ | $(-1)\cdot(-2)\cdot(-p)\cdot1$ | $1,p-2$ |

但这 10 种形式中,对任意素数$p$,不存在有前 3 个数的差相等的 3 组分解,所以情况 3 不成立.

**情况 4** $f(x)$在 2 个点处取值为$p$,4 个点处取$-p$,证明过程与情况 2 类似,可得此情况不成立;

**情况 5** $f(x)$在 1 个点处取值为$p$,5 个点处取$-p$,证明过程与情况 1 类似,可得此情况不成立.

排除这 5 种情况,则$f(x)$在这些整数处必全取$p$或者全取$-p$.

## 2 定理证明

为了证明的方便,我们令

$$\Phi_p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+p,\Phi_{-p}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-p.$$

由于$\Phi_p(x)$与$\Phi_{-p}(x)$的不可约性的证明过程完全类似,以下我们仅对$\Phi_p(x)$进行证明.

反设$\Phi_p(x)$在有理数域上可约,则存在整系数多项式$g(x)$,$h(x)$,使得

$$\Phi_p(x)=g(x)h(x),\text{且 }1\leqslant\deg g(x),\deg h(x)<n.$$

由此得

$$\Phi_p(a_i)=g(a_i)h(a_i)=p,1\leqslant i\leqslant n.$$

因为$g(a_i)$,$h(a_i)$均为整数,$p$为素数,所以$g(a_i),h(a_i)\in\{\pm1,\pm p\}$,　$1\leqslant i\leqslant n$.

由抽屉原理,$g(x)$和$h(x)$中总有一个多项式,满足在$n$个整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$中,至少有$\lceil n/2\rceil$个数上的取值为$\pm1$. 不妨设$g(a_j)=\pm1$,$j=1,2,\cdots,\lceil n/2\rceil$.

因为$n\geqslant9$,所以$\lceil n/2\rceil\geqslant5$. 由引理 1,$g(x)$在至少 5 个不同整数处的取值为$\pm1$,则$g(a_j)$要么全取 1,要么全取$-1$.不妨设$g(a_j)=1$,$j=1,2,\cdots,\lceil n/2\rceil$. 则此时$h(a_j)=p$,$j=1,2,\cdots,\lceil n/2\rceil$. 因为

$$(x-a_j)\mid g(x)-1,\quad (x-a_j)\mid h(x)-p,\quad 1\leqslant j\leqslant\lceil n/2\rceil,$$

且$a_1,a_2,\cdots,a_{\lceil n/2\rceil}$两两不同,知$g(x)$和$h(x)$的次数都至少是$\lceil n/2\rceil$.

当$n$为奇数时,$\lceil n/2\rceil+\lceil n/2\rceil>n$,这与$g(x)$和$h(x)$的次数和为$n$矛盾,所以$\Phi_p(x)$在有理数域上不可约.

当$n=2k$为偶数时,$\lceil n/2\rceil+\lceil n/2\rceil=2k$,由于$g(x)$和$h(x)$的次数和为$2k$,所以$g(x)$和$h(x)$的次数相同,且都为$k$.

若$k\geqslant6$. 因为$g(a_i),h(a_i)\in\{\pm1,\pm p\}$,　$1\leqslant i\leqslant 2k$,则$g(x)$和$h(x)$中总有一个多项式,满足在$a_1$,$a_2,\cdots,a_{2k}$这$2k$个整数中至少有$k$个数上的取值为$\pm p$. 由引理 3 可知,该多项式在这$k$个点处只能全取$p$

或全取$-p$. 不妨设 $g(a_j)=p, j=1,2,\cdots,k$. 又因为 $\deg g(x)=k$,所以

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)+p, \tag{2}$$

任取 $b\in\{a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{2k}\}$,则 $g(b)=\pm1$. 因为 $k\geqslant6$,由引理 1,$g(b)$要么全取 1,要么全取$-1$. 所以有

$$g(x)=(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\cdots(x-a_{2k})\pm1, \tag{3}$$

(2)-(3)得

$$(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\cdots(x-a_{2k})-(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)=p+1 \text{ 或 } p-1.$$

若 $k=5$. 则 $g(x)$和 $h(x)$中总有一个多项式,满足在 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$这 10 个整数中至少在 5 个数上的取值为$\pm1$. 由引理 1 可知,该多项式在这 5 个点处只能全取 1 或全取$-1$. 不妨设 $g(a_j)=-1, j=6,7,\cdots,10$. 因为 $g(a_i)h(a_i)=p, 1\leqslant i\leqslant10$,则 $h(a_j)=-p, j=6,7,\cdots,10$. 所以

$$g(x)=(x-a_6)(x-a_7)\cdots(x-a_{10})-1, \tag{4}$$

$$h(x)=(x-a_6)(x-a_7)\cdots(x-a_{10})-p, \tag{5}$$

任取 $b\in\{a_1,a_2,\cdots,a_5\}$,则 $g(b)=\pm p$.

若存在 $b\in\{a_1,a_2,\cdots,a_5\}$,使得 $g(b)=-p$,则 $h(b)=-1$.

由(4)式得,

$$(b-a_6)(b-a_7)\cdots(b-a_{10})-1=-p,$$

由(5)式得,

$$(b-a_6)(b-a_7)\cdots(b-a_{10})-p=-1,$$

因为 $p\neq1$,所以上面两个式子不可能同时成立,从而 $g(b)$只能全取 $p$.所以

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_5)+p, \tag{6}$$

(6)-(4)得

$$(x-a_6)(x-a_7)\cdots(x-a_{10})-(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_5)=p+1.$$

综合以上两种 $k$ 的取值,可得对 $k\geqslant5$ 均有

$$(x-a_{k+1})(x-a_{k+2})\cdots(x-a_{2k})-(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)=\pm(p+1)\text{或}\pm(p-1). \tag{7}$$

令 $c=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{2k}\}$,代入(7)式,得

$$|p+1|\text{或}|p-1|=|(c-a_j)(c-a_{j+1})\cdots(c-a_{j+k-1})|, j=1 \text{ 或 } k+1, \tag{8}$$

因为 $c-a_j,c-a_{j+1},\cdots,c-a_{j+k-1}$是两两不同的正整数,所以

$$|(c-a_j)(c-a_{j+1})\cdots(c-a_{j+k-1})|\geqslant1\cdot2\cdot3\cdots\cdot k=k!.$$

由已知条件 $k!>p+1$,这与(8)式矛盾,所以 $\Phi_p(x)$在有理数域上不可约.

当 $n=10$ 时,$(10/2)!=120$,由定理,若素数 $p\leqslant113$. 则 $\Phi_{\pm p}(x)$在有理数域上不可约.

## [参考文献]


[1] Schur I. Problem 226[J]. Archiv der Mathematik Und Physik,1908,13(3):367.

[2] Westlund J. On the irreducibility of certain polynomials[J]. American Mathematical Monthly,1909,16:66-67.

[3] Flügel W. Solution to problem 226[J]. Archiv der Mathematik Und Physik,1909,15:271.

[4] 丘维声. 高等代数(下册)——大学高等代数课程创新教材[M]. 北京:清华大学出版社,2010.

[5] Pólya G. Verschiedene bemerkungen zur zahlentheorie[J]. Jahresbericht der Deutschem Mathematiker-Vereinigung,1919,28:31-40.

[6] Dorwart H L,Ore O. Criteria for the irreducibility of polynomials[J]. Annals of Mathematics,1933,34:81-94.

[7] Győry K,Hajdu L,Tijdeman R. Irreducibility criteria of schur-type and pólya-type[J]. Monatshefte für Mathematik,2011,163:415-443.

[8] Jinda A,Khanduja S. An extension of Schur's irreducibility result[J]. Journal of Algebra,2025,664:398-409.

[9] 张萍. 关于±1 在多项式不可约性中的应用[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2017,42(03):34-38.

[10] 王月明. 关于整系数多项式不可约性的思考[J]. 南京工程学院学报(自然科学版),2018,16(02):79-82.


[责任编辑:陆炳新]