

doi:10.3963/j.issn.1001-487X.2022.03.004

## 平面 P 波入射具有不完美界面圆形夹塞的 动态响应特性\*

陶明,姚靖,李夕兵

(中南大学资源与安全工程学院,长沙 410083)

**摘要:** 夹塞与介质的交界面并非总是完美界面,即位移应力在边界上并非是连续且相等的,入射 P 波在不完美界面发生的动态响应与在完美界面的动态响应有所差别。为了研究平面 P 波在具有不完美界面夹塞上的动应力响应情况,引入弹簧模型作为不完美界面模型,该界面模型假定为厚度无穷小且无惯性的弹性粘结层。利用波函数展开法计算平面 P 波入射时不完美界面周边的动应力集中因子。分析了弹簧模型的重要参数弹簧刚度对动应力集中因子的影响。计算结果表明:弹簧刚度对低波数时的动态响应有明显影响,而随着波数的增大这种影响会逐渐减弱,同时在高波数时能观察到共振散射现象。采用常见的地震波子波—雷克子波作为瞬态扰动波形,基于稳态结果利用 Fourier 变换得到瞬态波入射时不同弹簧刚度条件下的瞬态响应。瞬态 DSCF 变化情况与稳态条件下相似,但是幅值有所增加。另外,雷克子波的主频与瞬态 DSCF 成负相关。

**关键词:** 平面 P 波; 圆柱形夹塞; 不完美界面; 瞬态 P 波散射; 动应力集中因子

中图分类号: TD235.3 文献标识码: A 文章编号: 1001-487X(2022)03-0025-08

## Dynamic Response Characteristics of Circular Inclusion with Imperfect Interface under Plane P-wave Incident

TAO Ming, YAO Jing, LI Xi-bing

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** The interface between the inclusion and the medium is not always perfect. That is, the displacement and stress are not continuous and equal on the boundary. The dynamic response of an incident P wave at an imperfect interface is different from the that of a perfect interface. A spring model is introduced as the imperfect interface model to calculate the dynamic response of the inclusion with an imperfect interface under the plane P wave incident. This interface model is assumed to be an elastic adhesive layer with an infinitesimal thickness and no inertia. Moreover, the wave function expansion method is used to calculate the dynamic stress concentration factor around the imperfect interface under the plane P wave incident and analyze the influence of spring stiffness, an important parameter of spring model, on the dynamic stress concentration factor. The results show that the spring stiffness has an obvious effect on the dynamic response with a low wave number, and this effect will gradually weaken with the increase of the wave number. At the same time, the resonance scattering phenomenon can be observed at a high wave number. The Ricker wavelet, a common seismic wavelet, is used as the transient disturbance waveform. Based on the steady-state results, the transient responses under different values of spring stiffness are obtained by Fourier transform. The distribution of the transient DSCF is similar to that under the steady-state conditions, but the amplitude has increased. In addition, the dominant frequency of the Ricker wavelet is negatively correlated with the transient DSCF.

**Key words:** plane P wave; circular inclusion; imperfect interface; transient P-wave scattering; dynamic stress concentration factor

在采矿、交通、国防等诸多领域,常常遇到地下构筑物遭受动态扰动而发生损害的问题<sup>[1]</sup>。扰动的来源既有人为因素也有自然因素,例如钻爆法产生的爆破震动、地震产生的地震波等。这些扰动在地下岩层中以应力波的形式传播,当波遇到不连续面的时候,波的传播状态发生改变并且发生散射。研究表明动态扰动在不连续界面发生散射并引起动应力集中是造成地下构筑物破坏的重要原因<sup>[2]</sup>。

应力波在传播过程中遇到结构或材料的不连续处将产生应力波的散射,应力集中现象最早由 Rankine 于 1843 年发现。1962 年鲍亦兴利用波函数展开法研究稳态波入射无限弹性薄板中圆孔的动应力集中问题<sup>[3]</sup>。刘殿魁等将弹性力学中求解空洞周边静应力集中问题的复变函数论方法推广到 SH 波入射空洞导致动应力集中问题<sup>[4]</sup>,给出了逼近任意形状孔洞的稳态弹性动力学问题的完备函数序列“域函数”及边界条件的一般表达式。Li, et al 用复变函数法求解了瞬态 P 波作用下浅埋圆形空腔周围的动应力集中情况<sup>[5]</sup>,给出了空腔深度、入射角和波峰位置对动应力集中因子(DSCF)分布的影响。赵春香等研究了 SH 波入射作用下半空间界面圆孔的动力响应<sup>[6]</sup>,给出了该问题的解析解和动应力分布规律。陈涛等研究了板的横截面处孔洞在平面 P 波入射下动应力集中问题<sup>[7]</sup>,并得出自由表面距孔洞距离影响动应力集中。除了圆形截面的散射体外,陈志刚等研究了平面 SH 波在弹性半空间中浅埋椭圆形孔洞上的散射<sup>[8]</sup>,结果表明浅埋孔洞与水平表面存在强烈的相互作用并产生动应力集中。Ghafarollahi, et al 基于多极展开法分析了 SH 波以任意角度入射到椭圆形截面空腔或裂缝时的反平面散射问题<sup>[9]</sup>,结果表明入射波数、入射波角、空腔到双材料界面的距离等参数对围岩的动力响应有显著的影响。Tao, et al 采用波函数展开法求解了 SH 波作用下的全平面椭圆空腔周围的散射和动应力集中问题<sup>[10]</sup>,结果表明:入射波、波数、和椭圆轴比对动应力集中有较大影响。

脱胎于实际工程中的波散射问题,边界更加复杂。Lee 等人利用大圆弧假定方法求解了半平面空间中衬砌隧道在 P 波和 SV 波作用下的动力响应<sup>[11,12]</sup>,易长平等人使用波动函数展开法来分析衬砌隧道周边在平面波和圆柱波作用下的动力响

应<sup>[12]</sup>。结果表明:衬砌结构刚度的增加将导致隧道围岩的 DSCF 减小。袁晓铭采用波函数展开方法给出了半空间中圆形夹塞物对平面 SH 波散射的封闭解析解<sup>[13]</sup>。Trifunac 研究了在入射平面 SH 波的情况下<sup>[14]</sup>,半圆柱形冲积河谷内及其周围地表运动的性质,并且分析了波入射角度对表面振动特性的影响。刘中宪等基于 Biot 理论<sup>[15]</sup>,采用间接边界积分方程法,研究流体饱和半空间中夹塞物对平面 SV 波的二维散射。张鸿等采用饱和土 Biot 理论分析了地震 P 波作用下饱和土体中圆形隧洞衬砌的动力响应问题<sup>[16]</sup>。何颖等采用波函数展开法及边界离散的方法给出了任意断面形状的地下夹塞对平面 SH 波散射的半解析解<sup>[17]</sup>。杨在林等采用 Green 函数,复变函数和多极坐标等方法研究了圆形夹塞和裂纹组合对 SH 波的散射与地震动<sup>[18]</sup>,讨论各种参数对夹塞上方地表位移的影响。张海等根据弹性波动理论,结合分区和契合思想<sup>[19]</sup>,利用傅里叶级数展开法,由连续性条件和自由地表边界条件,求得了凸起地形中衬砌隧道对 SH 波散射的解析解。齐辉等对稳态 SH (shear horizontal) 导波在表面含有多个半圆柱形凹陷的弹性带形介质内的散射问题进行了研究<sup>[20]</sup>,并给出了解析解。

在以往的研究中,夹塞与介质的交界面被认为是完美界面,也就是说位移和应力在界面处保持连续,这在一定情况下是合理的。但是更多情况下,因为裂隙或者是脱胶的原因,界面出现缺陷变为不完美界面。此时,继续假设位移和应力在交界面连续是不合理的。因此引入弹簧模型来表征不完美界面,并且分析不完美界面以及入射波波数对 P 波入射夹塞动态响应的影响。

## 1 控制方程

对于动荷载作用下圆柱形夹塞的动态响应,可以将问题简化为平面应力问题。考虑无限均匀弹性介质中有一个无限长圆柱体夹塞,夹塞中心位于  $o$  处,如图 1。弹性波在传播方向上遇到圆形夹塞,会在夹塞周围发生散射和透射。散射波与入射波在夹塞周边介质中叠加造成夹塞周边动应力集中。以圆形夹塞中心为原点建立极坐标系  $(r, \theta)$ , P 波入射方向为  $x +$  方向。

在不考虑体力及自由传播情况下,标量波动方程以及入射波表达式见式(1)和式(2)

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - c_p^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

$$u^{(i)} = u_0 e^{i\alpha x \cos \theta} e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中: $\varphi$  为 P 波的势函数; $\lambda$  和  $\mu$  分别为 lame

收稿日期:2022-05-19

作者简介:陶明(1982-),男,博士、教授、博士生导师,主要从事岩石动力方面的研究工作,(E-mail)mingtao@csu.edu.cn。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12072376)

常数;  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  即为 P 波波速;  $\omega$  为波的圆频率;  $\alpha = \sqrt{\omega/c_p}$  为压缩波的矢量波数。

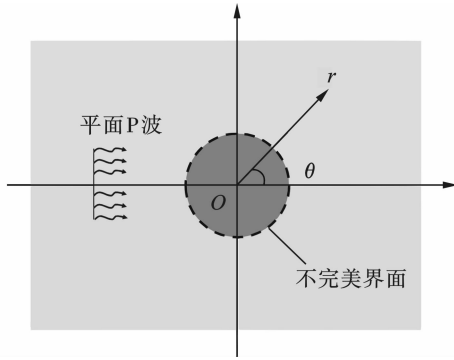


图 1 几何模型

Fig. 1 Geometric model

平面 P 波入射并且在圆形夹塞周边发生散射, 向介质反射 P 波和 S 波, 同时, 在夹塞中产生驻波。利用 Fourier 级数将入射波表达式(2)进行展开后根据 Bessel 函数的积分定义有

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\alpha r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$\text{式中, } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2, n=2, 3, \dots \end{cases}$$

介质中的散射 P 波、S 波位移势函数分别表示为

$$\varphi^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (4)$$

$$\psi^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \sin n\theta e^{-i\omega t} \quad (5)$$

式中:  $A_n$  和  $B_n$  为未知系数;  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  分别为介质中的 P 波波数和 S 波波数。弹性夹塞中的驻波分别可以表示为

$$\varphi^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(\alpha_2 r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (6)$$

$$\psi^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(\beta_2 r) \sin n\theta e^{-i\omega t} \quad (7)$$

式中:  $C_n$  和  $D_n$  为未知系数;  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  分别为夹塞中的 P 波波数和 S 波波数。将所有波的分量相加, 得到介质中总波场

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi^{(r)} + \varphi^{(c)} \\ \psi_1 = \psi^{(r)} \end{cases} \quad (8)$$

以及夹塞中波场

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi^{(c)} \\ \psi_2 = \psi^{(c)} \end{cases} \quad (9)$$

## 2 边界条件

大多数情况下, 考虑波入射夹塞发生散射问题时, 假设介质与夹塞交界面为完美界面是合理的。

但是在某些情况下, 交界面的连接键并不是完全固定和刚性的, 而是具有明显的粘弹性<sup>[21]</sup>。这种不完美界面条件假设在介质和夹塞之间有一层厚度无穷小的无惯性粘弹性层。不完美界面的无惯性表明交界面处的应力连续, 粘弹性表明剪切应力与法向应力和各自位移成正比<sup>[22]</sup>, 表达式如下

$$\begin{cases} \sigma_{rr1} = k_r(u_{r1} - u_{r2}) \\ \sigma_{r\theta1} = k_\theta(u_{\theta1} - u_{\theta2}) \\ \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2} \\ \sigma_{r\theta1} = \sigma_{r\theta2} \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $k_r$  和  $k_\theta$  分别为法向弹簧系数和切向弹簧系数, 而下标 1 和 2 分别代表介质和夹塞中的参数。

当  $k_r \rightarrow +\infty$  和  $k_\theta \rightarrow +\infty$  时, 界面处的法向位移和切向位移可以看作是连续的, 弹簧模型接近于一个完美的结合界面。对于  $k_r \rightarrow +\infty$  和  $k_\theta \rightarrow 0$ , 相当于无摩擦的完美滑移。对于  $k_r \rightarrow 0$  和  $k_\theta \rightarrow 0$ , 也就意味着没有波从岩体传输到夹塞。

## 3 介质和夹塞中的应力和位移

介质中的应力表达式

$$\begin{cases} \sigma_{rr1} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n i^n \varphi_0 \varepsilon_{11}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \varepsilon_{11}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \varepsilon_{12}^{(3)}(\beta_1 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t} \\ \sigma_{r\theta1} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \varepsilon_n i^n \varepsilon_{41}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \varepsilon_{41}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \varepsilon_{42}^{(3)}(\beta_1 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t} \\ \sigma_{\theta\theta1} = 2\mu_1 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \varepsilon_n i^n \varepsilon_{21}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \varepsilon_{21}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \varepsilon_{22}^{(3)}(\beta_1 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (11)$$

介质中的位移表达式

$$\begin{cases} u_{r1} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \varepsilon_n i^n \varepsilon_{71}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \varepsilon_{71}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \varepsilon_{72}^{(3)}(\beta_1 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t} \\ u_{\theta1} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \varepsilon_n i^n \varepsilon_{81}^{(1)}(\alpha_1 r) + A_n \varepsilon_{81}^{(3)}(\alpha_1 r) + B_n \varepsilon_{82}^{(3)}(\beta_1 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (12)$$

弹性夹塞中的应力表达式

$$\begin{cases} \sigma_{rr2} = 2\mu_2 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \varepsilon_{11}^{(1)}(\alpha_2 r) + D_n \varepsilon_{12}^{(1)}(\beta_2 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t} \\ \sigma_{r\theta2} = 2\mu_2 r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \varepsilon_{41}^{(1)}(\alpha_2 r) + D_n \varepsilon_{42}^{(1)}(\beta_2 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (13)$$

弹性夹塞中的位移表达式

$$\begin{cases} u_{r2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \varepsilon_{71}^{(1)}(\alpha_2 r) + \\ D_n \varepsilon_{72}^{(1)}(\beta_2 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t} \\ u_{\theta 2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \varepsilon_{81}^{(1)}(\alpha_2 r) + \\ D_n \varepsilon_{82}^{(1)}(\beta_2 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\varepsilon_{11}^{(1)}$ 、 $\varepsilon_{11}^{(3)}$ 、 $\varepsilon_{22}^{(3)}$ 、 $\dots$  是各种波对应力做出的

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} E_{11}^{(3)}(\alpha_1) & \tilde{\mu} E_{12}^{(3)}(\beta_1) & -E_{11}^{(1)}(\alpha_2) & -E_{12}^{(1)}(\beta_2) \\ \tilde{\mu} E_{41}^{(3)}(\alpha_1) & \tilde{\mu} E_{42}^{(3)}(\beta_1) & -E_{41}^{(1)}(\alpha_2) & -E_{42}^{(1)}(\beta_2) \\ E_{71}^{(3)}(\alpha_1) - \frac{2\mu_1}{rk_r} E_{11}^{(3)}(\alpha_1) & E_{72}^{(3)}(\beta_1) - \frac{2\mu_1}{rk_r} E_{12}^{(3)}(\beta_1) & -E_{71}^{(1)}(\alpha_2) & -E_{72}^{(1)}(\beta_2) \\ E_{81}^{(3)}(\alpha_1) - \frac{2\mu_1}{rk_\theta} E_{41}^{(3)}(\alpha_1) & E_{82}^{(3)}(\beta_1) - \frac{2\mu_1}{rk_\theta} E_{42}^{(3)}(\beta_1) & -E_{81}^{(1)}(\alpha_2) & -E_{82}^{(1)}(\beta_2) \end{bmatrix}$$

式中:  $E_{11}^{(1)}(\alpha_1)$  代表  $\varepsilon_{11}^{(1)}(\alpha_1 r)$  在  $r=a$  处的值;  $a$  为圆形夹塞的半径;  $\tilde{\mu}$  为介质与夹塞的剪切弹模之比。利用计算机编程求解  $A_n$ 、 $B_n$  两个系数。

在没有不连续体的情况下,波在介质中自由传播导致的应力可以表示为

$$\sigma_{\theta\theta} = -\alpha^2(\lambda + 2\mu)\varphi_0 \quad (15)$$

根据应力表达式(11)和式(15)可以求得稳态应力集中因子

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} = \left\{ \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\} / -\alpha^2(\lambda + 2\mu) \quad (16)$$

## 4 稳态响应分析

动应力集中因子(DSCF)是评判动应力集中的重要标准。研究问题是不完美界面条件下波入射夹塞的动态响应,给出不完美界面条件下的DSCF。计算波在夹塞处的动态响应还需给出具体的材料参数,比如岩石材料,假设参数为:介质与夹塞剪切弹性模量之比为2.5,介质与夹塞波速度之比为1.5,介质与夹塞泊松比分别为  $\nu_1 = 0.20$ ,  $\nu_2 = 0.25$ 。为了计算更加简便,取  $k_r$  与  $k_\theta$  的值为  $m_0\mu_1/a$ ,  $m_0$  为指定常数。已有的研究表明夹塞周围切向应力远大于径向应力,因此下面仅讨论切向DSCF。

稳态DSCF计算结果如图2所示,为了得到不完美界面对DSCF的影响,分别给出了当  $k_r, k_\theta \rightarrow +\infty$ ,  $k_r = k_\theta = 10.0\mu_1/a$ ,  $k_r = k_\theta = 1.0\mu_1/a$ ,  $k_r = k_\theta = 0.1\mu_1/a$  时夹塞周边DSCF分布,其中弹簧刚度趋近  $+\infty$  代表界面为完美边界条件。图2(a)显示无量纲波数为0.25,此时弹簧刚度对DSCF的影响十分

贡献见附录;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别是介质中和弹性夹塞中的剪切弹性模量。

将得到的应力和位移表达式(11)、(12)、(14)代入边界连续条(10),得到求解系数  $A_n$ 、 $B_n$ 、 $C_n$ 、 $D_n$  的联立方程组,用矩阵表示为

$$QM^T = P^T$$

式中:  $Q$  为矩阵;  $M$ 、 $P$  为向量。

明显,当  $k_r = k_\theta = 0.1\mu_1/a$  时DSCF峰值出现在  $\theta = \pi/2$  为4.045,是完美界面DSCF峰值2.624的1.54倍。随着波数的增大,弹簧刚度对DSCF分布的影响变小。

当弹簧刚度越趋近于  $+\infty$ ,即边界越趋近完美边界,计算所得DSCF的峰值和分布形状越完美边界时的峰值和分布形状。这也说明了计算的正确性。图2(d)可以观察到DSCF在夹塞周围出现了多处峰值,也说明高波数时波向各个方向散射的能量变的更多,这种共振散射现象在Rajabi和Hasheminejad文章中有记录<sup>[23]</sup>。

图3为不同弹簧刚度条件下,界面不同位置的DSCF随波数变化图像。DSCF最大值出现在界面  $\theta = \pi/2$  位置,此时的无量纲波数为0.25,并且弹簧刚度对DSCF的影响很明显。随着波数增大,不同弹簧刚度条件下的DSCF都有下降的趋势,并最终趋于1。从图3(d)观察到在  $\theta = \pi$  位置,无量纲波数为2.25时,出现较大的负值,表明此时有较大的切向拉应力在迎波面产生。

最后,分析弹簧刚度和波数共同作用时夹塞周边DSCF最大值的变化,如图4。随波数增大DSCF最大值有减小的趋势。当弹簧刚度比较大时,DSCF最大值随波数呈现波浪式起伏,而在连接键刚度变弱后,这种起伏随之变弱。

## 5 瞬态响应分析

爆破或者地震引起的地震波具有明确起始时间也不是周期性的,与稳态波相比有一定的差别。在分析了稳态波入射作用下的散射和动应力集中问题后,进一步求出瞬态波入射作用下的散射和动应力

集中。

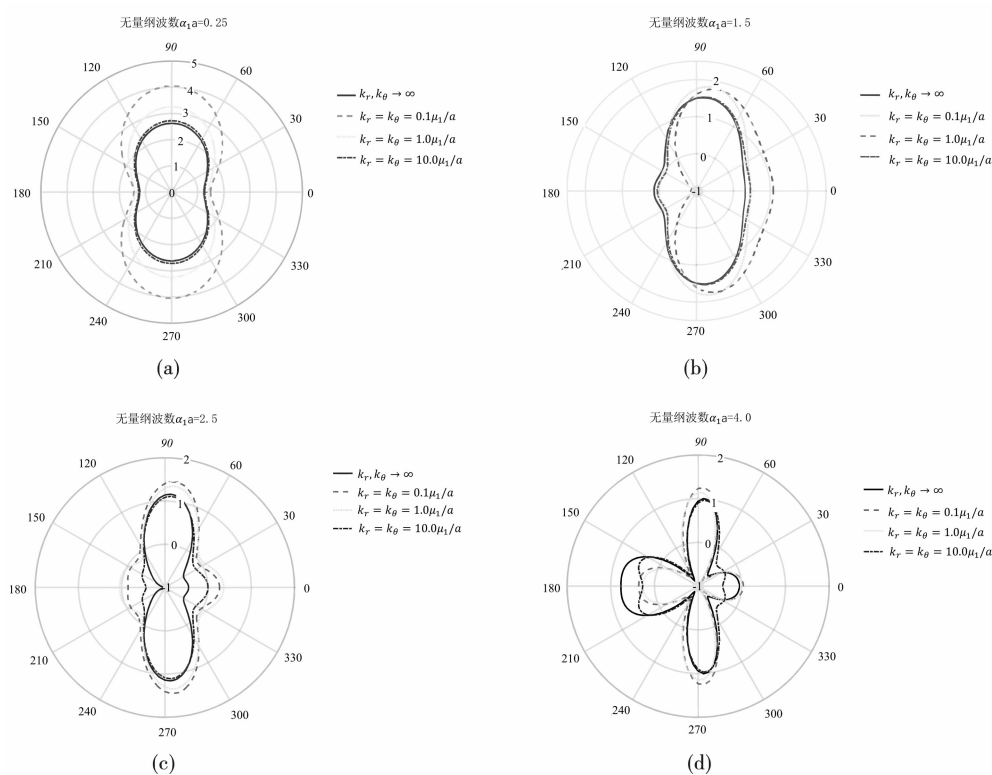


图 2 不同弹簧刚度情况下,夹塞周边 DSCF 分布

Fig. 2 Distribution of DSCF around the inclusion with different values of spring stiffness

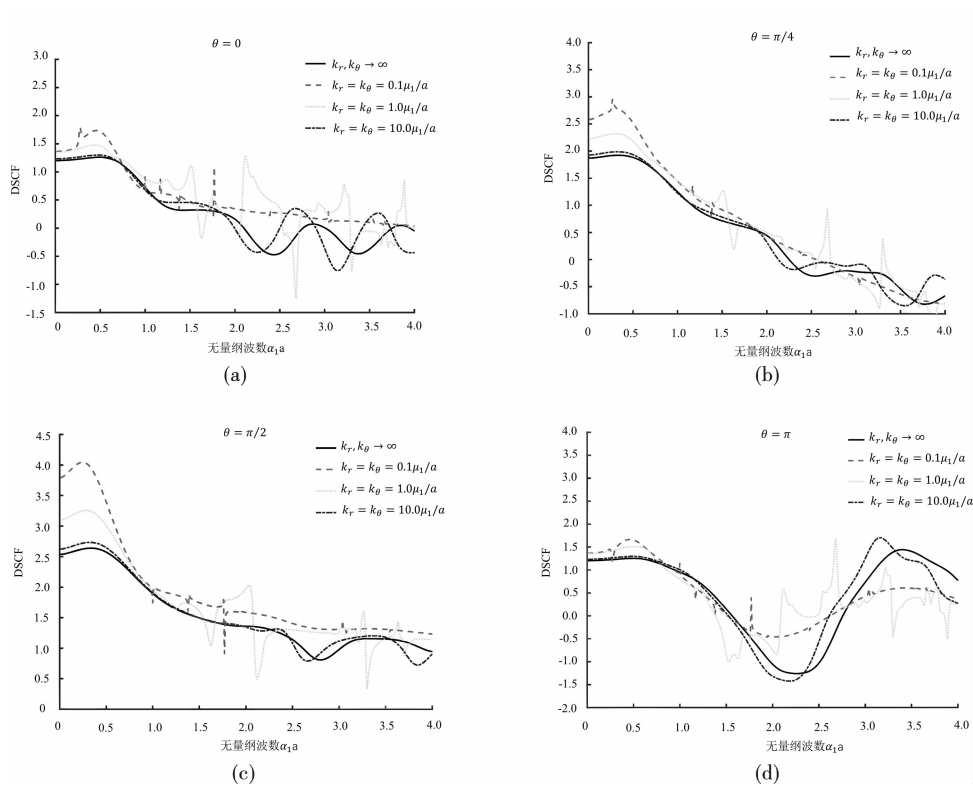


图 3 不同波数时圆夹塞周边 DSCF 分布

Fig. 3 Distribution of DSCF around the circular inclusion with different wave numbers

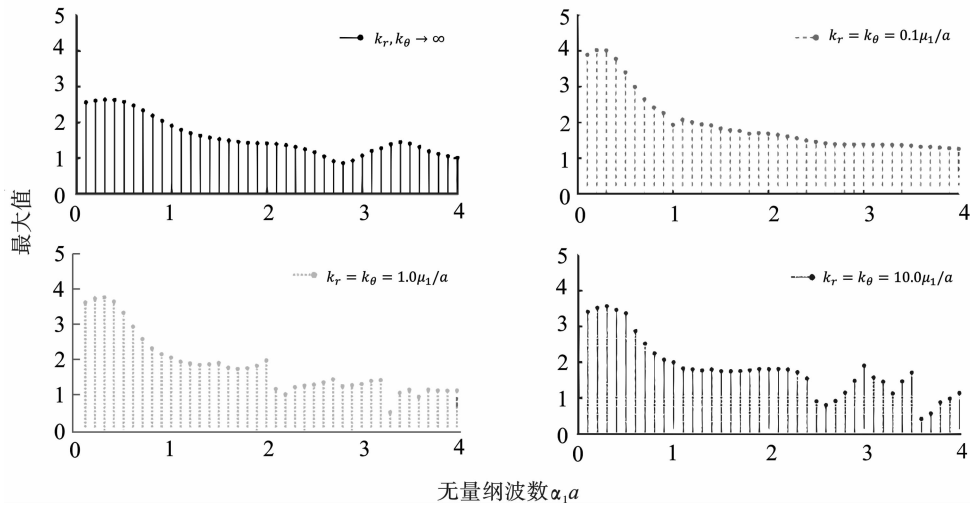


图4 不同弹簧刚度组合下最大 DSCF 值

Fig. 4 Maximum DSCF value under different spring stiffness combinations

获得瞬态波反应的通常做法是先求得稳态波入射的反应然后将不同频率入射波的反应叠加。Fourier 变换在整个过程中起重要桥梁作用。分析一个线性系统在输入任意一个函数  $f(t)$  时的瞬态反应  $g(x_i, t)$  由式(17)确定

$$g(x_i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x_i, \omega) F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (17)$$

式中:  $\chi(x_i, \omega)$  是系统的导纳函数, 稳态条件下夹塞周边的应力集中因子  $\sigma_{\theta\theta}^*$  就是导纳函数  $\chi(x_i, \omega)$ 。根据定义, 瞬态条件下, 应力集中因子表达式如下

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\theta\theta}^* F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (18)$$

剧烈的地震扰动会产生一个移动的小波, 它的形状由地球上弹性波的吸收光谱的性质决定<sup>[24]</sup>。Ricker 在文章中将尖锐的波形转换成由地球吸收光谱截止的陡度决定的移动的“小波”(雷克子波), 给出了雷克子波的数学证明及数学表达式。因此本文选择雷克子波作为入射的瞬态波形可以很好的模拟爆破产生的扰动。

雷克子波收敛快, 旁瓣的幅度比上主瓣幅度的值为, 约等于 2.241。雷克子波在时域上的表达式为<sup>[24]</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \omega_p^2 (t - t_0)^2\right) e^{-\frac{1}{4} \omega_p^2 (t - t_0)^2}, & (t \in [t_0, t_0 + T]) \\ 0, & (t < t_0 \cup t > t_0 + T) \end{cases} \quad (19)$$

假设瞬态波在  $t = 0$  时刻主瓣峰值传到即圆夹塞中心, 此时  $t_0 = 0$ ,  $T$  为雷克子波一个波长对应时

间。雷克子波的傅里叶变换表达式如式<sup>[25]</sup>

$$F(\omega) = \frac{4\omega^2 \sqrt{\pi}}{\omega_p^3} e^{-\frac{\omega^2}{\omega_p^2}} e^{i\omega t} \quad (20)$$

假设圆夹塞半径 5 m, 震源距原点即圆夹塞中心 10 m, P 波在介质中的传播速度为 2790 m/s, 并且弹性模量之比  $\tilde{\mu} = 2.5$ , 泊松比分别为  $v_1 = 0.25$ 、 $v_2 = 0.20$ , 波速之比  $\gamma_p = 1.5$ 。

当雷克子波峰值频率为 1000 时 DSCF 随时间变化曲线如图 5 所示, 测点位于  $\pi/2$  处。DSCF 曲线形状与波形形状相似, 两处 DSCF 中凹陷处的最小值与凸出部分的最大值之比为 2.07, 接近雷克子波主瓣与副瓣的波形幅值之比 2.241。瞬态 DSCF 最大值分别为 6.71、5.56、4.74、4.57, 分别对应  $k_r = k_\theta = 0.1\mu_1/a$ 、 $1.0\mu_1/a$ 、 $10.0\mu_1/a$ 。

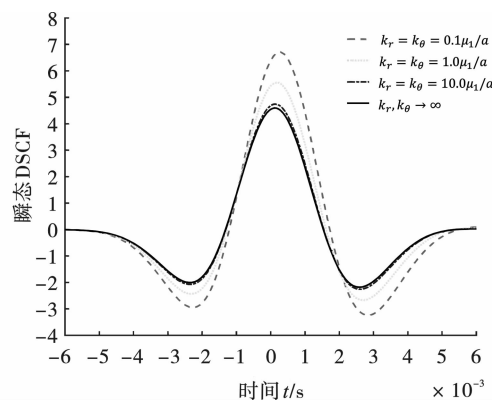


图5 不同弹簧刚度时雷克子波造成的环向方向 DSCF

Fig. 5 The circumferential DSCF generated by the Ricker wavelet with different values of spring stiffness

不同峰值频率  $w_p$  条件下, 弹簧刚度对 DSCF 的影响如图 6 所示。峰值频率  $w_p = 300$ ,  $k_r = k_\theta =$

0.  $1\mu_1/a$  时 DSCF 最大值为 6.93, 当  $w_p$  增加到 6000

弹簧刚度不变时, DSCF 最大值减小到 2.83。

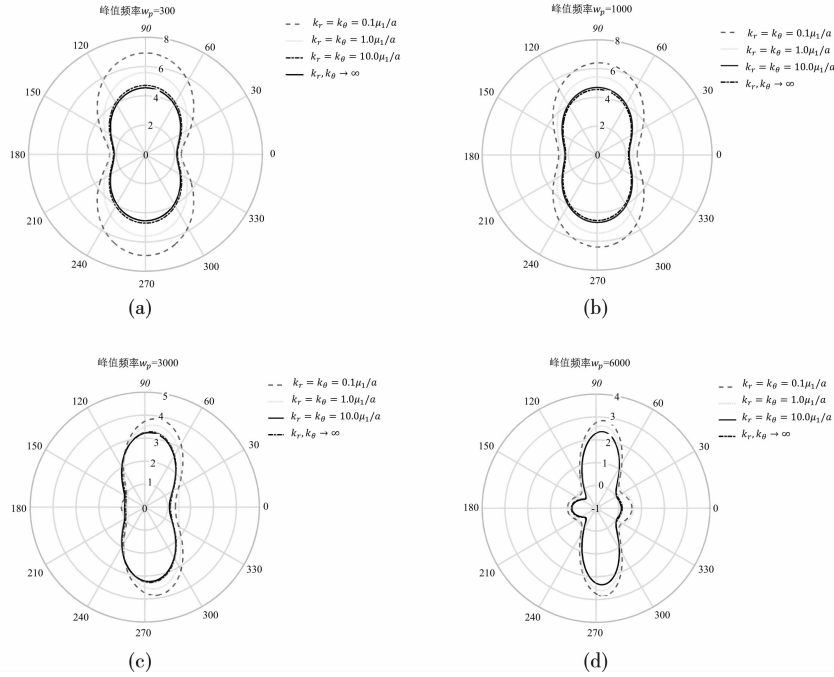


图6 不同峰值频率  $w_p$  条件下弹簧刚度对 DSCF 的影响

Fig. 6 The influence of spring stiffness on DSCF under different peak frequencies  $w_p$

瞬态波入射时,与稳态波的最大区别在于其在时域上有限,因此反射波和入射波有可能不会同时作用在圆孔周边。但是,当频率较小时,波形的首部被反射并与其他部分一起对夹塞产生影响。所以在相同的弹簧刚度条件下,当瞬态波的峰值频率  $w_p$  设为 300 时, DSCF 最大值达到了 6.93, 而当峰值频率增加到 6000 时, DSCF 最大值下降到 2.83。

弹簧刚度对圆形夹塞的动应力响应也与峰值频率有关。峰值频率较小时,弹簧刚度对环向动应力影响较大。随着峰值频率上升,弹簧刚度对动应力的影响在减弱。

## 6 结论

(1) 基于波函数展开法求解了平面 P 波入射具有不完美交界面夹塞体的动应力集中问题, 并利用 Fourier 积分得到了雷克子波入射下的瞬态 DSCF。计算结果具有收敛性。

(2) 弹簧刚度  $k_r$  和  $k_\theta$  越小表明界面连接键越弱, 此时夹塞上的动应力集中系数也普遍越大。同时, 弹簧刚度对 DSCF 的影响随着波数增加在减弱。在高波数条件下 P 波发生振动散射现象, 观察到夹塞体周围出现多处 DSCF 峰值。

(3) 不同弹簧刚度条件下的瞬态 DSCF 变化情况与稳态条件下相似, 但是幅值有提高。夹塞周围

的 DSCF 与雷克子波峰值频率  $w_p$  成负相关。

## 附录

$$\varepsilon_{11}^{(1)}(\alpha r) = (n^2 + n - 1/2\beta^2 r^2)J_n(\alpha r) - \alpha r J_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{11}^{(3)}(\alpha r) = (n^2 + n - 1/2\beta^2 r^2)H_n(\alpha r) - \alpha r H_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{12}^{(1)}(\beta r) = n[-(n+1)J_n(\beta r) + \beta r J_{n-1}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{12}^{(3)}(\beta r) = n[-(n+1)H_n(\beta r) + \beta r H_{n-1}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{21}^{(1)}(\alpha r) = -(n^2 + n + 1/2\beta^2 r^2 - \alpha^2 r^2)J_n(\alpha r) + \alpha r J_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{21}^{(3)}(\alpha r) = -(n^2 + n + 1/2\beta^2 r^2 - \alpha^2 r^2)H_n(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)}(\beta r) = n[(n+1)J_n(\beta r) - \beta r J_{n-1}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{22}^{(3)}(\beta r) = n[(n+1)H_n(\beta r) - \beta r H_{n-1}(\beta r)]$$

$$\varepsilon_{41}^{(1)}(\alpha r) = -n[-(n+1)J_n(\alpha r) + \alpha r J_{n-1}(\alpha r)]$$

$$\varepsilon_{41}^{(3)}(\alpha r) = -n[-(n+1)H_n(\alpha r) + \alpha r H_{n-1}(\alpha r)]$$

$$\varepsilon_{42}^{(1)}(\beta r) = -(-n^2 + n - 1/2\beta^2 r^2)J_n(\beta r) + \beta r J_{n-1}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{42}^{(3)}(\beta r) = -(-n^2 + n - 1/2\beta^2 r^2)H_n(\beta r) + \beta r H_{n-1}(\beta r)$$

$$\varepsilon_{71}^{(1)}(\alpha r) = \alpha r J_{n-1}(\alpha r) - n J_n(\alpha r)$$

$$\varepsilon_{71}^{(3)}(\alpha r) = \alpha r H_{n-1}(\alpha r) - n H_n(\alpha r)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{72}^{(1)}(\beta r) &= nJ_n(\beta r) & \varepsilon_{72}^{(3)}(\beta r) &= nH_n(\beta r) \\ \varepsilon_{81}^{(1)}(\alpha r) &= -nJ_n(\alpha r) & \varepsilon_{81}^{(3)}(\beta r) &= -nH_n(\alpha r) \\ \varepsilon_{82}^{(1)}(\beta r) &= -[\beta rJ_{n-1}(\beta r) - nJ_n(\beta r)] \\ \varepsilon_{82}^{(3)}(\beta r) &= -[\beta rH_{n-1}(\beta r) - nH_n(\beta r)]\end{aligned}$$

### 参考文献 (References)

- [1] 赵兴东,周鑫,赵一凡,等. 深部金属矿采动灾害防控研究现状与进展[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2021,52(8):2522-2538.
- [1] ZHAO Xing-dong, ZHOU Xin, ZHAO Yi-fan, et al. Research status and progress of prevention and control of mining disasters in deep metal mines[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2021, 52(8):2522-2538. (in Chinese)
- [2] 钱七虎,何川,晏启祥. 隧道工程动力响应特性与汶川地震隧道震害分析及启示[C]//宋胜武. 汶川大地震工程震害调查分析与研究. 成都:中国岩石力学与工程学会,2009:608-618.
- [2] QIAN Qi-hu, HE Chuan, YAN Qi-xiang. Analysis and investigation on seismic damages of projects subjected to Wenchuan earthquake[C]//SONG Sheng-wu. Study on engineering damage in wenchuan earthquake. Chengdu: Chinese Society for Rock Mechanics and Engineering, 2009:608-618. (in Chinese)
- [3] PAO Yih-hsing. Dynamical stress concentration in an elastic plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29(2):299-305.
- [4] 刘殿魁,盖秉政,陶贵源. 论孔附近的动应力集中[J]. 地震工程与工程振动,1980,试刊(1):97-109.
- [4] LIU Dian-kui, GAI Bing-zheng, TAO Gui-yuan. The dynamic stress concentrations theory near the hole[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1980, test issue(1):97-109. (in Chinese)
- [5] LI Zhan-wen, TAO Ming, DU Ku, et al. Dynamic stress state around shallow-buried cavity under transient P wave loads in different conditions[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2020, 97 (Mar.): 103228. 1-12.
- [6] 赵春香,齐辉. SH波对半空间界面圆孔的动力效应[J]. 振动与冲击,2016,35(2):132-140.
- [6] ZHAO Chun-xiang, QI Hui. Dynamic effect of SH wave on interface circular cavity in half space[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(2):132-140. (in Chinese)
- [7] 陈涛,胡超,黄文虎. P波入射时含圆柱形空腔板弹性波散射与动应力集中[J]. 地震工程与工程振动, 2006,26(4):32-36.
- [7] CHEN Tao, HU Chao, HUANG Wen-hu. Dynamic stress concentrations in a plate with cylindrical cavity by incident P wave[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2006, 26(4):32-36. (in Chinese)
- [8] A Ghafarollahi, H M Shodja. Scattering of SH-waves by an elliptic cavity/crack beneath the interface between functionally graded and homogeneous half-spaces via multipole expansion method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 435:372-389.
- [9] TAO M, ZHAO R, DU K, et al. Dynamic stress concentration and failure characteristics around elliptical cavity subjected to impact loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2020, 191-192:401-417.
- [10] LEE V W, KARL J. On deformation near a circular underground cavity subjected to incident plane P waves[J]. European Journal of Earthquake Engineering, 1993, 11:29-36.
- [11] YI C, ZHANG P, JOHANSSON D, et al. Dynamic response of a circular lined tunnel with an imperfect interface subjected to cylindrical P-waves[J]. Computers and Geotechnics, 2014, 55:165-171.
- [12] YI C P, LU W B, ZHANG P, et al. Effect of imperfect interface on the dynamic response of a circular lined tunnel impacted by plane P-waves[J]. Tunn Undergr Space Technol, 2016, 51:68-74.
- [13] 袁晓铭. 地表下圆形夹塞区出平面散射对地面运动的影响[J]. 地球物理学报, 1996, 39(3):373-381.
- [13] YUAN Xiao-ming. The influence of the scattering from the plane of the circular inclusion under the ground surface on the ground motion[J]. Chinese Journal of Geophysics, 1996, 39(3):373-381. (in Chinese)
- [14] MD Trifunac. Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1971, 61(6):1755-1770.
- [15] 刘中宪,梁建文,李帆. 流体饱和半空间中夹塞物对平面SV波的散射[J]. 力学季刊, 2012(2):96-108.
- [15] LIU Zhong-xian, LIANG Jian-wen, LI Fan. Diffraction of plane SV waves by an inclusion in saturated poroelastic half-space[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2012(2):96-108. (in Chinese)
- [16] 张鸿,高谦,徐斌,等. 地震P波作用下饱和土中考虑剪切与转动变形的衬砌结构动力响应分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(6):1943-1951.
- [16] ZHANG Hong, GAO Qian, XU Bin, et al. Dynamic response of tunnel lining considering both rotary and shear deformation embedded in saturated soil with seismic P wave[J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2014, 45(6):1943-1951. (in Chinese)