

联合监测间隔时间和幅值的自适应 Max-EWMA 控制图

王煜, 朱永忠[†]

(河海大学 理学院, 江苏 南京 211100)

摘要: 用于联合监测事件间隔时间和幅值的控制图多数假定数据的漂移大小已知, 但在实际生产中由于数据的漂移大小未知, 这些针对特定漂移大小的控制图存在监测性能下降的问题。为此, 基于事件间隔时间和幅值漂移程度的无偏估计量, 构造了 EWMA 统计量的自适应平滑参数, 通过结合 Max-EWMA 统计量的结构特征, 提出了一种新的联合监测间隔时间和幅值的自适应 Max-EWMA 控制图 (称为 Max-AEWMA 图)。模拟仿真表明: 在监测间隔时间和幅值的不同程度的漂移时, 本文提出的控制图一致优于已有的 Max-EWMA 控制图, 例如, $a = 4, b = 1, \lambda_E = 0.01, \delta_a = 0.59, \delta_{\lambda_E} = 0.73$ 时, Max-AEWMA 的 $ARL_1 = 4.94$, Max-EWMA 控制图的 $ARL_1 = 9.68$ 。最后还通过实证分析验证了本文方法的优越性。

关键词: 自适应; Max-EWMA; 幅值; 统计过程控制

中图分类号: O212

文献标识码: A

An Adaptive Max-EWMA Control Chart for Simultaneous Monitoring of Internal Time and Amplitude

WANG Yu, ZHU Yongzhong[†]

(School of Science, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 211100, China)

Abstract: Most control charts used to jointly monitor time between event and amplitude assume that the process shift size is known, but in actual production these control charts for specific shift sizes suffer from monitoring performance degradation because the shift size of the data is unknown. To this end, this paper constructs adaptive smoothing parameters for the EWMA statistic based on unbiased estimates of time between event and amplitude, and proposes a new adaptive Max-EWMA control chart for joint monitoring time between event and amplitude (referred to as Max-AEWMA chart) by combining the structural features of the Max-EWMA statistic. Simulations show that the proposed control chart is consistently better than the existing Max-EWMA control chart when monitoring different size of shift in time between event and amplitude. For example, when $a = 4, b = 1, \lambda_E = 0.01, \delta_a = 0.59, \delta_{\lambda_E} = 0.73$, Max-AEWMA's $ARL_1 = 4.94$, Max-EWMA's $ARL_1 = 9.68$. The paper also concludes with an empirical analysis to verify the superiority of the method.

Key words: adaptive; Max-EWMA; magnitude; statistical process control

控制图是统计过程控制的重要工具之一, 在工业生产中得到了广泛的研究和应用。在控制图的

研究中, 大多假定生产过程中两次故障发生的时间间隔 (即事件间隔时间) 已知。然而, 在诸如医疗保

障等领域,事件间隔时间往往是未知的,这时使用传统的控制图进行监测可能会出现高虚警率、负控制下限^[1-2]等问题。因此,基于事件间隔时间(time between event, TBE)的控制图受到了广泛的关注。

Lucas(1985)提出了监测事件间隔时间的CUSUM控制图^[3]。Azam等(2017)利用重采样技术,构建了一种定量特性服从指数分布的TBE-EWMA控制图^[4]。Huang等(2017)提出了带有估计参数的TBE控制图,并采用基于顺序采样方案的自启动机制对生产过程进行监控^[5]。Shafae等(2015)建立了监测威布尔分布的TBE-CUSUM控制图^[6]。Alevizakos等(2020)采用威布尔分布和对数正态分布对TBE观测值进行建模,提出了PM-TBE控制图,有效提高了TBE控制图监测中大漂移的能力^[7]。上述大多数工作只关注事件间隔时间的监测,而没有考虑事件幅值。然而,在实际的工业生产中,产品质量的监控效率不仅取决于事件间隔时间 T ,还取决于事件幅值 X ^[8]。联合监测事件间隔时间和幅值更受工业工程研究者的青睐^[9]。Wu等(2009)基于服从指数分布的 T 图和服从伽马分布的 X 图,提出了同时监测事件间隔时间和幅值的 $T&X$ 控制图,并验证了所提控制图在检测大漂移时的稳健性^[10]。Huang等(2018)构建了一种新型非参数Mathur控制图,该控制图通过考虑两个变量之间的依赖关系,提高了联合监测 T 和 X 的能力^[11]。Wu(2009)等建立了联合监测事件间隔时间和幅值的单边GCUSUM控制图^[12]。基于这种思想,有人提出了基于单边统计量的Shewhart方案^[13]和CUSUM方案^[14,15]来联合监测事件间隔时间和幅值。Sanusi等(2020)提出了一种联合监测事件间隔时间和幅值的单边Max-EWMA控制图,性能研究表明,该控制图检测小漂移的能力比 $T&X$ 图更强,在检测大漂移方面也很有竞争力^[16]。Talib等(2022)假定间隔时间和幅值服从指数修正高斯分布,提出了一种新的Max-EWMA控制图^[17]。Amjadi等(2022)建立了一种中值比率的单边控制图,该控制图基于事件间隔时间和幅值的比率以及其中值构造中值比率统计量,能有效检测出过程的小漂移和大漂移^[18]。

上述的联合监控事件间隔时间和幅值的控制图仅考虑漂移大小已知且固定的情况,没有关注不

同漂移程度的情况。因此,为进一步提升控制图的灵敏度,本文提出了一种新的联合监测事件间隔时间和幅值的自适应Max-EWMA控制图(简记为Max-AEWMA图),并与 T 、 X 和 $T&X$ 、Max-EWMA等控制图进行了对比分析,最后通过实例数据说明了本文所提控制图的有效性。

1 监测TBE和幅值的自适应Max-EWMA控制图

本文针对联合监测事件的幅值 X 和间隔时间 T ,提出一个新的Max-AEWMA控制图。控制图设计思路是:先采用指数加权平均的思想计算 X 和 T 在不同漂移程度下的无偏估计;然后根据该无偏估计构造出自适应函数,并根据自适应函数设置EWMA统计量的光滑参数 λ ;最后基于两个EWMA统计量的最大绝对值来绘制联合监控事件间隔时间和幅值的单边控制图。

本文提出的控制图中事件幅值 X 假定服从伽马分布, $X \sim \text{Gamma}(a, b)$ ^[10],间隔时间 T 假定服从指数分布, $T \sim \text{Exp}(\lambda_E)$ ^[11,16], X 和 T 相互独立。参数 a 、 b 和 λ_E 分别表示形状参数,尺度参数和比率参数。将过程受控时 X 和 T 的分布参数记为 (a_0, b_0) 和 λ_{E_0} ,过程失控时, $a = \delta_a a_0$, $\lambda_E = \delta_{\lambda_E} \lambda_{E_0}$,其中 δ_a 和 δ_{λ_E} 分别表示 X 和 T 的漂移程度。

参考文献[19-20],本文构造了在伽马分布下的事件幅值 X 的漂移 δ_a 的无偏估计 $\hat{\delta}_t$ 。具体如下:

$$\hat{\delta}_t = \frac{\hat{\delta}_t^*}{1 - (1 - \psi)t} \quad (1)$$

其中 $\hat{\delta}_t^* = \psi P_t + (1 - \psi)\hat{\delta}_{t-1}^*$, $\hat{\delta}_0^* = 0$, $P_t = \frac{X_t}{a_0 b}$, $\psi \in (0, 1]$, P_t 是关于 t 批次的事件幅值 X_t 构造的中间统计量。

类似构造指数分布下的事件间隔时间 T 的漂移 δ_{λ_E} 的无偏估计 \hat{v}_t 。具体如下:

$$\hat{v}_t = \frac{\hat{v}_t^*}{1 - (1 - \psi)t} \quad (2)$$

其中 $\hat{v}_t^* = \psi Q_t + (1 - \psi)\hat{v}_{t-1}^*$, $\hat{v}_0^* = 0$, $Q_t = \lambda_E T_t$, $\psi \in (0, 1]$, Q_t 是关于 t 批次和 $t-1$ 批次的间隔时间 T_t 构造的中间统计量。

基于公式(1)(2)的两个无偏估计统计量,首先构造EWMA统计量参数的自适应函数 $g(\hat{\eta}_t)$,定义如下:

$$g(\hat{\eta}_t) = \begin{cases} 0.05, & \text{if } 0.00 < |\hat{\eta}_t - 1| \leq 0.25, \\ 0.10, & \text{if } 0.25 < |\hat{\eta}_t - 1| \leq 0.55, \\ 0.25, & \text{if } 0.55 < |\hat{\eta}_t - 1| \leq 0.75, \\ 0.5, & \text{if } 0.75 < |\hat{\eta}_t - 1| \leq 0.85, \\ 0.7, & \text{if } 0.85 < |\hat{\eta}_t - 1| \leq 0.95, \\ 0.9, & \text{if } 0.95 < |\hat{\eta}_t - 1|, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\hat{\eta}_t = \hat{\delta}_t$ 或 \hat{v}_t , $g(\hat{\eta}_t)$ 可以根据不同漂移大小自适应决定相应的参数值。

为构造 Max-AEWMA 控制图,定义如下两个独立的统计量:

$$U_t = \frac{X_t - ab}{\sqrt{ab^2}} \quad (4)$$

$$V_t = \lambda_E T_t - 1 \quad (5)$$

结合公式(3)得到的自适应参数,构造两个 EWMA 统计量 A_t 和 B_t ,分别用来监测事件的间隔时间和幅值。

$$A_t = g(\hat{\delta}_t)U_t + (1 - g(\hat{\delta}_t))A_{t-1} \quad (6)$$

$$B_t = g(\hat{v}_t)V_t + (1 - g(\hat{v}_t))B_{t-1} \quad (7)$$

其中 $A_0 = B_0 = 0$ 。

为设计单边的自适应 Max-EWMA 控制图用来联合监控事件间隔时间和幅值,Max-AEWMA 控制图的统计量 C_t 定义如下:

$$C_t = \max\{|A_t|, |B_t|\}, t = 1, 2, \dots \quad (8)$$

其中, C_t 是一个非负实数。

Max-AEWMA 控制图的控制上限 UCL 为

$$UCL = E(C) + L \sqrt{\text{Var}(C)} \quad (9)$$

其中 $E(C)$ 和 $\text{Var}(C)$ 分别是 C 的均值和方差,分别用受控状态下的 C 的样本均值和样本方差进行估计, L 是常数乘数。当 C_t 超过控制上限 UCL 时,Max-AEWMA 控制图会发出失控信号。

Max-AEWMA 控制图联合监测事件间隔时间和幅值的流程总结如下:

步骤 1: 给定 ARL_0 、 λ_E 、 a 、 b 和无偏估计量 ($\hat{\delta}_t$ 和 \hat{v}_t) 的参数 ψ , 通过搜索算法分别求解 $ARL_0 = 370, 100$ 时的常数乘数 L 。求解的结果 L 见表 1。

表 1 $X \sim \text{Gamma}(a, b), T \sim \text{Exp}(\lambda_E), \psi = 0.05$ 或 0.1 时 Max-AEWMA 的常数乘数 L 和 ARL_0

δ_{λ_E}	a, b	$\psi = 0.05$		$\psi = 0.1$		$\psi = 0.05$		$\psi = 0.1$	
		L	ARL_0	L	ARL_0	L	ARL_0	L	ARL_0
0.005	4.0, 1.0	2.580	100.066	1.800	100.034	3.900	370.040	4.631	370.030
	1.0, 2.0	1.030	100.980	0.630	100.117	1.825	369.893	3.795	370.066
	7.5, 1.0	2.506	100.233	1.570	100.010	3.820	369.796	4.690	369.598
	2.0, 2.0	0.838	100.001	0.530	100.010	1.566	369.888	2.450	370.099
0.01	4.0, 1.0	2.451	100.012	1.820	99.952	3.704	369.753	4.686	370.142
	1.0, 2.0	0.971	100.040	0.655	100.084	1.745	370.034	3.868	370.064
	7.5, 1.0	2.420	100.082	1.600	99.848	3.664	370.004	4.650	369.788
	2.0, 2.0	0.883	99.996	0.510	99.867	1.664	369.405	2.515	368.704
0.5	4.0, 1.0	2.603	100.125	1.860	100.045	3.950	370.204	4.842	369.924
	1.0, 2.0	1.024	99.975	0.655	99.969	1.842	369.900	3.919	369.890
	7.5, 1.0	2.448	100.154	1.607	99.958	3.700	369.791	4.730	369.804
	2.0, 2.0	0.889	99.967	0.494	100.067	1.653	370.116	2.320	369.816
1	4.0, 1.0	2.448	99.970	1.810	100.139	3.742	369.852	4.605	369.857
	1.0, 2.0	0.975	100.032	0.650	100.413	1.762	369.865	3.745	369.566
	7.5, 1.0	2.470	99.940	1.585	99.900	3.755	370.162	4.683	369.821
	2.0, 2.0	0.845	99.926	0.500	99.965	1.580	370.058	2.312	369.949
1.5	4.0, 1.0	2.606	99.897	1.835	99.921	3.960	369.963	4.790	370.009
	1.0, 2.0	0.976	100.038	0.635	99.408	1.752	370.174	3.910	369.998
	7.5, 1.0	2.369	100.014	1.600	99.884	3.650	369.958	4.730	369.512
	2.0, 2.0	0.841	100.039	0.510	99.661	1.583	370.208	2.389	369.558

步骤2:通过公式(9)计算 Max-AEWMA 控制图的控制上限 UCL。

步骤3:获取 t 批次的 X_t 和 T_t , X_t 是 t 批次事件的幅值, T_t 是事件 t 批次的和 $t-1$ 批次的间隔时间,根据公式(4) - (7) 计算 t 批次的 U_t, V_t, A_t, B_t 。

步骤4:根据公式(8)求出 t 批次的 C_t , 如果 $C_t \leq UCL$, 则 t 批次处于受控状态, 转到步骤3 处理下一批次的 X_t 和 T_t 。否则进入步骤5。

步骤5:调查是否真实处于失控状态, 并确定导致失控的变量(X, T), 然后消除异常因素, 恢复过程监控。

2 模拟分析

为评估所提控制图的性能, 本文选用平均运行长度(ARL)作为考量标准。ARL 是在控制图出现第一个失控信号之前的平均样本数。过程受控时的 ARL 常记作 ARL_0 , 失控时的 ARL 常记作 ARL_1 。对于固定的 ARL_0 , ARL_1 相对较小的控制图的性能更优^[21]。ARL 常用的计算方法有马尔科夫链、积分方程和蒙特卡罗模拟。本文使用 R 语言编写蒙特卡罗模拟方法来计算控制图的运行长度特性 ARL, 控制图的 ARL 的计算设置为模拟运行 100000 次。

蒙特卡罗模拟计算 ARL_1 的算法流程:

步骤1:计算 L 和受控状态下的 C 的样本均值、样本方差, 利用公式(9)计算控制上限 UCL

步骤2:考虑失控状态, 即其中 δ_a 和 δ_{λ_E} 不为 0, 分别从参数为 (δ_a, a_0, b) 的伽马分布和参数为 $(\delta_{\lambda_E}, \lambda_{E_0})$ 的指数分布中生成 10000 个样本, 每个样本的样本量为 1。

步骤3:利用公式(4) - (8) 计算 Max-AEWMA 统计量 C_t 。

步骤4:利用步骤1 计算的控制上限 UCL, 判断该过程是否为失控状态, 如果失控状态, 将样本数量 RL 记录下来, 进行步骤5。否则, 考虑下一个样本并重复步骤3, 直至控制图发出失控信号。

步骤5:重复上述步骤 100000 次, 得到 100000 个 RL, 取平均值得到 ARL_1 。

为研究 Max-AEWMA 控制图的表现性能, 将 Max-AEWMA 控制图与 $T, X, T \& X, Rate$ 和 Max-EWMA 控制图进行比较研究。为了便于对比, 设置了与文献[16]中完全一样的模拟条件, 控制图的参数设置为 $\delta_{\lambda_E} = \{1, 0.87, 0.73, 0.6,$

$0.47, 0.33\}$, $\delta_a = \{0.48, 0.59, 0.69, 0.79, 0.90, 1.00\}$, $\psi = 0.05$, $a = 4$, $b = 1$, $\lambda_E = 0.01$, 运行长度 ARL_0 设置为 100。控制图的 ARL_1 模拟计算结果如表 2 所示, 表 2 中 $T, X, T \& X, Rate$ 和 Max-EWMA 的结果采用文献[16]的数据。

从表 2 中可以看出, 不同的 δ_a 和 δ_{λ_E} 的组合下, 本文 Max-AEWMA 控制图的 ARL_1 明显较小, 表明在联合监测幅值和间隔时间的不同漂移程度时, 本文 Max-AEWMA 控制图检测表现更加敏感, 性能明显更优。同时可以看出随着 δ_a 和 δ_{λ_E} 减小(漂移程度增大), Max-AEWMA 控制图 ARL_1 减小且下降速度变缓, 在小漂移时 ARL_1 下降最快。

为研究 Max-AEWMA 控制图对中小漂移和大漂移的检测性能, 将 Max-AEWMA 控制图与现有的 Max-EWMA 控制图($\omega = 0.05, \omega = 0.1$) 进行比较。 ω 取值为 0.05 的 Max-EWMA 控制图在监测小到中等漂移时效果较好, 而 ω 取值为 0.1 的 Max-EWMA 控制图在监测大漂移时效果较好^[16]。实验参数选择为 $X \sim \text{Gamma}(7.5, 1)$, $T \sim \text{Exp}(0.01)$, $\lambda_E = 0.01$, $\psi = 0.05$, $ARL_0 = 370$, $\delta_a, \delta_{\lambda_E} = \{0.5, 0.7, 0.8, 0.85, 1.00\}$ 。Max-EWMA 图($\omega = 0.05$)、Max-EWMA 图($\omega = 0.1$) 和 Max-AEWMA 图的 L 取值分别取 2.738, 3.31, 3.6642。三种控制图模拟计算的 ARL_1 见表 3。从表中可以看出, 当 $\delta_a, \delta_{\lambda_E}$ 都不为 1 时(幅值和间隔时间都发生漂移), 本文 Max-AEWMA 控制图表现一致优于 Max-EWMA 控制图。对于小、中和大漂移情况, 本文 Max-AEWMA 图的 ARL_1 显著小于 $\omega = 0.1$ 和 $\omega = 0.05$ 时的 Max-EWMA 控制图, 性能明显更优。

为进一步研究 Max-AEWMA 控制图监测 X 或 T 单独发生漂移时的效率, 本文分析了 Max-AEWMA 控制图在监测 X, T 同时漂移时和 X 单独漂移(或 T 单独漂移)的差异。实验参数设置为 $\delta_a, \delta_{\lambda_E} = \{0.5, 0.7, 0.8, 0.85, 1.00\}$, $\psi = 0.05$, $X \sim \text{Gamma}(2, 2)$, $T \sim \text{Exp}(0.5)$, $ARL_0 = 370$ 。计算 Max-AEWMA 控制图监测 X 单独漂移、 T 单独漂移和 X, T 同时漂移的 ARL_1 , 结果如图 1、2 所示。图 1 中 $\delta_{\lambda_E} = 1$ 的曲线表明 X 单独漂移比 X 和 T 同时漂移具有更高的 ARL_1 , 图 2 中 $\delta_a = 1$ 的曲线同样表明 T 单独漂移比 X 和 T 同时漂移具有更高的 ARL_1 , 表明本文 Max-AEWMA 控制图在监测 X, T 同时漂移时更敏感。

表 2 $X \sim \text{Gamma}(4, 1), T \sim \text{Exp}(0.01), \psi = 0.05, ARL_0 = 100$ 的 Max-AEWMA 和多种控制图的 ARL_1 比较

δ_{λ_E}		δ_a					
		0.48	0.59	0.69	0.79	0.9	1
1	T	100	100	100	100	100	100
	X	4.647	7.822	13.858	25.713	49.747	100.003
	T&X	6.103	10.814	19.726	36.009	62.985	99.99
	Rate	9.251	10.33	17.188	39.763	62.921	99.991
	Max-EWMA	7.893	10.822	16.383	29.972	74.991	99.471
	Max-AEWMA	4.032	6.138	9.745	17.876	40.134	99.834
	T	59.001	59.001	59.001	59.001	59.001	59.001
0.87	X	5.361	9.025	15.99	29.668	57.4	115.388
	T&X	6.668	11.513	20.09	34.032	53.219	73.781
	Rate	7.634	7.532	11.812	31.423	48.736	75.352
	Max-EWMA	7.71	10.502	15.209	25.302	46.187	52.141
	Max-AEWMA	4.045	6.045	9.325	15.633	29.733	50.768
	T	37.284	37.284	37.284	37.284	37.284	37.284
	X	6.336	10.666	18.898	35.063	67.837	136.367
0.73	T&X	7.429	12.284	19.955	30.401	41.761	51.224
	Rate	7.369	6.931	9.823	26.217	39.061	57.953
	Max-EWMA	7.373	9.683	12.914	18.249	24.025	25.148
	Max-AEWMA	3.669	4.94	6.484	8.248	10.127	11.393
	T	24.311	24.311	24.311	24.311	24.311	24.311
	X	7.744	13.036	23.097	42.854	82.912	166.671
	T&X	8.165	12.571	18.429	24.793	30.218	33.884
0.6	Rate	7.191	6.617	8.483	21.811	31.062	44.061
	Max-EWMA	6.664	8.22	10.142	12.18	13.551	13.792
	Max-AEWMA	3.058	3.672	4.262	4.818	5.254	5.537
	T	16.665	16.665	16.665	16.665	16.665	16.665
	X	9.957	16.761	29.696	55.099	106.601	214.291
	T&X	8.748	12.167	15.816	18.948	21.124	22.397
	Rate	7.18	6.653	7.757	18.197	24.579	33.104
0.47	Max-EWMA	5.646	6.466	7.128	7.692	7.997	7.901
	Max-AEWMA	2.394	2.658	2.876	3.056	3.191	3.297
	T	12.494	12.494	12.494	12.494	12.494	12.494
	X	13.94	23.465	41.575	77.138	149.241	300.008
	T&X	9.196	11.364	13.204	14.5	15.281	15.699
	Rate	7.546	7.232	7.778	15.519	19.66	24.871
	Max-EWMA	4.166	4.395	4.539	4.608	4.639	4.634
0.33	Max-AEWMA	1.779	1.867	1.928	1.97	2.011	2.027

表 3 $ARL_0 = 370, \omega = 0.05$ 和 0.1 的 Max-EWMA 控制图和 Max-AEWMA 控制 ARL_1 比较

δ_a	δ_{λ_E}	Max-EWMA	Max-EWMA	proposed Max-AEWMA
		$\omega = 0.05, L = 2.738$	$\omega = 0.1, L = 3.31$	$\psi = 0.05, L = 3.6642$
1	1	368	367.8	367.4
0.85	0.85	38.7	56	33.0
0.8	0.85	26.5	34.5	24.9
0.7	0.85	15.5	16.6	10.2
0.5	0.85	8.4	7.7	3.9
0.85	0.8	35	46.6	29.8
0.8	0.8	25.3	31.4	20.2
0.7	0.8	15.3	16.1	9.4
0.5	0.8	8.3	7.7	3.8
0.85	0.7	26.4	30.5	15.1
0.8	0.7	21.3	24	12.5
0.7	0.7	14.3	14.6	7.7
0.5	0.7	8.2	7.5	3.6
0.85	0.5	12.8	12.1	5.3
0.8	0.5	12.1	11.5	5.2
0.7	0.5	10.5	9.8	4.5
0.5	0.5	7.4	6.6	3.0

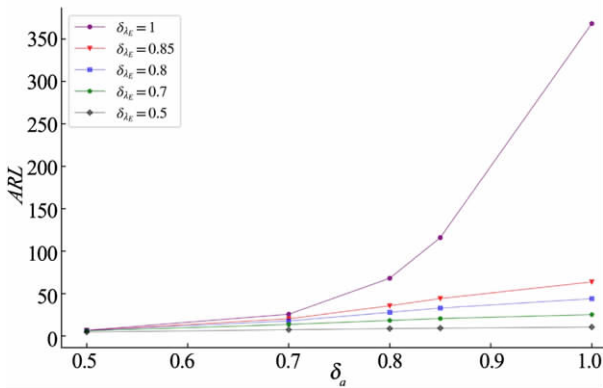


图1 监测 X 漂移和 X、T 同时漂移的 ARL₁

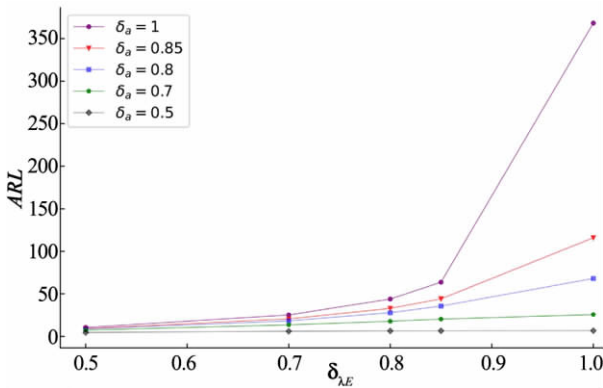


图2 监测 T 漂移和 T、X 同时漂移的 ARL₁

为了研究参数 ψ 的不同取值对 Max-AEWMA 控制图性能的影响,将不同 ψ 值下 Max-AEWMA 控制图的 ARL_1 进行比较。控制图的参数设置为 $\psi = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $\mathbf{X} \sim \text{Gamma}(2, 2)$, $T \sim \text{Exp}(0.5)$, $ARL_0 = 370$, $\delta_a, \delta_{\lambda_E} = \{0.5, 0.7, 0.8, 0.85\}$, 结果见表 4。从表中可以观察到,

随着参数 ψ 的减小,控制图的 ARL_1 的值呈逐渐降低趋势。 ψ 取值为 0.05 的控制图在监测不同漂移时 ARL_1 总体较小,即 $\psi = 0.05$ 时的 Max-AEWMA 控制图性能相对更优。因此,本文将 Max-AEWMA 控制图的光滑常数 ψ 取值设为 0.05。

3 实例分析

本文采用真实数据集来说明 Max-AEWMA 控制图联合监测幅值和间隔的有效性,实证数据取自文献[16]中的电子公司监控集成电路芯片的销售案例。数据集的质量特性包括事件的幅值 X (集成电路芯片的销售量) 和间隔时间 T (两个连续订单之间的时间),监测主要针对芯片销售量的减少和连续订单之间时间增加的情况。实例数据具体包含销售正常的 50 份订单的幅值 X 和间隔时间 T 。根据 Wu 等^[8]的研究,数据 T 分布拟合为指数分布, $T \sim \text{Exp}(\lambda_{E_0})$, 数据 X 分布拟合为伽马分布, $X \sim \text{Gamma}(a_0, b_0)$, 其中分布拟合参数如下: $a_0 = 2.8277$, $b_0 = 0.8063$, $\lambda_{E_0} = 0.0571$ 。在 50 个受控数据基础上,添加 50 个模拟失控数据,总计 100 个数据。其中漂移 $\delta_a = 0.5$, $\delta_{\lambda_E} = 0.5$ 分别作用于 X 的形状参数 a_0 和 T 的比率参数 λ_{E_0} , 用来模拟电路芯片销售量的失控状态。当电路芯片的销售量下降或连续订单之间的时间增加时,Max-AEWMA 控制图会发出失控信号,用来指导电子公司及时做出调整,制定相应的销售策略来提高销售量。

表 4 $X \sim \text{Gamma}(2, 2)$, $T \sim \text{Exp}(0.5)$, $ARL_0 = 370$, 不同的 ψ 的 Max-AEWMA 控制图的 ARL_1

δ_a	δ_{λ_E}	ψ					
		0.05	0.1	0.2	0.5	0.7	0.9
1	1	368.22	371.79	372.60	371.26	370.04	369.15
0.85	0.85	44.13	77.40	131.52	150.09	148.13	147.43
0.8	0.85	32.90	77.15	131.40	150.14	148.44	148.30
0.7	0.85	20.57	76.92	131.60	149.30	148.29	148.21
0.5	0.85	9.21	72.38	132.30	149.16	147.82	148.11
0.85	0.8	35.60	49.10	94.77	111.57	110.58	109.62
0.8	0.8	27.86	48.90	94.63	110.76	110.45	109.22
0.7	0.8	18.26	48.90	94.52	110.92	109.45	110.30
0.5	0.8	8.71	46.91	95.39	110.72	109.90	109.82
0.85	0.7	20.28	21.99	50.62	61.55	60.67	60.89
0.8	0.7	17.75	21.93	50.35	61.38	60.89	60.46
0.7	0.7	13.58	21.92	50.53	61.66	60.52	60.80
0.5	0.7	7.34	21.21	50.90	61.38	60.69	60.87
0.85	0.5	6.56	6.77	16.30	19.54	19.33	19.28
0.8	0.5	6.43	6.74	16.33	19.66	19.33	19.17
0.7	0.5	6.00	6.81	16.40	19.68	19.45	19.20
0.5	0.5	4.58	6.66	16.45	19.57	19.38	19.18

将本文 Max-AEWMA 控制图和 Max-EWMA 控制图进行比较研究,Max-AEWMA 控制图的参数设置为 $L=1.442$, $\psi=0.05$, $ARL_0=100$,对应的控制上限 UCL 为 1.2988,本文 Max-AEWMA 控制图的表现如图 3 所示。Max-EWMA 控制图的参数设置为 $\omega=0.10$, $L=1.798$, $UCL=1.530$, $ARL_0=100$,Max-EWMA 控制图的表现如图 4 所示。从图 3 和图 4 可以看出:本文 Max-AEWMA 控制图在检测第 52 个样本时就发出了失控信号,表明数据从受控状态转为失控状态。而 Max-EWMA 控制图是在检测第 60 个样本时发出失控信号。因为前 50 个数据是销售正常情况,处于受控状态,可见本文 Max-AEWMA 控制图能够较快的发出失控信号警报,在监测实际生产数据中更加灵敏,检测能力更强,与第三节中模拟分析的结果一致。

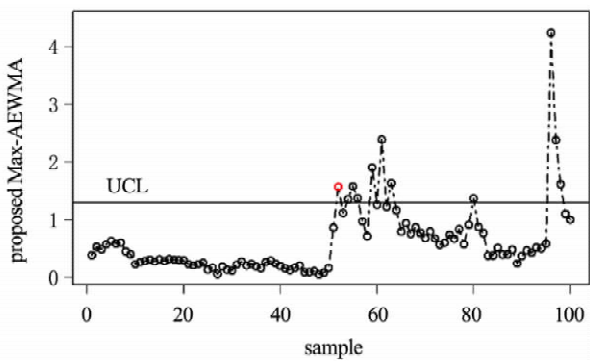


图 3 $ARL_0=100$ 的 Max-AEWMA 控制图

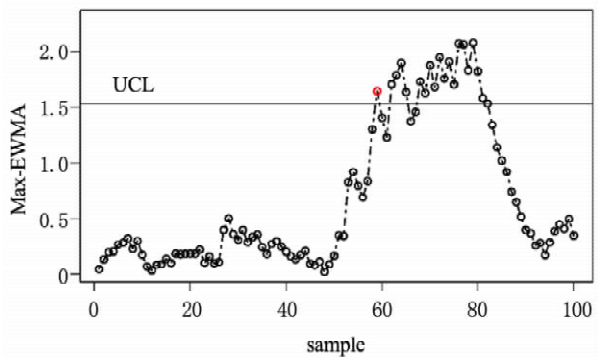


图 4 $ARL_0=100$ 的 Max-EWMA 控制图

5 结论

针对联合监测幅值和间隔时间的自适应控制图的问题,利用幅值和间隔时间漂移程度的无偏估计量构造了自适应函数,由此设置 EWMA 统计量

的光滑参数 λ ,结合 Max-EWMA 控制图的结构特征,提出了一种新的监测幅值和间隔时间的 Max-AEWMA 控制图。运用 R 软件使用蒙特卡罗模拟仿真给出了控制图的控制线和运行长度特性 ARL,并且分析比较 Max-AEWMA 控制图与现有控制图的 ARL,结果表明,在监测不同漂移程度时,前者的检测能力显著优于后者,表现较优的整体性能。在真实数据集上也验证了 Max-AEWMA 控制图的检测灵敏度最优,表现了 Max-AEWMA 控制图的有效性。接下来的研究工作可以扩展到研究不同估计对 Max-AEWMA 控制图的影响以及针对幅值和间隔时间的其他分布进行研究。

参考文献

- [1] ALI S, PIEVATOLO A, GÖB R. An overview of control charts for high-quality processes [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016, 32(7): 2171–2189.
- [2] ALI S, SHAH I, WANG L, et al. A comparison of shewhart-type time-between-events control charts based on the renewal process [J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 113683–113701.
- [3] LUCAS J M. Counted data CUSUM's [J]. *Technometrics*, 1985, 27(2): 129–144.
- [4] AZAM M, ASLAM M, JUN C H. An EWMA control chart for the exponential distribution using repetitive sampling plan [J]. *Operations Research and Decisions*, 2017, 27(2): 5–19.
- [5] HUANG S, YANG J, XIE M. A study of control chart for monitoring exponentially distributed characteristics based on type-II censored samples [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2017, 33(7): 1513–1526.
- [6] SHAFAE M S, DICKINSON R M, WOODALL W H, et al. Cumulative sum control charts for monitoring weibull-distributed time between events; CUSUM control charts for weibull-distributed time between events [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2015, 31(5): 839–849.
- [7] ALEVIZAKOS V, KOUKOUVINOS C. A progressive mean control chart for monitoring time between events [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(1): 161–186.
- [8] WU Z, JIAO J, HE Z. A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event [J]. *International Journal of Production Economics*, 2009, 119(1): 24–33.
- [9] HUANG S, YANG J, MUKHERJEE A. Distribution-free

- EWMA schemes for simultaneous monitoring of time between events and event magnitude[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 126: 317–336.
- [10] WU Z, JIAO J X, HE Z. A control scheme for monitoring the frequency and magnitude of an event[J]. *International Journal of Production Research*, 2009, 47(11): 2887–2902.
- [11] QU L, WU Z, KHOO M B, et al. A new control chart for monitoring the event frequency and magnitude[J]. *European J. of Industrial Engineering*, 2014, 8(6): 789.
- [12] MUKHERJEE A, CHENG Y, GONG M. A new nonparametric scheme for simultaneous monitoring of bivariate processes and its application in monitoring service quality[J]. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2018, 15(1): 143–156.
- [13] SANUSI R A, MUKHERJEE A. A combination of Max-type and distance based schemes for simultaneous monitoring of time between events and event magnitudes[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2019, 35(1): 368–384.
- [14] QU L, WU Z, KHOO M B C, et al. A CUSUM scheme for event monitoring[J]. *International Journal of Production Economics*, 2013, 145(1): 268–280.
- [15] WU Z, LIU Y F, HE Z, et al. A cumulative sum scheme for monitoring frequency and size of an event[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2009, 26(6): 541–554.
- [16] SANUSI R A, TEH S Y, KHOO M B C. Simultaneous monitoring of magnitude and time-between-events data with a Max-EWMA control chart[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2020, 142: 106378.
- [17] TALIB A, ALI S, SHAH I. Max-EWMA chart for time and magnitude monitoring using exponentially modified gaussian distribution[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2022, 38(2): 1092–1111.
- [18] AMJADI N, SABRI-LAGHAIE K. Median-rate control chart for simultaneous monitoring of frequency and magnitude of events[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2022, 38(1): 89–109.
- [19] HAQ A. A maximum adaptive exponentially weighted moving average control chart for monitoring process mean and variability[J]. *Quality Technology and Quantitative Management*, 2020, 17(1): 16–31.
- [20] HAQ A, GULZAR R, KHOO M B C. An efficient adaptive EWMA control chart for monitoring the process mean: an efficient adaptive EWMA control chart for monitoring the process mean[J/OL]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2018, 34(4): 563–571.
- [21] ABBAS Z, NAZIR H Z, ABID M, et al. Nonparametric progressive sign chart for monitoring process location based on individual data[J]. *Quality Technology and Quantitative Management*, 2021, 18(2): 225–247.