DOI:10.20033/j.1003-7241.(2025)06-0015-04

约当标准型方法在状态反馈极点配置中的应用

常晓恒，王 健

（武汉科技大学 信息科学与工程学院，湖北 武汉 430081）

摘 要：状态空间中的极点配置是现代控制理论中基本的设计方法之一，对于保证系统的性能具有重要的作用。通过约当标准型一种线性变换来进行极点配置定理的证明并给出新的控制器矩阵设计方法。该方法使学生对于极点配置定理的整个证明过程和控制器矩阵设计都能在一个统一的框架下进行学习，同时可以在教学过程中将复杂抽象的极点配置问题简单化和具体化，更容易让学生理解和掌握极点配置的概念和方法，取得了良好的教学效果。

关键词：状态反馈极点配置；约当标准型；极点配置定理；特征值配置；控制器矩阵设计

中图分类号：TP13　　文献标识码：A　　文章编号：1003－7241(2025)06－0015－04

Application of Jordan Standard Method to State Feedback Pole Assignment

CHANG Xiao-heng, WANG Jian

(School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: Pole assignment in state space is one of the basic design methods in modern control theory, which is of great significance to ensure the performance of the system. This paper proves the pole assignment theorem by using a linear transformation of Jordan standard type and gives a new controller matrix design method. This method enables students to learn the whole proof process of pole assignment theorem and controller matrix design under a unified framework, and simplifies and crystallizes the complex and abstract pole assignment problem in the teaching process, which makes it easier for students to understand and master the concept and method of pole assignment, and achieves good teaching effect.

Keywords: state feedback pole assignment; jordan standard type; pole assignment theorem; eigenvalue configuration; controller matrix design

0 前言

《现代控制理论》是高校本科自动化及相关专业和控制类研究生线性系统理论和最优控制等学位课程的基础课程[1]。在现代控制理论中，状态空间中的极点配置设计方法是基本方法之一，其对于保证系统的性能有重要的意义[2-5]。极点配置问题是通过设计控制器将闭环系统的极点恰好配置在复平面上所期望的位置，以获得所期望的动态性能。如果系统的全部状态变量可测量，可用状态反馈控制的方式，将闭环系统的极点配置在复平面的任何期望位置，即为状态反馈极点配置。

极点配置定理在控制系统极点配置中起着非常重要的作用。对于一个控制系统，如果想对其用状态反馈进行任意的极点配置，前提条件是该系统必须满足极点配置定理。在现有的《现代控制理论》教材中，针对极点配置定理，其必要性和充分性的证明通常采用了能控性分解和能控标准型两种线性变换[6-8]。这样在教学环节中，讲授极点配置定理的证明时首先要回顾这两种不同的线性变换，而这两种线性变换方式和作用有着很大的不同，在一定程度上容易造成学生对知识点的混淆。同时，在现有的教材中对于极点配置定理的证明还存在另外两个问题，一个是采用能控性分解来证明极点配置定理的必要性[9-10]，对问题的阐释没有细化，同时直接采用反证法会给学生的理解带来一定的困难；一个为采用能控标准型来证明极点配置定理的充分性[11-12]，但此处的讨论会使得学生在学习过程中产生疑惑，即为什么要使用能控标准型以及是不是只有能控标准型才可以进行极点配置。

本文针对系统的极点配置问题，采用线性变换中的约当标准型讨论极点配置定理的证明和控制器设计。和已有的教学内容中采用能控标准型方法相比较，本文提出的方法的优点在于，首先对于极点配置定理证明中的必要性和充分性都使用约当标准型这一种线性变换，使学生对于极点配置定理的整个证明过程和控制器矩阵设计都能在一个统一的框架下学习，避免知识点的混淆；其

*基金项目：湖北本科高校省级教学改革研究项目(2023240)；武汉科技大学教学研究项目(2023Z021)；武汉科技大学研究生教育教学改革研究项目(Yjg202308)

收稿日期：2024-05-31

次，可以将极点问题简单化和具体化，更容易理解极点配置的基本概念和原理；再次，采用新的方法来证明极点配置定理和设计控制器矩阵，更容易突出极点配置的思路和方法，有效地解答学生们对于现有极点配置方法学习过程的疑惑。在教学过程中，本文提出的方法可以使得复杂的极点配置问题更加通俗易懂，便于学生充分接受和理解极点配置的概念、分析过程以及容易掌握控制器矩阵的设计方法，使得学生在听课过程中思路清晰、对知识内容的理解更加有理有据。

1 极点配置定理

假设单入系统：

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1}$$

式中，x为系统状态，是n维列向量、u为系统输入，是标量；A为$n \times n$维系统矩阵、b为$n \times 1$维输入矩阵。

系统(1)的极点配置问题即为通过控制方式u，将闭环系统的极点配置在复平面期望的位置上。如果系统(1)的全部状态变量是可测量的，则可以利用状态反馈控制的方式，计算相应的控制反馈矩阵，使得闭环系统的极点满足指定的要求。

考虑状态反馈控制方式，即：

$$u = kx + v \tag{2}$$

式中，v为标量参考输入，k为$1 \times n$维控制器矩阵。由式(1)，式(2)，可得闭环系统。

$$\dot{x} = (A + bk) + bv \tag{3}$$

系统(1)的状态反馈极点配置问题即为设计控制器矩阵k将闭环系统(3)的极点配置在复平面期望的位置上。由于闭环系统(3)的极点也是矩阵$A+bk$的特征值，系统(1)的状态反馈极点配置问题等价于矩阵$A+bk$的特征值配置问题。系统(1)进行状态反馈极点配置需要满足如下的极点配置定理。

极点配置定理：系统(1)利用状态反馈(闭环系统矩阵$A+bk$)可以进行任意极点(特征值)配置的充分必要条件是该系统能控。

采用线性变换中的约当标准型方法对极点配置定理进行证明，同时在充分性的证明过程中给出控制器矩阵的设计方法。

2 约当标准型在极点配置中的应用

对于极点配置定理的证明可以从讨论矩阵$A+bk$的特征值配置入手。由于实际系统(1)中的参数矩阵A和b为任意形式的，如果直接从A和b讨论矩阵$A+bk$的特征值配置问题会很复杂。为了解决这个问题，本文采用约当标准型方法。

考虑由系统矩阵A的特征向量构造的非奇异矩阵P，利用线性变换：

$$x = P\tilde{x} \tag{4}$$

将闭环系统(3)变换为：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= P^{-1}(A + bk)P\tilde{x} + P^{-1}bv \\ &= (P^{-1}AP + P^{-1}bkP)\tilde{x} + P^{-1}bv\end{aligned} \tag{5}$$

式中，矩阵$P^{-1}AP$为矩阵A的约当标准型矩阵，针对矩阵A特征值无重根的情况，假定为n个单根$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则

$$P^{-1}AP = diag\{\lambda_1 \ \ \lambda_2 \cdots \lambda_j \cdots \lambda_n\} \tag{6}$$

其中，$diag(\cdot)$表示对角矩阵。

由于线性变换不会改变系统的特征值，所以矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$和矩阵$A+bk$的特征值是相同的，那么矩阵$A+bk$的特征值配置等价于矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征值配置。由于约当标准型矩阵$P^{-1}AP$具有简单的对角结构(6)或三角结构(有重根的情况)，讨论矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征值配置会变得相对简单。

定义

$$\begin{aligned}P^{-1}b &= (\tilde{b}_1 \ \ \tilde{b}_2 \cdots \tilde{b}_j \cdots \tilde{b}_n)^T, \\ kP &= (k_1 \ \ k_2 \cdots k_j \cdots k_n)\end{aligned} \tag{7}$$

考虑单根情况(6)，得到闭环系统(5)中的系统矩阵为：

$$P^{-1}AP + P^{-1}bkP = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \tilde{b}_1 k_1 & \tilde{b}_1 k_2 & \cdots & \tilde{b}_1 k_j & \cdots & \tilde{b}_1 k_n \\ \tilde{b}_2 k_1 & \lambda_2 + \tilde{b}_2 k_2 & \cdots & \tilde{b}_2 k_j & \cdots & \tilde{b}_2 k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_j k_1 & \tilde{b}_j k_2 & \cdots & \lambda_j + \tilde{b}_j k_j & \cdots & \tilde{b}_j k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_n k_1 & \tilde{b}_n k_2 & \cdots & \tilde{b}_n k_j & \cdots & \lambda_n + \tilde{b}_n k_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

通过讨论矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征值配置分析矩阵$A+bk$的特征值配置，对极点配置定理进行证明并给出控制器矩阵设计方法。

(1) 必要性。如果参数$\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n$中有为零的，假定$\tilde{b}_j=0$，那么(5)中的系统矩阵的其特征值行列式为

$$\begin{aligned}&\left|\lambda I - P^{-1}AP - P^{-1}bkP\right| = (\lambda - \lambda_j) \times \\ &\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 - \tilde{b}_1 k_1 & -\tilde{b}_1 k_2 & \cdots & -\tilde{b}_1 k_n \\ -\tilde{b}_2 k_1 & \lambda - \lambda_2 - \tilde{b}_2 k_2 & \cdots & -\tilde{b}_2 k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{b}_n k_1 & -\tilde{b}_n k_2 & \cdots & \lambda - \lambda_n - \tilde{b}_n k_n \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

从式(9)可知，无论参数$k_1, k_2, \cdots, k_n$取何值，矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的第j个特征值都为λ_j，即当$\tilde{b}_j=0$时矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$不能进行任意的特征值配置。

将上述结论以另外一个角度来进行解释，式(9)写成特征多项式的形式：

$$\begin{aligned}&\left|\lambda I - (P^{-1}AP + P^{-1}bkP)\right| = \\ &\lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1}(k)\lambda^{n-1} + \tilde{\alpha}_{n-2}(k)\lambda^{n-2} + \cdots \tilde{\alpha}_0(k)\end{aligned} \tag{10}$$

根据拉普拉斯展开定理可知，特征多项式系数$\tilde{\alpha}_{n-1}(k)$，$\tilde{\alpha}_{n-2}(k)$，…，$\tilde{\alpha}_0(k)$中都不包含参数k_j。在对矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$进行特征值配置时，假定α^*_{n-1}，α^*_{n-2}，…，α^*_0为期望的特征值对应的特征多项式系数，那么需要设计除了k_j以外的$n-1$个未知数来满足$\tilde{\alpha}^*_{n-1}(k)=\alpha^*_{n-1}$，$\tilde{\alpha}^*_{n-2}(k)=\alpha^*_{n-2}$，…，$\tilde{\alpha}_0(k)=\alpha^*_0$共计$n$个方程。明显地，这$n$个方程只有在特殊情况下才会有解，也就是此时矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$不能进行任意的特征值配置。

同样道理，当$\tilde{b}_1$，$\tilde{b}_2$，…，$\tilde{b}_n$中其他参数有为零时，矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$也不能进行任意的特征值配置。按照能控性的判据，当系统(1)特征值无重根时$\tilde{b}_1$，$\tilde{b}_2$，…，$\tilde{b}_n$任一为零就意味着系统是不能控的，这就是说如果系统(1)不能控，则矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$不能进行任意的特征值配置。

上述讨论了，矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$可以进行任意特征值配置的前提条件是系统(1)是能控的。因此可以说矩阵$A+bk$可以进行任意特征值配置的前提条件是系统(1)是能控的。需要注意的是，这个结论对于系统(1)中系统矩阵A有重根的情况同样是成立的。

(2) 充分性。当系统(4)中$\tilde{b}_1$，$\tilde{b}_2$，…，$\tilde{b}_n$都不为零时系统(1)是能控的，此时矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征多项式为：

$$\begin{aligned}&\left|\lambda I-P^{-1}AP-P^{-1}bkP\right|=\\&\lambda^n+\tilde{\alpha}_{n-1}(k)\lambda^{n-1}+\tilde{\alpha}_{n-2}(k)\lambda^{n-2}+\cdots\tilde{\alpha}_0(k)\end{aligned}\tag{11}$$

式中，特征多项式系数$\tilde{\alpha}_{n-1}(k)$，$\tilde{\alpha}_{n-2}(k)$，…，$\tilde{\alpha}_0(k)$中包含k_1，k_2，…，k_n全部的n个参数。将$\tilde{\alpha}_{n-1}(k)$，$\tilde{\alpha}_{n-2}(k)$，…，$\tilde{\alpha}_0(k)$改写成矩阵形式有：

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_{n-1}(k)\\\tilde{\alpha}_{n-2}(k)\\\vdots\\\tilde{\alpha}_0(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\tilde{b}_1&-\tilde{b}_2&\cdots&-\tilde{b}_n\\\tilde{\lambda}_1\tilde{b}_1&\tilde{\lambda}_2\tilde{b}_2&\cdots&\tilde{\lambda}_1\tilde{b}_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\vec{\lambda}_1\tilde{b}_1&\vec{\lambda}_2\tilde{b}_2&\cdots&\vec{\lambda}_n\tilde{b}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}+\\&\begin{pmatrix}-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots\lambda_n\\\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\lambda_n+\lambda_2\lambda_3+\cdots\lambda_2\lambda_n+\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n\\\vdots\\(-1)^n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{12}$$

式中，$\tilde{\lambda}_1=\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n$，$\tilde{\lambda}_2=\lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_n$，$\tilde{\lambda}_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}$，$\vec{\lambda}_1=(-1)^n\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\vec{\lambda}_2=(-1)^n\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n$，$\vec{\lambda}_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$。在特征值配置时，需要求解出$k_1$，$k_2$，…，$k_n$共计$n$个未知数来满足$\tilde{\alpha}_{n-1}(k)=\alpha^*_{n-1}$，$\tilde{\alpha}^*_{n-2}(k)=\alpha^*_{n-2}$，…，$\tilde{\alpha}_0(k)=\alpha^*_0$这$n$个方程，即可通过式(12)对$k_1$，$k_2$，…，$k_n$进行求解。

由于系统(1)是能控的，即式(4)中λ_1，λ_2，…，λ_n互异且式(7)中$\tilde{b}_1$，$\tilde{b}_2$，…，$\tilde{b}_n$没有为零的，这也就意味着参数矩阵：

$$B=\begin{pmatrix}-\tilde{b}_1&-\tilde{b}_2&\cdots&-\tilde{b}_n\\\tilde{\lambda}_1\tilde{b}_1&\tilde{\lambda}_2\tilde{b}_2&\cdots&\tilde{\lambda}_n\tilde{b}_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\vec{\lambda}_1\tilde{b}_1&\vec{\lambda}_2\tilde{b}_2&\cdots&\vec{\lambda}_n\tilde{b}_n\end{pmatrix}\tag{13}$$

是非奇异的。那么，对于任意指定的特征多项式系数α^*_{n-1}，α^*_{n-2}，…，α^*_0，都可以利用下式：

$$\begin{aligned}&\hat{k}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=B^{-1}\left(\begin{pmatrix}\alpha^*_{n-1}\\\alpha^*_{n-2}\\\vdots\\\alpha^*_0\end{pmatrix}-\right.\\&\left.\begin{pmatrix}-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\cdots-\lambda_n\\\lambda_1\lambda_2+\cdots\lambda_1\lambda_n+\lambda_2\lambda_3\cdots+\lambda_2\lambda_n+\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n\\\vdots\\(-1)^n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n\end{pmatrix}\right)\end{aligned}\tag{14}$$

获得未知数k_1，k_2，…，k_n的唯一解。根据式(7)和式(14)，给出最终的控制器矩阵

$$k=\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_j&\cdots&k_n\end{pmatrix}P^{-1}=\hat{k}^TP^{-1}\tag{15}$$

上述的讨论说明如果系统(1)是能控的，对于任意指定的特征多项式系数α^*_{n-1}，α^*_{n-2}，…，α^*_0都可以通过式(20)设计控制器矩阵k使得矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征多项式系数为α^*_{n-1}，α^*_{n-2}，…，α^*_0，由于矩阵$A+bk$的特征值配置等价于矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征值配置，也就是可以通过式(20)设计控制器矩阵k使得矩阵$A+bk$的特征多项式系数为α^*_{n-1}，α^*_{n-2}，…，α^*_0。因此可以得出结论，说明如果系统(1)是能控的，就可以设计控制器矩阵对矩阵$A+bk$进行任意的特征值配置。这个结论对于特征值为重根的情况依然成立，读者可以自行推导。至此，极点配置定理的充分性得证。

注1：与现有理论不同，本文对极点配置定理的证明都采用了约当标准型，并在证明必要性时逐步深入将极点配置问题详细化，突出统不能控就不能进行任意极点配置的思想。且控制器矩阵设计过程中只采用了一种线性变换，使学生始终在一个统一的框架下进行学习，这在一定程度上可以避免对于知识点的混淆。

注2：本文基于线性变换不会改变系统的特征值这一特性。采用线性变换，将矩阵$A+bk$的特征值配置等价为矩阵$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$的特征值配置，而$P^{-1}AP+P^{-1}bkP$中矩阵参数$P^{-1}AP$和$P^{-1}b$具有简单而又标准的形式，可以更容易地进行极点配置问题分析和控制器矩阵设计。本文的讨论突出极点配置的原理和方法，同时可以让学生容易理解为什么在系统极点配置时要采用线性变换方法。

注3：本文采用的是约当标准型方法来证明充分性，式(15)的控制器矩阵设计是一种新的设计方法，这可以让学生容易知道不只是能控标准型才可以进行极点配置，本文的约当标准型也提供了一种极点配置的方法。当然，对于一个系统和指定的极点，所需要的控制器矩阵应该是唯一的，因此本文方法设计的控制器矩阵和利用能

(下转第131页)