

## 基于多项式求根的中途鲁棒波束形成算法

许志恒

(扬州工业职业技术学院,江苏扬州 225127)

**摘要:**数字波束形成技术(digital beam forming, DBF)是构建智能天线系统的主要技术之一,而中途算法(mid-way, MW)是作为一种典型的全自动算法,对阵列误差具有良好的鲁棒性。针对中途算法面对阵列误差时如何提升鲁棒性的问题,文章提出了一种基于多项式求根的中途算法,将原算法的定义域(即对角加载量)从非负实数域拓展到了整个实数域,仿真结果表明,多项式求根解法提高了算法的运算速度,同时算法的输出信干噪比(signal to interference plus noise ratio, SINR)指标也得到了提升。

**关键词:**数字信号处理;多项式求根;鲁棒性;中途算法;数字波束形成技术;阵列误差

中图分类号: TP274; TN971.1

文献标志码: A

文章编号: 1003-7241(2025)12-0006-04

## Polynomial-rooting-based solution to the mid-way robust adaptive beamforming algorithm

XU Zhiheng

(Yangzhou Polytechnic Institute, Yangzhou 225127, China)

**Abstract:** The digital beam forming (DBF), which is among the core techniques of smart antenna systems, one of the representative robust beamforming algorithms is mid-way (MW) method in the Pisarenko framework, which can be implemented in a fully automatic manner. Aiming at the problem of how to improve the robustness of the midway algorithm in the face of array errors, this paper proposes a polynomial root based midway algorithm, which extends the original algorithm's definition domain (i. e. diagonal loading) from the nonnegative-valued real domain to the full real domain. Simulation results show that the polynomial root solution improves the operation speed of the algorithm, and the output signal-to-interference-plus-noise-ratio (SINR) values of the algorithm is also improved.

**Keywords:** digital signal processing; polynomial rooting; Robustness; midway algorithm; digital beam forming; array errors

## 0 引言

数字波束形成(DBF)技术是天线阵列信号处理的关键技术之一,在实现增强有用信号信噪比(signal to noise ratio, SNR)的同时,可以抑制同信道其他信号的干扰<sup>[1-5]</sup>。DBF技术的研究始于二战前后 Bartlett 提出的将谱分析应用于空-时数据<sup>[6]</sup>(即 Bartlett 波束形成器),用于在噪声环境中增强有用信号。随着无线电频谱的日益拥堵,同信道干扰问题愈加严重,DBF算法对抑制干扰的需求得到广泛关注。Capon 滤波器可以实现最大的输出信干噪比(SINR)<sup>[7-8]</sup>。然而,面对实际存在的阵列误差,Capon 滤波器会出现明显的性能下降,通常引入对角加载(diagonal loading, DL)方法进行修正<sup>[9-12]</sup>,降低其特征值扩散(eigenvalue spread, ES)<sup>[13]</sup>程度,从而降低其对阵列误差的敏感度。

截至目前,仅有少数算法实现了在不需要设置辅助参数(例如不确定集的大小)的情况下计算 DL 量。大部分算法的重点集中在了提高有限样本下的协方差矩阵的估

计精度上<sup>[14-15]</sup>,而 Stoica 等独辟蹊径,基于 Pisarenko 功率估计<sup>[16]</sup>框架提出了中途(MW)算法<sup>[17]</sup>,极大地提高了算法同时应对协方差矩阵误差和导向矢量(stearing vector, SV)误差的能力。

本文针对中途算法,提出了其多项式求根解法,以期在提升算法的运算速度的同时,将对角加载量的取值范围从非负实数扩大为整个实数域,因而算法性能也有望得到提升。

## 1 数学模型

假设天线阵列由  $N$  路阵元/射频通道/数字通道组成,每一路的同向正交信号(in-phase-quadrature, IQ)采样数据分别为  $x_n[l] \in \mathbb{C}$ ,其中,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $l$  为训练波束形成器的 IQ 点数,  $l = 1, 2, \dots, L$ , 将其排列为矢量,得到阵列输出矢量  $x[l] \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 。假设加权矢量为  $w \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,有用信号的导向矢量的标称值为  $\bar{a} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,经典 Capon 滤波器<sup>[7]</sup>的代价函数为

$$\min_w w^H \hat{R} w \quad \text{s. t. } w^H \bar{a} = 1 \quad (1)$$

其中,  $(\cdot)^H$  表示共轭转置,  $\hat{R}$  为阵列协方差矩阵在有限样

\*基金项目:2023年江苏省产学研合作项目(BY20231472);2023年扬州市校企合作横向课题(2023321001000552)

收稿日期:2024-05-16

本情况下的估计值,即

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}[l] \mathbf{x}^H[l] \quad (2)$$

利用拉格朗日方法,可以解出 Capon 加权矢量为

$$\mathbf{w} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \quad (3)$$

其中,  $(\cdot)^{-1}$  表示逆矩阵。令  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值分解为

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H = \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \quad (4)$$

其中,  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  为特征值,  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  为特征向量,并且

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (5)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} \\ \mathbf{u}_n^H \mathbf{u}_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{u}_m^H \mathbf{u}_n = 0, \quad m \neq n \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\text{diag}(\cdot)$  表示对角矩阵,  $\mathbf{I}$  代表单位矩阵。于是有

$$\mathbf{w} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \quad (9)$$

由上式可以看出,  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值扩散(即  $\lambda_1/\lambda_N$ ) 较大时,  $\bar{\mathbf{a}}$  中的误差将会在  $\mathbf{w}$  中放大,导致  $\mathbf{w}$  取值不稳定<sup>[9]</sup>。在信噪比较高、干扰较强时,经常出现  $\lambda_1 \gg \lambda_N$  的情况,导致经典 Capon 滤波器的性能下降。解决上述问题的方法之一是采用对角加载方法,令

$$\mathbf{w}(\mu) = \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \quad (10)$$

其中,  $\mu \in \mathbb{R}$  为对角加载量。此时,  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值扩散被降低到了  $(\lambda_1 + \mu)/(\lambda_N + \mu)$ , 可以有效降低误差的影响。全自动 DBF 算法的优化问题即是确定合理有效的  $\mu$  的取值。

中途算法的思路是寻找对角加载量  $\mu$ , 使得滤波器的输出功率  $\mathbf{w}^H(\mu) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}(\mu)$  等于某一特定值,即

$$\mathbf{w}^H(\mu) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}(\mu) = \sigma \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{w}(\mu) = \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \quad (11)$$

其中,  $\sigma$  为功率值。在 Pisarenko 框架下,有用信号的功率估计为<sup>[16]</sup>

$$p(k) = \begin{cases} [\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}})^k \bar{\mathbf{a}}]^{1/k}, & k \neq 0 \\ \exp[\bar{\mathbf{a}}^H \ln(\hat{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{a}}], & k = 0 \end{cases} \quad (12)$$

因此可得计算公式为

$$\begin{cases} w(0) = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbf{w}(\mu) = \bar{\mathbf{a}} \end{cases} \quad (13)$$

这说明,当  $k = -1$  时, Pisarenko 功率对应的算法为经典 Capon 波束形成器,对角加载量  $\mu$  等于零;当  $k = 1$  时, Pisarenko 功率对应的算法为 Bartlett 滤波器,对角加载量  $\mu$  趋近于无穷大。在存在中等或者较小阵列误差的情况下,两种功率估计值一个偏大,一个偏小,在无更多先验知识的情况下, Pisarenko 中途算法认为位于中途(即  $k = 0$ ) 的功率估计更为合理,即按照如下原则估计对角加载量<sup>[17]</sup> 计算公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^H(\mu) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}(\mu) = \sigma = p(0) \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{w}(\mu) = \\ \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \end{aligned} \quad (14)$$

该问题可以采用拉格朗日-牛顿迭代方法进行求解,详见文献[17]。

## 2 基于多项式求根的中途算法

注意到,式(14)可以转化为如下的最小化问题为

$$\begin{aligned} \min f(\mu) = [\mathbf{w}^H(\mu) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}(\mu) - \sigma]^2 \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{w}(\mu) = \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}} \end{aligned} \quad (15)$$

这是一个关于  $\mu$  的单变量函数,可以考虑将其转化为多项式优化问题。将  $\mathbf{w}(\mu)$  代入  $f(\mu)$  可得

$$f(\mu) = \left( \frac{\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{R}} (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{(\bar{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}})^2} - \sigma \right)^2 \quad (16)$$

然后将式(4)代入上式,并利用式(5)~(8)进行化简可得

$$f(\mu) = \left( \frac{\bar{\mathbf{a}}^H \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H}{\lambda_n + \mu} \right) \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H}{\lambda_n + \mu} \right) \bar{\mathbf{a}}}{\left[ \bar{\mathbf{a}}^H \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H}{\lambda_n + \mu} \right) \bar{\mathbf{a}} \right]^2} - \sigma \right)^2 \quad (17)$$

令  $b_n = \mathbf{u}_n^H \bar{\mathbf{a}}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 并对分子分母进行通分,后进一步整理可得

$$\begin{aligned} f(\mu) = & \left( \sum_{n=1}^N (\lambda_n |b_n|^2 \cdot \prod_{r=1, r \neq n}^N (\lambda_r + \mu)^2) \right)^2 \\ & - 2\sigma \cdot \left( \sum_{n=1}^N (\lambda_n |b_n|^2 \cdot \prod_{r=1, r \neq n}^N (\lambda_r + \mu)^2) \right) \cdot \\ & \left( \sum_{n=1}^N [|b_n|^2 \cdot \prod_{r=1, r \neq n}^N (\lambda_r + \mu)] \right)^2 + \\ & \sigma^2 \cdot \left( \sum_{n=1}^N (|b_n|^2 \cdot \prod_{r=1, r \neq n}^N (\lambda_r + \mu)) \right)^4 / \\ & \left( \sum_{n=1}^N (|b_n|^2 \cdot \prod_{r=1, r \neq n}^N (\lambda_r + \mu)) \right)^4 = \\ & \frac{g_1(\mu)}{g_2(\mu)} \end{aligned} \quad (18)$$

由上式可知,关于对角加载量  $\mu$  的优化问题  $f(\mu)$  已经转化为求解多项式分式  $g_1(\mu)/g_2(\mu)$  的极值。

为了求解  $f(\mu)$  的极值点,需计算  $f(\mu)$  的导数并令其等于零,为

$$f'(\mu) = \frac{g_1'(\mu)g_2(\mu) - g_1(\mu)g_2'(\mu)}{g_2^2(\mu)} = \frac{e(\mu)}{g_2^2(\mu)} = 0 \quad (19)$$

易知,  $f'(\mu)$  的分子  $e(\mu)$  是关于  $\mu$  的  $(8N-9)$  阶多项式,记它的系数序列为正体字母  $e$ ,长度为  $(8N-8)$ ,则

$$e = g_3 \times g_2 - g_4 \times g_1 \quad (20)$$

其中,正体字母  $g_3$  和  $g_4$  分别是  $(4N-5)$  阶多项式  $g_1(\mu)$  和  $g_2(\mu)$  的系数序列,长度均为  $(4N-4)$ ,并且

$$g_3[n] = (4N-3-n) \cdot g_1[n], \quad n = 1, 2, \dots, 4N-4 \quad (21)$$

$$g_4[n] = (4N-3-n) \cdot g_2[n], \quad n = 1, 2, \dots, 4N-4 \quad (22)$$

对系数序列  $e$  所代表的  $(8N-9)$  阶多项式进行多项式求根,可以求解出对角加载量  $\mu$ 。由于该多项式为奇数阶、实系数的多项式,至少存在一个实根。如果解出了多个实根,应选取使得 (15) 中的代价函数最小的实根。

注意到:

1) 本文算法是在实数域中寻找合适的对角加载量  $\mu$ 。根据文献 [18],使得输出信干噪比最大的最优加载量应为负值。由于中途算法采用了拉格朗日-牛顿法进行优化,导致其在负实数域进行搜索时会出现矩阵奇异(即“秩亏”)的情况,因此其初始化通常在正实数域进行,收敛结果也停留在正实数域。

2) 但是这并不意味着本文算法解出的对角加载量一定为负值。这是因为 Pisarenko 中途功率估计值虽然优于 Capon 和 Bartlett 功率估计,但并不完全准确;即使准确,使得功率估计最准确和输出信噪比最大的对角加载量也并非完全一致。

### 3 计算机仿真

本节给出计算机仿真示例验证本文提出的解法的有效性。仿真场景为由一个六阵元均匀线性天线阵列天线,天线间距为半个波长。有用信号(signal-of-interest, SOI)为来自于 0 度方向图例(middle)  $0^\circ$ , SOI, 两个同信道干扰分别来自于 30 度图例(right)  $30^\circ$ , Int 和  $-40$  度方向图例(left)  $40^\circ$ , Int, 信干比均为  $-20$  dB, 训练 IQ 数据长度为 8 192 点,指向及阵列误差设定为:存在 2 度的有用信号测向误差,校准后的通道相位一致性优于 6 度,天线阵元安装误差优于 1%。

图 1 给出了当信噪比为 25 dB 时,本文提出的算法(图例 Proposed 曲线)与 Pisarenko 中途算法(图例 MW 曲线)的波束方向图,其中两种算法计算出的对角加载量分别为  $-25\ 214.88$  和  $35\ 035.21$ 。可以看出,两种算法的主瓣比较接近,而本文算法对于干扰形成的零陷更深。

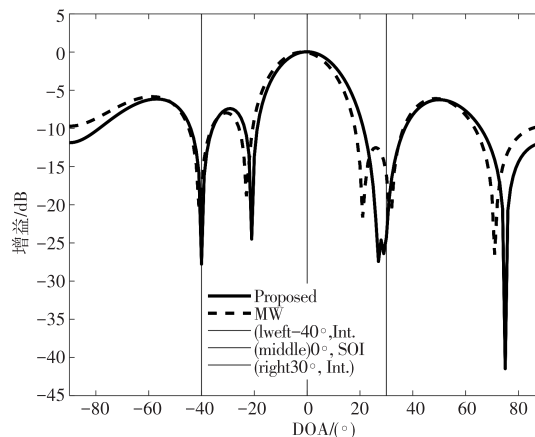


图 1 波束方向图

图 2 展示了本文提出的解法和经典 Capon 算法 [7]、霍尔-坎纳德-鲍德温(hoerl-kannard-baldwin, HKB)算法 [14]、广义线性组合(generalized linear combination, GLC)算法 [15]、MW [17] 的输出 SINR 随着输入 SNR 的变化曲线,独立重复实验次数为 3 000 次。从图中可以看出,本文提出算法的性能指标在上述算法中性能最优,尤其是相对于 MW 算法有所提升,这可能是由于本文算法是在整个实数域寻找最优解的,而 MW 算法则限定在了非负实数范围。

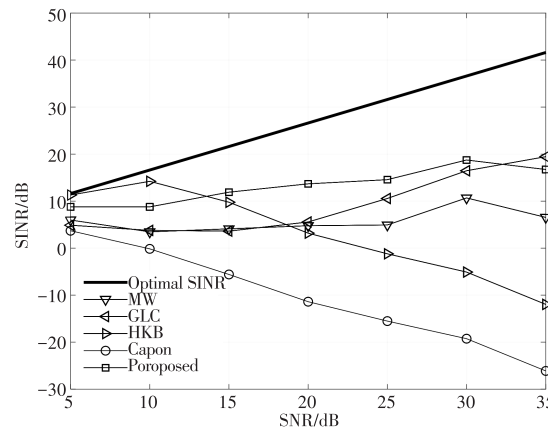


图 2 输出 SINR 随着输入 SNR 的变化曲线

在进行上述性能指标仿真实验的同时也记录了上述解法的运算时间,平均运算时间随着输入 SNR 的变化曲线如图 3 所示。从图中可以看出,本文算法的运算时间低于原算法,而且运算时间随着输入 SNR 的变化基本保持稳定。这是由于本文算法涉及到的主要步骤为特征值分解、多项式系数计算、多项式求根等,均可以视为闭式运算,而 MW 算法的优化方式为拉格朗日-牛顿方法,其运算量受到起始点选取和代价函数曲线形状的影响,算法的收敛时间存在起伏。GLC 算法除了需要计算协方差矩阵之外,还需要对训练 IQ 数据本身进行遍历求和操作,耗时较长;相比之下,HKB 算法计算时间可以忽略不计。

图 4 和图 5 分别给出了上述算法的输出信干噪比和运算时间随着训练 IQ 数据长度的变化曲线,主要结论与图 2 和图 3 相同,不再赘述。

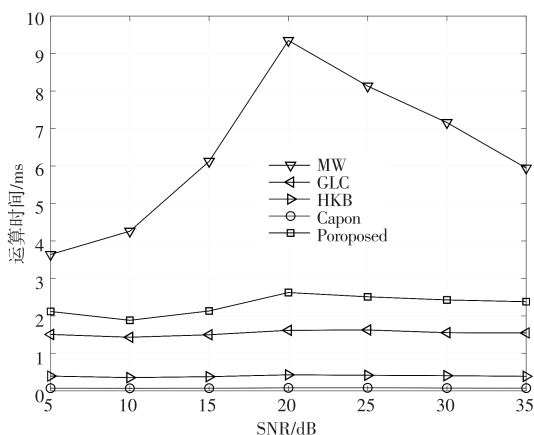


图3 运算时间随着输入 SNR 的变化曲线

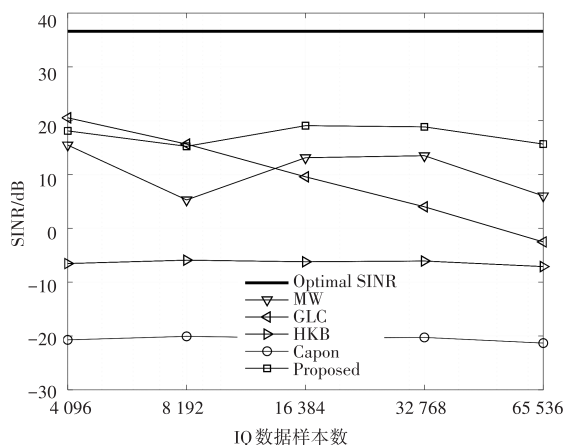


图4 输出 SINR 随着训练 IQ 数据长度的变化曲线

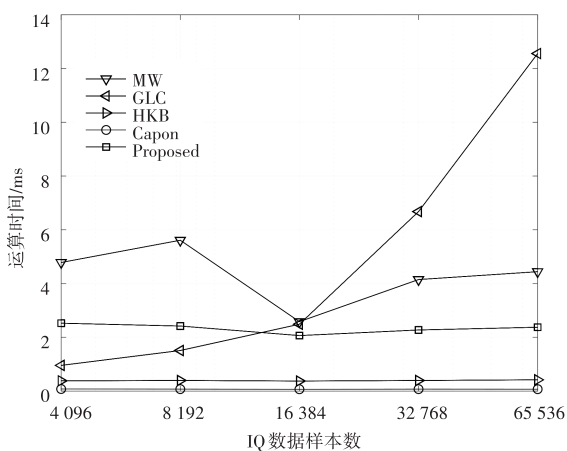


图5 运算时间随着训练 IQ 数据长度的变化曲线

## 4 结束语

本文提出了基于多项式求根的 Pisarenko 中途波束形成算法,在加快其运行速度的同时,性能上有所提升。算法思路为:借助于特征值分解,将对角加载后的协方差矩阵求逆问题转换为分式多项式的优化问题,该思路可为类似信号处理问题的求解提供借鉴。

此外,该算法只涉及特征值分解、序列卷积和多项式

求根等基本数学运算,便于其在现场可编程门阵列 (field-programmable-gate-array, FPGA) 等数字信号处理硬件中实现,具有良好的工程应用前景。

## 参考文献

- [1] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.
- [2] 詹毅,程强,王文勇. 智能天线技术及应用研究评述[J]. 中国电子科学研究院学报, 2007, 2(6): 549-555.
- [3] 叶恺,禹卫东,王伟. DEM 数据辅助的星载 SAR 仰向数字波束形成[J]. 遥感学报, 2019, 23(5): 850-858.
- [4] 李智,叶君永,马达,等. 宽带二维阵列数字波束形成优化组阵方法分析[J]. 电子信息对抗技术, 2019, 34(5): 62-66, 81.
- [5] 张鸿伟,汤建龙,冯宗盛,等. 基于 2 阶锥规划的雷达干扰宽带数字波束形成优化设计[J]. 兵工学报, 2018, 39(11): 2185-2191.
- [6] BARTLETT M S. Smoothing periodograms from time-series with continuous spectra[J]. Nature, 1948, 161(4096): 686-687.
- [7] CAPON J. High-resolution frequency-number spectrum analysis [J]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [8] MARZETTA T L. A new interpretation for capon's maximum likelihood method of frequency-wavenumber spectral estimation [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1983, 31(2): 445-449.
- [9] COX H, ZESKIND R M, OWEN M M. Robust adaptive beamforming [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(10): 1365-1375.
- [10] 王荔,徐友根,刘志文. 一种四元数域鲁棒自适应波束形成方法[J]. 中国电子科学研究院学报, 2017, 12(2): 132-136.
- [11] 冯晓宇,谢军伟,张晶,等. 改进的稳健 Capon 波束形成算法性能分析[J]. 现代雷达, 2018, 40(9): 32-35, 39.
- [12] 曹欣荣,吴久涛,陈亚伟,等. 基于指向最小误差的宽带稳健波束形成方法[J]. 现代雷达, 2017, 39(9): 38-41, 56.
- [13] THOMPSON R C. The eigenvalue spreads of a hermitian matrix and its principle submatrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1992, 32(3/4): 327-333.
- [14] HOERL A E, KANNARD R W, BALDWIN K F. Ridge regression: some simulations[J]. Communication in Statistics: Theory and Methods, 1975, 4(2): 105-123.
- [15] DU L, LI J, STOICA P. Fully automatic computation of diagonal loading levels for robust adaptive beamforming [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(1): 449-458.
- [16] PISARENKO V F. On the estimation of spectra by means of non-linear functions of the covariance matrix[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1972, 28(5): 511-531.
- [17] STOICA P, LI J, TAN X. On spatial power spectrum and signal estimation using the pisarenko framework[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10): 5109-5119.
- [18] VINCENT F, BESSON O. Steering vector errors and diagonal loading [J]. IEEE Proceedings of Radar, Sonar and Navigation, 2004, 151(6): 337-343.

作者简介:许志恒(1982—),男,硕士,讲师,研究方向:信号处理、信号的检测与识别。