

DOI:10.20033/j.1003-7241.(2026)04-0053-05

# 变转速下数控机床主轴热误差预测模型研究

王娟, 吴珊

(咸阳职业技术学院, 陕西 咸阳 712000)

**摘要:** 为了构建一种适应变转速工况的数控机床主轴热误差高精度预测模型, 根据研究需要, 在数控机床主轴及相关部位布置 9 个温度传感器, 并设计主轴转速分别为 0、2 000、4 000、6 000、8 000 r/min 的空转实验, 在不同转速下采集 9 个温度测点和主轴热误差的实验数据, 采用单因素多元方差分析、主成分分析、多元二项式回归等方法, 构建数控机床主轴热误差的预测模型, 并进行预测实践验证。结果表明, 转速对热误差的影响是显著的, 综合考虑测点温度、转速等因素构建热误差预测模型, 才能使模型具有较强的适应性。从预测结果来看, 所建模型较为可靠, 可作为变转速下热误差的预测方法。

**关键词:** 热误差; 主轴转速; 单因素多元方差分析; 主成分分析; 多元二项式回归

**中图分类号:** TP274; TH161 **文献标志码:** A **文章编号:** 1003-7241(2026)04-0053-05

## Research on prediction model of thermal error for CNC machine tool under variable speeds

WANG Juan, WU Shan

(Xianyang Polytechnic Institute, Xianyang 712000, Shaanxi, China)

**Abstract:** This study aims to construct a high-precision prediction model for thermal errors of the spindle of a CNC machine tool under variable speed conditions. According to the research requirements, 9 temperature sensors were arranged on the spindle and related parts of the CNC machine tool, and idle running experiments with spindle speeds of 0, 2 000, 4 000, 6 000, and 8 000 r/min were designed, which uses one-way MANOVA, principal component analysis and multivariate binomial regression analysis to construct the prediction model of thermal error for CNC machine tool under variable speeds based on the data of 9 temperature measuring points and the data of thermal error under the different spindle speeds, and performs a predictive analysis. The results show that, the influence of spindle speeds on thermal error is significant, the prediction model of thermal error based on the temperature of measuring points and spindle speeds has strong adaptability; from the prediction results, the model is more reliable and can be used as a prediction method for thermal error under variable speeds.

**Keywords:** thermal error; spindle speed; one-way manova; principal component analysis; multivariate binomial regression

随着高端制造业的快速发展, 人们对加工精度的要求越来越高<sup>[1]</sup>。然而, 在数控机床正常工作过程中, 主轴位置会产生大量热量, 从而导致加工精度降低。有研究表明, 热误差是影响数控机床加工精度的主要因素<sup>[2]</sup>, 热误差约占机床总误差的 40%~70%<sup>[3-5]</sup>。因此, 有效控制和减少热误差对提高数控机床的加工精度有着十分重要的意义。近年来, 关于数控机床主轴热误差的研究不断增加, 尤其体现在主轴热误差的预测建模方面, 如张珂等<sup>[6]</sup>利用 Kmeans++ 聚类结合灰色关联度理论提出基于猎人猎物算法优化极限学习机的建模方法, 杨悦<sup>[7]</sup>提出的最小二乘支持向量机模型, 非云祥<sup>[8]</sup>采用模糊 C-均值聚类和相关性分析方法进行的多元线性回归和多项式拟合算法建模等。这些学者均建立了预测精度较高的模型和方法, 但在变量的选择上, 鲜有将转速纳入变量进行建模的。通

常情况下, 数控机床会在不同参数(转速等)条件下运行, 转速对热误差的影响不容忽视。

文中采用单因素多元方差分析对不同转速下测点温度的差异性进行研究, 明确转速对热误差的影响; 运用主成分分析对数控机床温度测点数据进行降维处理, 避免各测点之间多重共线情况的出现; 综合考虑测点温度、转速等对机床主轴热误差的影响, 基于多元二项式回归函数构建热误差的预测模型, 该模型对不同转速下数控机床主轴热误差预测具有较强的适应性。

## 1 实验设计

本实验采用 Pt100 温度传感器对数控机床主轴及相关部位温升情况进行测量, 共布置 9 个温度传感器, 见图 1。根据研究需要, 设计了主轴转速分别为 0、2 000、

收稿日期: 2025-03-21; 录用日期: 2025-04-18

基金项目: 咸阳市重点研发计划项目(L2024-ZDYF-ZDYF-GY-0029)

作者简介: 王娟(1978—), 女, 硕士, 教授, 研究方向: 统计模型及其应用。

引用本文: 王娟, 吴珊. 变转速下数控机床主轴热误差预测模型研究[J]. 自动化技术与应用, 2026, 45(4): 53-57. (WANG Juan, WU Shan. Research on prediction model of thermal error for CNC machine tool under variable speeds[J]. Techniques of Automation and Applications, 2026, 45(4): 53-57.)

4 000、6 000、8 000 r/min 的空转实验,5 组实验共计 561 组数据,每组数据间隔 5 min 采集,数据内容包括 9 个测点温度(℃)及主轴热误差( $\mu\text{m}$ )。各转速实验次数见表 1。

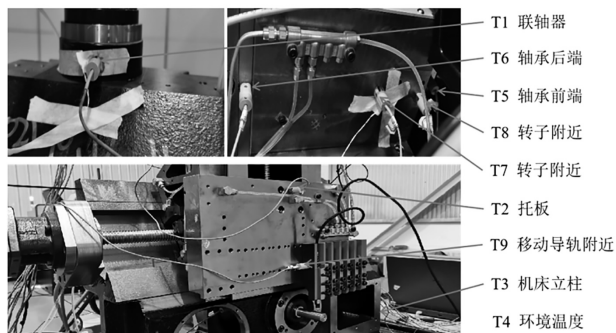


图 1 温度传感器布置图

Fig. 1 Diagram of the arrangement of temperature sensors

表 1 实验设计

Tab. 1 Experimental design

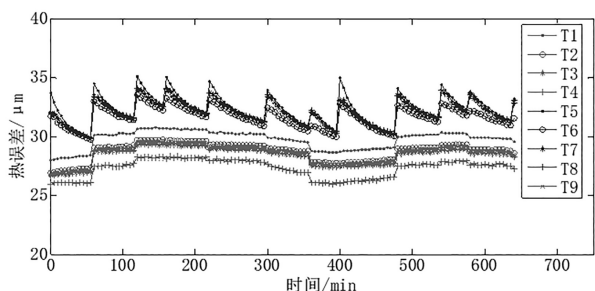
组别	主轴转速/( $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$ )	实验次数
1	0	129
2	2 000	112
3	4 000	88
4	6 000	120
5	8 000	112

## 2 模型准备

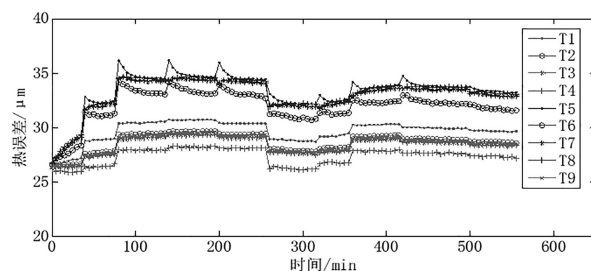
在构建热误差预测模型之前,首先对影响热误差的因素进行识别和分析。单因素多元方差分析是一种用于比较多个组之间的均值差异的常用统计方法,应用此方法可对不同转速下测点温度的差异性进行分析,从而识别转速对各测点温度的影响<sup>[9-10]</sup>。主成分分析又称为主分量分析,旨在利用降维的思想把多指标转化为少数几个综合指标,应用此方法可对 9 个温度测点的数据进行降维处理,避免出现各测点之间多重共线性问题,从而提高模型的精度<sup>[11-12]</sup>。

### 2.1 测点温度单因素多元方差分析

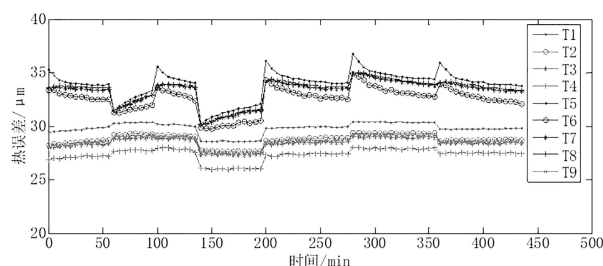
不同转速下各测点温度的曲线如图 2 所示,分别为 0、2 000、4 000、6 000、8 000 r/min 5 种转速下的温度曲线。从 5 幅图不难看出,不同转速的温度曲线存在明显差异,尤其是温度测点 T5、T6、T7、T8 的曲线。下面进行定量分析。



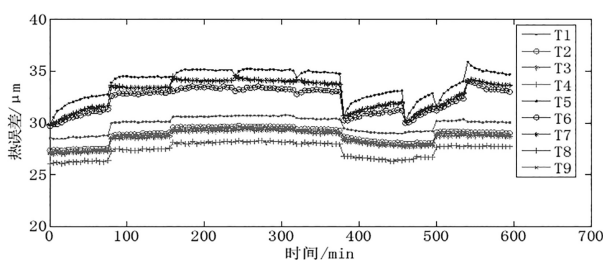
(a) 0 r/min 转速下各测点温度曲线



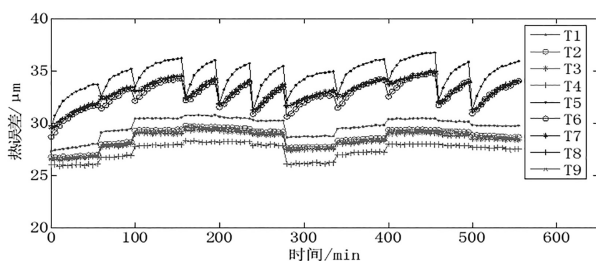
(b) 2 000 r/min 转速下各测点温度曲线



(c) 4 000 r/min 转速下各测点温度曲线



(d) 6 000 r/min 转速下各测点温度曲线



(e) 8 000 r/min 转速下各测点温度曲线

图 2 不同转速下各测点温度曲线

Fig. 2 Temperature curves of 9 temperature measurement points under different spindle speeds

考察转速对各测点温度的影响,利用单因素多元方差分析法对不同转速下测点温度进行差异性分析。整理 9 个温度测点的 561 次实验数据,增加分组变量  $\text{group} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,其中,0 r/min 记为 1,2 000 r/min 记为 2,4 000 r/min 记为 3,6 000 r/min 记为 4,8 000 r/min 记为 5。

调用 MATLAB 中的 `manova1` 函数对整理数据作单因素多元方差分析,取显著性水平  $\alpha = 0.05$ ,计算得: $d = 4$ ;  $p = 0,0,0,0.000\ 000\ 682\ 8$ 。结果表明:不同转速下测点温度组均值不全相同,不同转速对测点温度有显著影响。为进一步明确对哪些测点的温度产生了显著影响,调用 `anova1` 函数对不同转速下 9 个温度测点分别作一元方差分析,得到检验的  $p$  值,结果见表 2。由于 T5、T6、T7、T8

的  $p$  值小于 0.05, T1、T2、T3、T4、T9 的  $p$  值大于 0.05, 所以在显著性水平 0.05 下, 可认为不同转速对温度测点 T5、T6、T7、T8 有显著影响, 对温度测点 T1、T2、T3、T4、T9 无显著影响, 这 and 不同转速下温度测点的曲线特征相吻合。可见, 转速对测点温度有影响, 构建热误差预测模型必须考虑转速这一因素。

表 2 不同转速下 9 个温度测点的  $p$  值检验结果

Tab. 2  $p$ -value test results of 9 temperature measurement points under different spindle speeds

温度测点	检验的 $p$ 值
T1	0.262 9
T2	0.406 2
T3	0.516 3
T4	0.903 9
T5	0
T6	$1.059 1 \times 10^{-10}$
T7	$1.630 3 \times 10^{-11}$
T8	$7.743 8 \times 10^{-13}$
T9	0.320 5

2.2 温度测点的主成分分析

下面运用主成分分析法对温度测点进行降维处理。算法步骤<sup>[13]</sup>如下:

1) 运用  $t = (T - \mu) / \sigma$  对测点温度原始数据进行标准化处理, 其中,  $t$  表示标准化后的值,  $T$  是原始数据点,  $\mu$  是数据集的均值,  $\sigma$  是数据集的标准差。

2) 从相关系数矩阵  $\hat{R} = (r_{ij}), r_{ij} = S_{ij} / (\sqrt{s_{ii}} \cdot \sqrt{s_{jj}})$  求

解主成分  $x_i = P_i \cdot t (i = 1, 2, \dots, 9)$ , 其中  $P_i$  为  $\hat{R}$  的特征值  $\lambda_i$  对应的特征向量。

3) 计算第  $i$  个主成分的贡献率  $\lambda_i / \sum_{j=1}^9 \lambda_j \times 100\%$  及前  $n (n = 1, 2, \dots, 9)$  个主成分的累积贡献率  $\sum_{i=1}^n (\lambda_i / \sum_{j=1}^9 \lambda_j) \times 100\%$ 。一般取累积贡献率达 85% 以上的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  所对应的前  $m$  个主成分。

根据上述算法, 由步骤 1), 利用 MATLAB 软件中的 zscore 对温度测点原始数据进行标准化处理, 标准化后的数据记为  $t_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ; 由步骤 2), 调用 princomp 函数根据标准化后的数据作主成分分析, 得到主成分表达式的系数矩阵和系数矩阵的特征值  $\lambda_i$  和特征向量  $P_i$ , 求解得到主成分  $x_i$ ; 由步骤 3), 代入相应特征值  $\lambda_i$ , 计算可得各个主成分的贡献率及前  $n$  个主成分的累积贡献率, 具体结果见表 3、4。由于前 2 个主成分的累积贡献率达 97.779 1%, 能够很好地概括原始变量, 因此可以考虑只取前 2 个主成分。2 个主成分的表达式分别记为式(1)、(2)。

$$x_1 = 0.346 5t_1 + 0.341 2t_2 + 0.343 3t_3 + 0.336 3t_4 + 0.299 7t_5 + 0.328 7t_6 + 0.332 3t_7 + 0.329 4t_8 + 0.340 2t_9 \quad (1)$$

$$x_2 = 0.240 6t_1 + 0.305 3t_2 + 0.286 8t_3 + 0.280 7t_4 - 0.481 1t_5 - 0.353 2t_6 - 0.347 0t_7 - 0.337 1t_8 + 0.312 4t_9 \quad (2)$$

从第 1 主成分式(1)来看, 在每个标准化变量上有相近的正载荷, 说明每个标准化变量对  $x_1$  的重要性都差不多,  $x_1$  反映的是测点温度的综合水平。

表 3 相关系数矩阵的特征向量

Tab. 3 Eigenvectors of the correlation coefficient matrix

标准化变量	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$t_1$	0.346 5	0.240 6	-0.014 7	-0.420 4	-0.193 7	-0.769 7	0.117 8	0.030 1	0.016 4
$t_2$	0.341 2	0.305 3	0.007 6	-0.156 2	0.113 4	0.204 9	-0.464 9	-0.693 4	-0.118 4
$t_3$	0.343 3	0.286 8	-0.006 6	-0.137 7	0.249 1	0.371 6	0.736 1	-0.049 5	0.191 0
$t_4$	0.336 3	0.280 7	0.207 8	0.845 9	-0.080 9	-0.201 7	0.032 3	0.011 8	-0.032 3
$t_5$	0.299 7	-0.481 1	0.544 7	-0.066 3	0.577 8	-0.146 2	-0.101 4	0.060 1	0.091 8
$t_6$	0.328 7	-0.353 2	0.355 7	-0.103 4	-0.735 9	0.280 3	0.055 5	-0.052 3	0.064 1
$t_7$	0.332 3	-0.347 0	-0.394 1	0.053 5	0.065 0	0.012 4	0.158 2	0.032 7	-0.761 9
$t_8$	0.329 4	-0.337 1	-0.613 7	0.151 8	0.018 7	-0.043 7	-0.141 0	-0.044 2	0.595 0
$t_9$	0.340 2	0.312 4	-0.035 8	-0.153 0	0.032 7	0.291 1	-0.410 8	0.711 6	-0.033 4

表 4 相关系数矩阵的特征值、相应的贡献率

Tab. 4 Eigenvalues and contribution rates of the correlation coefficient matrix

特征量	特征值	贡献率	累积贡献率
$P_1$	7.596 5	84.406 0	84.406 0
$P_2$	1.203 6	13.373 1	97.779 1
$P_3$	0.099 3	1.103 7	98.882 8
$P_4$	0.057 8	0.642 0	99.524 8
$P_5$	0.027 3	0.303 0	99.827 9
$P_6$	0.011 3	0.125 9	99.953 8
$P_7$	0.002 5	0.028 2	99.982 0
$P_8$	0.001 0	0.011 1	99.993 0
$P_9$	0.000 6	0.007 0	100.000 0

从第2主成分式(2)来看,它在标准化变量  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_9$  上有正载荷,在  $t_5, t_6, t_7, t_8$  上有负载荷,说明  $x_2$  反映的是两类温度测点之间的对比和差异。

### 3 模型构建

基于第2节中的研究结果,转速是影响测点温度的重要因素之一,构建热误差预测模型必须考虑转速的影响,9个温度测点的数据已转换为2个主成分。下面将2个主成分及转速作为自变量,构建回归模型。

#### 3.1 热误差的多元二项式回归模型

多元二项式回归是一种常用的回归分析方法,用于处理具有多个自变量的预测问题<sup>[14]</sup>。多元二项式函数的一般形式(以三元二项式为例)为

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \sum_{1 \leq j \leq k \leq 3} \beta_{jk} x_j x_k + \varepsilon \quad (3)$$

式中,  $x_1, x_2, x_3$  为自变量,  $y$  为因变量,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_{jk} (1 \leq j \leq k \leq 3)$  为回归系数,  $\varepsilon$  为随机变量。

有 linear(线性)、interaction(交叉)、quadratic(完全二次)、purequadratic(纯二次)4种形式。下面,综合考虑2个主成分及转速,运用多元二项式回归函数式(3)对机床主轴热误差进行回归分析。

整理2个主成分、转速、热误差等数据,形成  $561 \times 4$  矩阵。选取 0 r/min 第1至第119次实验数据、2 000 r/min 第1至第102次实验数据、4 000 r/min 第1至第78次实验数据、6 000 r/min 第1至第110次实验数据、8 000 r/min 第1至第102次实验数据,形成训练数据集,用于构造预测模型;选取各转速最后10次实验数据形成测试数据集,用于预测模型的检验和评价。调用 `rstool(x, y, 'model', alpha)` 函数对训练数据进行计算,最终选择 quadratic(完全二次)模型和 0.05 的显著性水平对热误差进行回归,计算得回归系数  $\beta = [-717.8493, 16.0067, 6.2873, 0.2379, -0.116, -0.0016, 0.0085, -0.0886, -0.2273, -0.0536]$ ;均方根误差  $RMSE = 1.3073$ 。从而得到热误差关于2个主成分及转速的回归函数  $y$ , 见式(4),其中,  $x_1, x_2$  为温度测点的2个主成分,  $x_3$  为转速。回归曲线如图3所示。

$$y = -717.8493 + 16.0067x_1 + 6.2873x_2 + 0.2379x_3 - 0.116x_1x_2 - 0.0016x_1x_3 + 0.0085x_2x_3 - 0.0886x_1^2 - 0.2273x_2^2 - 0.0536x_3^2 \quad (4)$$

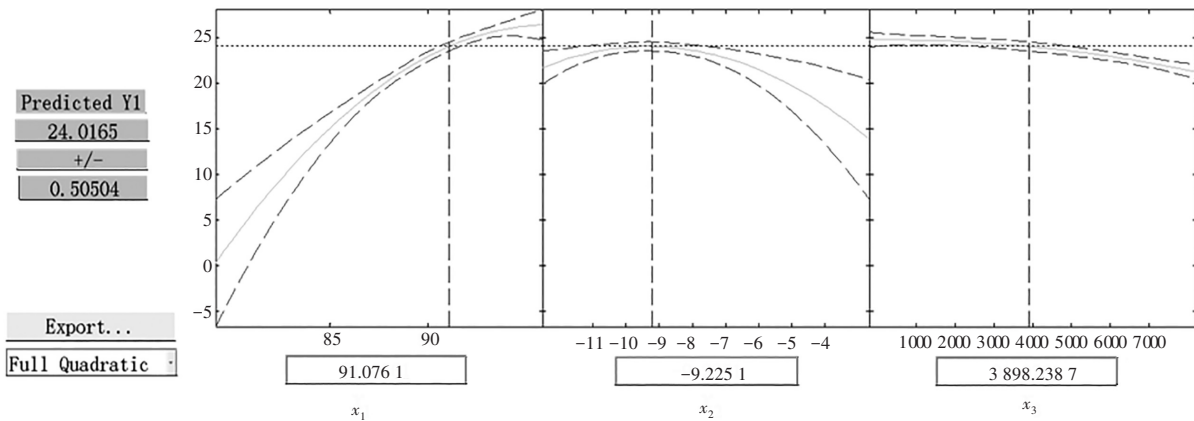


图3 热误差关于测点温度及转速的回归曲线

Fig. 3 Regression curves of thermal error in relation to the temperature of the measuring points and rotational speeds

#### 3.2 多元二项式回归模型的应用

利用测试数据(50次实验数据)对上述模型进行应用,50次实验热误差的预测值、实际值及相对误差如表5所示。预测值与实际值对比结果如图4所示。从预测结果可以看出:所测50次实验数据中,有43次实验的预测值与实际值相对误差小于0.05,仅有7次实验的预测值与实际值相对误差大于0.05;当转速  $\leq 6000$  r/min 时,模型精度较高;当转速为 8 000 r/min 时,模型精度略有所下降,此时热误差随转速变化的规律性不够显著,这也进一步证实了不同转速对热误差的影响程度不同,转速越小热误差越稳定,转速越大热误差越不稳定;整体来看,模型较为可靠,适应不同转速下数控机床热误差的预测。

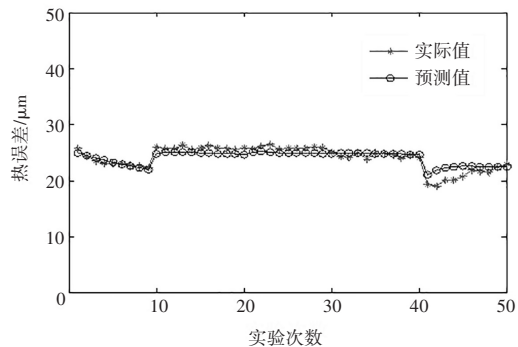


图4 热误差预测值与实际值的对比结果

Fig. 4 Comparison result of predicted and actual values of thermal error

**表 5 50次实验热误差的实际值、预测值及误差分析**  
Tab. 5 Actual values, predicted values and error analyses  
of thermal errors in 50 experiments

序号	热误差实际值/ $\mu\text{m}$	热误差预测值/ $\mu\text{m}$	相对误差
1	25.6517	24.9501	0.0274
2	24.3264	24.4941	0.0069
3	23.5141	24.0581	0.0231
4	23.1293	23.6177	0.0211
5	23.1293	23.2256	0.0042
6	23.0865	22.9340	0.0066
7	22.7018	22.5229	0.0079
8	22.5308	22.2185	0.0139
9	22.2315	21.9448	0.0129
10	26.0365	24.7636	0.0489
11	25.6517	25.1454	0.0197
12	25.6945	25.1032	0.0230
13	26.3785	25.0775	0.0493
14	25.6090	25.0123	0.0233
15	25.8655	24.9508	0.0354
16	26.3358	24.9602	0.0522
17	25.8227	24.7595	0.0412
18	25.7372	24.7222	0.0394
19	25.4807	24.7132	0.0301
20	25.8655	24.6837	0.0457
21	25.7372	25.1356	0.0234
22	26.2075	25.1871	0.0389
23	26.5068	25.1374	0.0517
24	25.5235	24.9849	0.0211
25	25.8227	24.9960	0.0320
26	25.8227	24.9007	0.0357
27	25.8655	24.9623	0.0349
28	26.0365	24.9903	0.0402
29	25.7800	24.8431	0.0363
30	25.0532	24.7456	0.0123
31	24.3264	24.9360	0.0251
32	24.1554	24.9823	0.0342
33	24.9249	24.8619	0.0025
34	23.8988	24.8953	0.0417
35	24.9249	24.8375	0.0035
36	24.9249	24.8399	0.0034
37	24.5749	24.7233	0.0060
38	23.9416	24.7479	0.0337
39	24.6684	24.6346	0.0014
40	24.1981	24.6099	0.0170
41	19.3670	20.9892	0.0838
42	19.0250	21.7513	0.1433
43	20.1793	22.2146	0.1009
44	20.1793	22.4261	0.1113
45	20.7779	22.5668	0.0861
46	21.8467	22.6468	0.0366
47	21.6104	22.5091	0.0416
48	21.4619	22.4787	0.0474
49	22.4025	22.5030	0.0045
50	22.9583	22.4545	0.0219

## 4 结论

本文对数控机床主轴热误差进行了研究,利用单因素多元方差分析、主成分分析等方法,借助 MATLAB 软件构建了关于热误差的多元二项式预测模型,模型精度较高,由于综合考虑了转速等因素,因此对不同转速的数控机床热误差预测具有较强的适应性。热误差是影响机床加工精度的重要因素<sup>[15-16]</sup>,控制和减少热误差的前提是精准预测热误差的值,本文提出的研究方法和研究结果为开展热误差研究提供了重要参考。

## 参考文献

[1]于保磊. 高速电主轴温度场优化与热误差建模研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨理工大学, 2024.

[2]谢飞, 王玲, 殷鸣, 等. 数控机床热误差的温度测点优化方法[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2019(6):45-49.

[3]马宏宇, 尹志宏, 叶愈, 等. 数控铣床主轴热误差 Bi-LSTM 预测建模[J]. 机床与液压, 2025, 53(14):51-57.

[4]高瑞翔, 徐腾寅, 房鹤飞, 等. 基于多传感器信息融合的机床测量数据自动补偿系统[J]. 自动化技术与应用, 2024, 43(6):60-63.

[5]周梦洁, 尹玲, 张丽娟, 等. 基于优化的 BP 神经网络的机床主轴热误差建模方法研究[J]. 机床与液压, 2024, 52(23):136-142.

[6]张珂, 徐鹏, 王展, 等. 基于 HPO-ELM 的电主轴热误差建模[J]. 机床与液压, 2024, 52(22):46-51.

[7]杨悦. 数控机床直线轴热误差建模方法研究[D]. 吉林:东北电力大学, 2024.

[8]非云祥. 高速直驱进给系统热特性与热误差建模分析与实验研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2021.

[9]贾剑锋, 王娟. “双高”校发展平衡性分析及对策研究[J]. 陕西教育(高教), 2022(12):84-85.

[10]谢中华. MATLAB 统计分析与应用:40 个案例分析[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2010.

[11]袁训锋, 王肖影, 潘新宇, 等. 基于主成分分析和指数平滑法的秦皇岛煤炭价格预测[J]. 微型电脑应用, 2022, 38(1):16-19.

[12]尹声声. 基于深度学习的医院海量档案特征快速查询算法研究[J]. 自动化技术与应用, 2024, 43(5):114-117.

[13]马圣卷, 曲玉玲. 基于主成分分析和聚类分析的我国新质生产力水平评价[J]. 商业经济, 2025(2):118-121.

[14]王娟. 基于多元回归分析的 PM2.5 预测研究[J]. 微型电脑应用, 2020, 36(3):48-51.

[15]蔡振东. 基于传感器技术的数控车床机电一体化自动控制方法[J]. 自动化技术与应用, 2024, 43(1):129-133.

[16]吴珊, 孔令飞, 习璐, 等. 纵切自动车床环境温度变化误差试验研究[J]. 环境技术, 2024, 42(2):127-131.