

磁悬浮列车首次穿越失效可靠性研究

刘伟渭* 李阔 余玺 唐爽权

西南交通大学机械工程学院,成都,610031

摘要:为了得到磁悬浮列车首次穿越失效特性,建立了随机参激和随机外激作用下常导电磁悬浮列车的动力学模型,在Hamilton理论框架下建立首次穿越可靠性函数,采用Crank-Nicolson差分法对后向Kolmogorov方程进行数值求解,探究初始能量、随机外激、随机参激、低随机激励和列车速度对磁悬浮列车首次穿越的影响。研究表明,初始能量的增大会使得发生首次穿越的时间提前;增大随机外激和随机参激都会使平均首次穿越时间减小,其中随机外激对平均首次穿越时间的影响程度要大于随机参激的影响;在低随机激励的作用下磁悬浮列车几乎不发生首次穿越;随着列车运行速度的提高,平均首次穿越时间也在减小,发生首次穿越失效的最大概率增大。

关键词:磁悬浮列车;随机激励;首次穿越;可靠性

中图分类号:U260

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.10.009

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Research on First-passage failure and Reliability Analysis of Maglev Trains

LIU Weiwei^{*} LI Kuo YU Xi TANG Shuangquan

School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031

Abstract: In order to obtain the first-passage failure characteristics of maglev trains, a dynamics model was established for electromagnetic suspension trains under the action of parametric excitation and external excitation, the first-passage reliability function was established under the framework of Hamilton's theory, and the backward Kolmogorov equation was solved numerically by using a new type of Crank-Nicolson difference method to investigate the effects of the initial energy, stochastic external excitation, stochastic parametric excitation, low stochastic excitation and train speed on the first-passage of maglev trains. The results show that the increase of initial energy will make the first-passage time earlier. The increase of stochastic external excitation and stochastic parametric excitation will make the average first-passage time decrease, where the influences of stochastic external excitation on the average first-passage time are larger than that of stochastic parametric excitation, and the first-passage hardly occurs under the action of low stochastic excitation. As the train speed increases, the average first-passage time decreases and the maximum probability of first-passage failure increases.

Key words: maglev train; random excitation; first-passage failure; reliability

0 引言

随着国家铁路运输能力的提高,铁路运输的交通工具也逐渐呈现多样化,其中磁悬浮列车因速度快、能耗低、噪声小等优点而成为轨道交通领域的研究热点^[1]。对于常导电磁悬浮(electromagnetic suspension, EMS)列车,其车体-悬浮架-轨道耦合动力学系统存在悬浮自激振动^[2]。当振动的范围达到列车能够承受的极限时,若激励强度继续增大,系统就会出现破坏,即系统出现首次穿越失效,对系统的安全性和可靠性造成影响

响^[3-4],因此,研究磁悬浮系统的首次穿越与可靠性问题对磁悬浮列车具有重要意义。

穿越是指系统从一个状态跨越到另一个状态,特别是通过某个特定的阈值或界限的过程。系统状态首次越出安全域就表示系统发生损坏,即发生首次穿越,系统状态首次穿越安全域边界的时间就是寿命。可靠性是系统状态停留在安全域内的概率,首次穿越与可靠性是紧密相关的。对于铁道车辆,已有部分学者开展首次穿越失效可靠性研究。刘伟渭等^[5]考虑轨道随机不平顺和随机参激,对轮对系统扩散过程的边界性态进行了分析,并探究了不同白噪声强度下的首次穿越和可靠性规律。于建志等^[6]利用马尔可夫模型对

收稿日期:2024-09-09

基金项目:国家自然科学基金(51875481);四川省科技计划重点研发项目(2023YFN0079)

磁悬浮列车的可靠性和安全度进行了分析。XU等^[7]采用数据驱动的方法对磁悬浮列车悬浮系统的可靠性进行判别,提出了一种稳定性能评估方案。张龙文等^[8]将非平稳高斯结构的 Poisson 模型映射为标准高斯过程,计算了模型的首次穿越概率。LIU等^[9]研究了冲击条件下强非线性振动冲击系统的可靠性和最优有界控制,并用 Monte-Carlo 进行了模拟验证。ZHU等^[10]利用随机平均法建立了条件可靠性函数和广义 Pontryagin 方程,对谐波和白噪声激励下的 Duffing 振荡器首次穿越时间进行了求解和数值模拟。

较多学者对磁悬浮的运动特性开展了研究,但主要考虑随机激励作用影响,分析磁悬浮系统的动态响应和控制电流的设计。WANG等^[11]考虑轨道不平顺和导轨变形的横向激励,对高温超导磁悬浮车辆在不同速度和桥梁跨度下磁悬浮的静态性能进行了分析。XU等^[12]将轨道不平顺产生的随机激励作为振源,分析了不同运行速度下悬浮间隙和悬浮电流的变化。陈琛等^[13]分析了轨道随机不平顺对悬浮间隙和控制电流等系统动力指标的影响规律。磁悬浮领域的研究目前主要集中在随机激励作用对系统的稳定性、响应和控制策略的影响,鲜有涉及系统首次穿越的分析。磁悬浮系统在实际运行中常受到轨道不平顺、风速、车辆质量波动等随机扰动的影响,这使得首次穿越分析中的随机性和概率分析尤为重要。分析磁悬浮系统在随机参激和随机外激作用下的运动稳定性可以更真实地反映磁悬浮列车特性。

本文在 Hamilton 理论体系下采用理论推导和数值计算相结合的方式对 EMS 磁悬浮首次穿越失效进行分析,探究不同参数条件下的可靠性和首次穿越时间,为 EMS 磁悬浮系统参数结构稳定和列车运行的可靠性提供参考。

1 磁悬浮系统建模与求解

1.1 磁悬浮系统随机动力学模型

根据文献[14-15],建立 EMS 磁悬浮列车的简化磁悬浮系统动力学模型,如图 1 所示。模型考虑悬挂系统的非线性特征、空气动力载荷^[16-17]对车体的作用、悬浮架与轨道之间的控制作用和随机激励过程。将悬浮电磁力进行线性化处理,考虑为弹簧阻尼系统^[18]。悬挂系统的非线性特征包括空气弹簧的非线性刚度和非线性阻尼,用 Gauss 白噪声代替外界随机激励过程。根据牛顿第二定律,建立 EMS 磁悬浮系统运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (C_h + C + m_1 \omega_1 y_1^n) \dot{y}_1 - C_h \dot{y}_2 - K_h y_2 + \\ (K_h + K + \beta_1 \xi_1(t)) y_1 - m_1 g + F_{y0} - K \delta_0 + \\ m_1 \phi |y_2 - y_1|^n \operatorname{sgn}(y_1 - y_2) - \beta_3 \xi_3(t) = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 - 4C_h \dot{y}_1 + (4C_h + m_2 \omega_2 y_2^n) \dot{y}_2 - 4K_h y_1 + \\ (4K_h + \beta_2 \xi_2(t)) y_2 + f_{az} - m_2 g + \\ m_2 \phi |y_2 - y_1|^n \operatorname{sgn}(y_2 - y_1) - \beta_4 \xi_4(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, n 为非线性阶数,描述系统非线性特性的强度; $\beta_1 \xi_1(t)$ 表示随机刚度对悬浮架的随机过程; $\beta_2 \xi_2(t)$ 表示随机刚度对车体的随机过程; $\beta_3 \xi_3(t)$ 表示轨道不平顺随机过程; $\beta_4 \xi_4(t)$ 表示空气动力不平顺过程。方程的其他参数含义见表 1。 β_1 和 β_2 为随机项控制参数,随机参激满足:

$$E(\xi(t)\xi(t+\tau)) = 2D\delta(\tau) \quad (2)$$

对于功率谱, β_3 和 β_4 分别为轨道不平顺系数和空气动力不平顺系数,相关函数为

$$E(\xi(t)\xi(t+\tau)) = 2\pi S\delta(\tau) \quad (3)$$

式中: S 为功率谱密度; $\xi(t)$ 是均值为 0、强度为 $2D$ 的高斯白噪声过程; D 为白噪声强度; $\delta(\tau)$ 表示白噪声的自相关函数,仅在 $\tau=0$ 时非零,表征噪声在不同时刻完全独立。

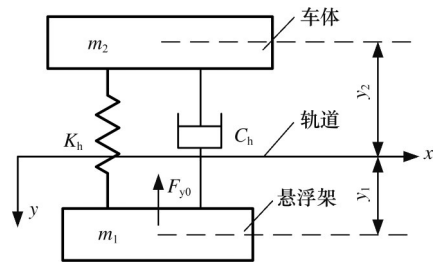


图 1 EMS 磁悬浮车体简化动力学模型

Fig.1 Simplified dynamic model of EMS-type maglev vehicle body

表 1 EMS 型磁悬浮车辆参数

Tab.1 EMS-type maglev vehicle parameters

名称	数值	名称	数值
悬浮架质量 m_1	6100 kg	车体非线性刚度系数 ω_2	10^5
车体质量 m_2	12 800 kg	非线性阻尼系数 ϕ	3×10^6
悬挂线性刚度 K_h	85 kN/m	等效磁动刚度 K	2 MN/m
悬挂线性阻尼 C_h	10 kN·s/m	等效磁动阻尼 C	35 kN·s/m
悬浮架随机项控制参数 β_1	10^6	列车速度 v	120 m/s
车体随机项控制参数 β_2	10^6	空气动力载荷 f_{az}	—
轨道不平顺系数 β_3	10^3	电磁吸力 F_{y0}	—
空气动力不平顺系数 β_4	10^3	标准悬浮间隙 δ_0	—
悬浮架非线性刚度系数 ω_1	10^5		

1.2 磁悬浮系统模型求解

为了对磁悬浮非线性随机激励动力学过程进行进一步分析,采用Hamilton系统的随机平均法进行求解。相对于快变过程的速度和位移,系统能量是关于时间的慢变过程。用慢变过程表示的随机方程将多维空间域转变成了一维能量域^[19]。

将式(1)转化为Hamilton体系,取广义位移 $q_1 = y_1, q_2 = y_2$, 广义动量 $p_1 = \dot{y}_1, p_2 = \dot{y}_2$, 则式(1)可转化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= k_{11}p_1 + k_{12}p_2 + k_{13}q_1 + k_{14}q_2 + \\ &\quad k_{15}q_1^2p_1 + k_{16}|q_2 - q_1|^n \operatorname{sgn}(q_1 - q_2) + \\ &\quad k_{17}\xi_3(t) + k_{18} + \gamma_{11}q_1\xi_1(t) \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= k_{21}p_1 + k_{22}p_2 + k_{23}q_1 + k_{24}q_2 + \\ &\quad k_{25}q_2^2p_2 + k_{26}|q_2 - q_1|^n \operatorname{sgn}(q_2 - q_1) + \\ &\quad k_{27}\xi_4(t) + k_{28} + \gamma_{21}q_2\xi_2(t) \\ k_{11} &= -(C_h + C)/m_1 & k_{12} &= -C_h/m_1 \\ k_{13} &= -(K_h + K)/m_1 & k_{14} &= K_h/m_1 \\ k_{15} &= -\omega_1 & k_{16} &= -\psi & k_{17} &= \beta_3/m_1 \\ k_{18} &= (m_1g - F_{y0} + K\delta_0)/m_1 & \gamma_{11} &= -\beta_1/m_1 \\ k_{21} &= 4C_h/m_2 & k_{22} &= -4C_h/m_2 & k_{23} &= 4K_h/m_2 \\ k_{24} &= -4K_h/m_2 & k_{25} &= -\omega_2 \\ k_{26} &= -\psi & k_{27} &= \beta_4/m_2 \\ k_{28} &= (m_2g - f_{az})/m_2 & \gamma_{21} &= -\beta_2/m_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

取磁悬浮系统的Hamilton函数

$$H = p_1^2/2 + p_2^2/2 + U(q_1, q_2) = p_1^2/2 + p_2^2/2 - k_{18}q_1 - k_{28}q_2 - (k_{13} + k_{14})q_1^2/2 - (k_{23} + k_{24})q_2^2/2 + (k_{14} - k_{24})(q_2 - q_1)^2/2 - (k_{16} + k_{26})|q_1 - q_2|^{1+n} / [2(1+n)] \quad (5)$$

式中: H 为磁悬浮系统的广义能量; $U(q_1, q_2)$ 为系统的广义势能。

式(4)可模型化为Itô型随机微分方程,形式如下:

$$\left. \begin{aligned} dq_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} dt \\ dp_1 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q_1} + m_{11}\frac{\partial H}{\partial p_1} + m_{12}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)dt + \\ &\quad \sigma_{11}dB_1(t) + \sigma_{12}dB_3(t) \\ dq_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} dt \\ dp_2 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q_2} + m_{21}\frac{\partial H}{\partial p_1} + m_{22}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)dt + \\ &\quad \sigma_{21}dB_2(t) + \sigma_{22}dB_4(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, $B_n(t)$ ($n = 1, 2, 3, 4$)为相互独立的Wiener过程,变量代换如下:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= -k_{11} + k_{24}q_1/p_1 - k_{24}q_2/p_1 - k_{15}q_1^2 \\ m_{12} &= -k_{12} \\ m_{21} &= -k_{21} + k_{14}q_1/p_1 - k_{24}q_1/p_1 - k_{23}q_1/p_1 \\ m_{22} &= -k_{22} + k_{24}q_2/p_2 + k_{23}q_2/p_2 - k_{14}q_2/p_2 - k_{25}q_2^2 \\ \sigma_{11} &= \gamma_{11}q_1\sqrt{2D_1} \\ \sigma_{21} &= \gamma_{21}q_2\sqrt{2D_2} \\ \sigma_{12} &= k_{17}\sqrt{2\pi S_3} \\ \sigma_{22} &= k_{27}\sqrt{2\pi S_4} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, D_1, D_2 分别为悬浮架和车体的随机白噪声强度; S_3, S_4 分别为悬浮架和车体的功率谱密度。由式(5)可知, $U(q_1, q_2)$ 不可继续分离,故随机磁悬浮系统为拟不可积Hamilton系统,采用拟不可积Hamilton系统的随机平均法,支配扩散过程 $H(t)$ 的平均Itô型随机微分方程如下:

$$dH = \bar{m}(H)dt + \bar{\sigma}(H)dB(t) \quad (8)$$

其中, $\bar{m}(H)$ 和 $\bar{\sigma}(H)$ 分别为一维扩散过程的漂移系数和扩散系数,其表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}(H) &= \frac{1}{T(H)} \int_{\Omega} \frac{-m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \\ \bar{\sigma}^2(H) &= \frac{1}{T(H)} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} T(H) &= \int_{\Omega_1} (1/\frac{\partial H}{\partial p_1}) dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \\ \Omega &= \{(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) | H(q_1, \dots, q_n, 0, p_2, \dots, p_n) \leq H\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式(5)和式(7)代入式(9)中,并进行如下坐标变换:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{2(H-U)} \cos \theta & p_2 &= \sqrt{2(H-U)} \sin \theta \\ q_1 &= \frac{r \cos \theta}{\sqrt{u_1}} & q_2 &= \frac{r \sin \theta}{\sqrt{u_2}} \\ u_1 &= -(k_{13} + k_{24}) & u_2 &= -(k_{23} - k_{14} + 2k_{24}) \end{aligned}$$

对式(10)进行积分,可得磁悬浮系统的漂移系数和扩散系数:

$$\begin{aligned} \bar{m}(H) &= k_{11}(H - R^2/4) + k_{22}(H - R^2/2) + \\ &\quad k_{15}[HR^2/(4u_1) - R^4/(12u_1)] + k_{25}[HR^2/(4u_2) - \\ &\quad R^4/(8u_2)] + [D_1k_{18}^2/(4u_1) + D_2k_{28}^2/(4u_2)]R^2 + \\ &\quad (\pi k_{17}^2 S_3 + \pi k_{27}^2 S_4) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2(H) &= D_1k_{18}^2[HR^2/(2u_1) - R^4/(6u_1)] + \\ &\quad D_2k_{28}^2[HR^2/(2u_2) - R^4/(6u_2)] + 2H\pi k_{17}^2 S_3 + \\ &\quad 2H\pi k_{27}^2 S_4 - \frac{1}{2}\pi R^2 k_{17}^2 S_3 - \frac{1}{2}\pi R^2 k_{27}^2 S_4 \end{aligned} \quad (12)$$

$$T(H) = \frac{\pi}{2\sqrt{u_1 u_2}} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \quad (13)$$

$$\frac{R^2}{2} - \frac{(k_{14} - k_{24})R^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{u_1} \sqrt{u_2}} - \frac{k_{18}R \cos \theta}{\sqrt{u_1}}$$

$$\frac{k_{28}R \sin \theta}{\sqrt{u_2}} - \frac{k_{16} + k_{26}}{2(1+n)} \left| \frac{R \cos \theta}{\sqrt{u_1}} - \frac{R \sin \theta}{\sqrt{u_2}} \right|^{1+n} = H \quad (14)$$

式中： R 为式(14)的根 r 中的最大正根。

2 首次穿越失效分析

当系统受到随机外激或随机参激不稳定时，系统将在较大范围内做随机运动。当随机振动系统首次越出安全域时，就发生了首次穿越。首次穿越是随机过程中的一个重要概念，描述了一个随机系统或随机过程首次达到某个特定阈值或边界的时刻，这个时刻称为首次穿越时间^[19]。可通过可靠性函数、首次穿越时间的概率密度函数和平均首次穿越时间对随机振动系统的可靠性进行描述。

2.1 可靠性函数后向 Kolmogorov 方程建立

为描述系统在半无限长时间 $[0, t]$ 内处于安全域的概率，假设存在一空间开域为 Ω ，定义条件可靠性函数

$$R(t|H_0) = P\{H(\tau) \in \Omega, \tau \in (0, t] | H(0) = H_0 \in \Omega\} \quad (15)$$

对于二自由度拟不可积 Hamilton 系统即式(6)，其 $H(t)$ 为一维时齐扩散过程，平均 Itô 方程由式(8)支配。假定 Hamilton 过程 $H(t)$ 的变化范围为 $[H_{\min}, \infty)$ ，其中安全域为 (H_{\min}, H_c) 。将条件可靠性函数 $R(t|H_0)$ 代入后向 Kolmogorov 方程可得

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m}(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \quad (16)$$

要使首次穿越问题具有意义，需要判断磁悬浮系统的边界类型。边界类型主要由扩散系数 $\alpha_i (i=r, 1)$ 、漂移系数 β_i 和特征标值 c_i 决定^[5]。由文献[5]可知左边界 H_{\min} 为吸收边界，右边界 H_c 为非吸收边界。首次穿越时间的条件概率密度为

$$\rho(\tau|H_0) = - \left. \frac{\partial R(t|H_0)}{\partial t} \right|_{t=\tau} \quad (17)$$

首次穿越时间的 n 阶条件矩 $\mu_k(H_0)$ 满足广义 Pontryagin 方程：

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H_0) \frac{d^2 \mu_k(H_0)}{dH_0^2} + \bar{m}(H_0) \frac{d\mu_k(H_0)}{dH_0} = -k\mu_{k-1}(H_0) \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

广义 Pontryagin 方程的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mu_k(H_0) &= 0 & H_0 &= H_c \\ \mu_k(H_0) &= \text{有限} & H_0 &= H_{\min} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

在实践中，人们对首次穿越时间更为关心。对式(18)中的广义 Pontryagin 方程求解可得到首

次穿越时间的 n 阶矩。由于首次穿越时间是非负的，不同阶的矩具有相同的趋势，因此一阶矩 μ_1 最为重要。首次穿越时间的均值通过差分法计算，式(18)、式(19)中的左边界条件进行如下替换：

$$\bar{m}(H_0) \frac{d\mu_1(H_0)}{dH_0} = -1 \quad H_0 = 0$$

当随机外激存在时，磁悬浮系统式(4)恒不稳定，将发生首次穿越。考虑随机参激和随机外激共同作用的磁悬浮系统，根据式(11)和式(12)得到漂移系数和扩散系数：

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}(H) &= \left(\frac{k_{15}}{2u_1} + \frac{k_{25}}{2u_2} - \frac{k_{15}}{3u_1} - \frac{k_{25}}{3u_2} \right) H^2 + \\ &\quad \frac{2\sqrt{2} k_{25} k_{28}}{5u_2 \sqrt{u_2}} H^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{k_{11} + k_{22}}{2} + \frac{D_1 \gamma_{11}^2}{2u_1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{D_2 \gamma_{21}^2}{2u_2} \right) H + \pi k_{17}^2 S_3 + \pi k_{27}^2 S_4 \\ \bar{\sigma}^2(H) &= \left(\frac{D \gamma_{11}^2}{3u_1} + \frac{D \gamma_{11}^2}{3u_2} \right) H^2 + (\pi S k_{17}^2 + \pi S k_{27}^2) H \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

已知 $\bar{m}(0) \neq 0, \bar{\sigma}^2(0) = 0$ ，根据第一类奇异边界条件， $H_{\min} = 0$ 为流动点，则后向 Kolmogorov 方程的左边界条件为

$$\left. \frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m} \frac{\partial R}{\partial H_0} \right|_{H_0 = H_{\min}} \quad (21)$$

2.2 后向 Kolmogorov 方程的数值解法

对于后向 Kolmogorov 方程的数值求解，一般可采用 Crank-Nicolson 差分法，该方法主要用于流体运动的热传导与粒子扩散过程的求解。由于磁悬浮系统可靠性函数的后向 Kolmogorov 方程与对流扩散方程形式上一致，因此可采用新型 Crank-Nicolson 差分法^[20]。新型 Crank-Nicolson 差分法较传统的 Crank-Nicolson 差分法添加了两项罚函数，系数矩阵对角严格占优，求解方法如下。

对可靠性函数 $R(t|H_0)$ 而言，在其定义域与时间域上进行有限等分，等分长度为 δ ，将定义域划分为 N 份，则在任意一点有 $H_i = i\delta H (i = 0, 1, \dots, N), t_j = j\delta t$ ，如图2所示，则可靠性函数可以用矩阵形式表示，即

$$R(j\delta t | i\delta H) = R_{i,j} \quad (22)$$

则后向 Kolmogorov 的新型 Crank-Nicolson 差分表达式为

$$\begin{aligned} \frac{R_{i,j+1} - R_{i,j}}{\delta t} &= \frac{1}{2\delta^2 H^2} \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 + \frac{m_i}{2} \delta H \right) \cdot \\ &\quad \frac{R_{i+1,j} - 2R_{i,j} + R_{i-1,j}}{R_{i,j}} (R_{i,j+1} + R_{i,j}) + \\ &\quad \frac{m_i}{2} \left(\frac{R_{i+1,j+1} - R_{i-1,j+1}}{2\delta H} + \frac{R_{i+1,j} - R_{i-1,j}}{2\delta H} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)以空间域迭代，并去掉时间域可得

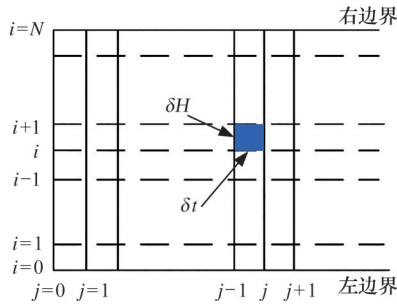


图2 差分示意图

Fig.2 Differential schematic

$$-AR_{i-1} + BR_i - CR_{i+1} = AR_{i-1} + (2-B)R_i + CR_{i+1} \quad (24)$$

$$A = \frac{\sigma_i^2}{4} \frac{\delta t}{(\delta H)^2} \quad B = 1 + \frac{\sigma_i^2}{2} \frac{\delta t}{(\delta H)^2} + \frac{m_i}{2} \frac{\delta t}{\delta H}$$

$$C = \frac{\sigma_i^2}{2} \frac{\delta t}{(\delta H)^2} + \frac{m_i}{2} \frac{\delta t}{\delta H}$$

$$m_i = \bar{m}(i\delta H) \quad \sigma_i^2 = \bar{\sigma}^2(i\delta H)$$

方程右边界可表示成

$$R_{N,j} = 0$$

方程左边界可表示为

$$\frac{R_{0,j+1} - R_{0,j}}{\delta t} = m_0 \left(\frac{R_{1,j+1} - R_{0,j+1}}{2\delta H} + \frac{R_{1,j} - R_{0,j}}{2\delta H} \right)$$

初始条件表示为

$$R_{\frac{H_0}{\delta H}, 0} = 1$$

由上述新型Crank-Nicolson差分迭代方程以及相应的初始条件与边界条件,借助计算机运算可求出条件可靠性函数的数值解。

3 首次穿越失效分析结果

3.1 初始能量对首次穿越失效的影响

取安全域右边界为 $H_c = 0.06$,随机参激白噪声强度 $D = 0.15$,随机参激功率谱强度 $S = 0.25$,借助MATLAB软件对可靠性函数进行数值解迭代,结果如图3所示。由图3可知,在任意初始能量值下,条件可靠性函数都随着初始能量值的增

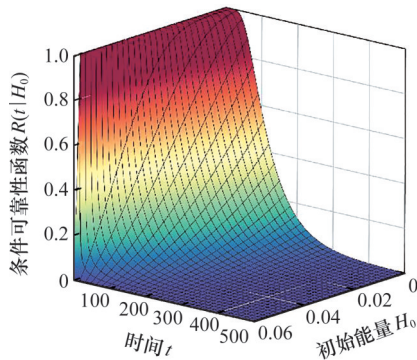


图3 不同初始能量下条件可靠性函数三维图

Fig3 Conditional reliability functions for different initial energies 3D graph

加而递减,即条件可靠性函数随着时间的延长随着初始能量值的增加而不断减小,且最终减小到零,条件可靠性减小到零值代表着首次穿越失效的发生。当初始能量已经接近安全域右边界能量即安全域的极限能量时,系统会在极短的时间内失效,这是由于随机外激的存在,系统的能量值随着时间的增长而增加,而能量增加到极限值的时间长短决定了系统的寿命。

分别取左边界能量值 H_0 为 0.01、0.02、0.03、0.04、0.05,条件可靠性函数 $R(t|H_0)$ 与时间 t 的关系曲线见图4。由图4可知,随着初始能量的增加,条件可靠性函数在初期减小的速度越来越快;对于单个曲线,可靠性函数减小的速度经历了先慢后快再慢的过程。

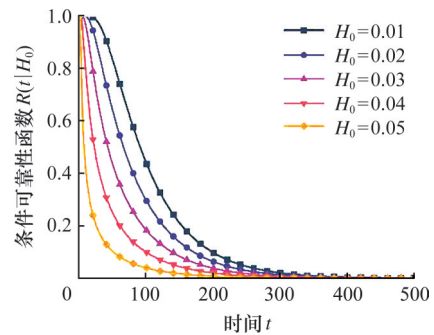


图4 不同初始能量下条件可靠性函数二维图

Fig.4 Conditional reliability functions for different initial energies 2D graph

图5所示为首次穿越时间的条件概率密度函数 $p(t|H_0)$,它是条件可靠性函数 $R(t|H_0)$ 对时间的负偏导数,反映了可靠性函数的变化率与系统首次穿越失效的概率。条件概率密度函数 $p(t|H_0)$ 都是一个单峰函数,呈现先增后减的趋势,最终都会减小到零,且随着初始能量值的增大,条件概率密度函数的峰值会增大,单峰值会提前到达,单峰会越来越陡,即概率会越来越集中,列车在峰值处发生首次穿越失效的可能性越来越大。

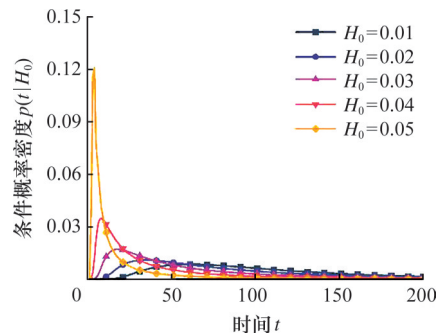


图5 不同初始能量下条件概率密度

Fig.5 Conditional probability density at different initial energies

3.2 随机外激对首次穿越失效的影响

通过改变随机外激的强度来研究随机外激强度的大小对磁悬浮系统条件可靠性以及首次穿越时间条件概率密度函数的影响。分别取轨道不平顺与气动荷载不平顺谱密度为 $S_3 = S_4 = S = 0.15, 0.25, 0.35, 0.55$, 初能量 $H_0 = 0.02$, 仿真结果如图 6 和图 7 所示。

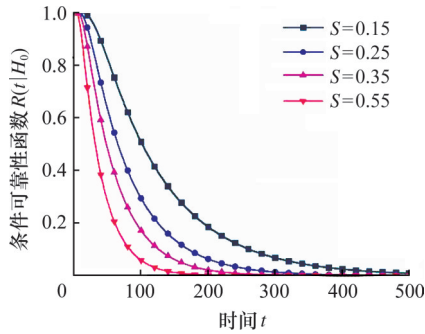


图 6 不同随机外激功率谱密度下条件可靠性函数
Fig.6 Conditional reliability functions for different random external excitation power spectral densities

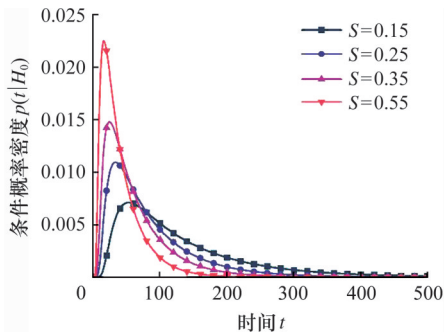


图 7 不同随机外激功率谱密度下条件概率密度
Fig.7 Conditional probability density for different random external excitation power spectral densities

由图 6 可知,当功率谱密度 $S = 0.15$ 时,条件可靠性函数大约在 $t = 500$ 附近降为 0;当 $S = 0.25$ 时,条件可靠性函数大约在 $t = 400$ 附近降为 0;当 $S = 0.35$ 时,条件可靠性函数大约在 $t = 300$ 附近降为 0;当 $S = 0.55$ 时,条件可靠性函数大约在 $t = 200$ 附近降为 0,即随着随机外激功率谱密度的增大,可靠性降为 0 的时间提前,即发生首次穿越。由图 7 可知,增大功率谱密度 S 会使发生最大概率首次穿越失效的时间提前,且发生首次失效的最大概率增大。

取右边界 $H_c = 0.1$, 悬浮架与车体随机白噪声强度 $D = 0.15$, 分别取随机外激功率谱密度 $S = 0.15, 0.25, 0.35, 0.55$, 平均首次穿越时间如图 8 所示。随着随机外激强度的增大,平均首次穿越时间会减小。

3.3 随机参激对首次穿越失效的影响

取右边界 $H_c = 0.1$, 悬浮架与车体随机白噪

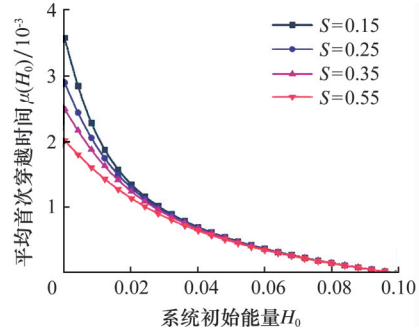


图 8 不同随机外激强度下平均首次穿越时间
Fig.8 The average first-passage time at different stochastic external excitation intensities

声强度 $D = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, 随机参激功率谱密度 $S = 0.25$, 平均首次穿越时间仿真如图 9 所示。

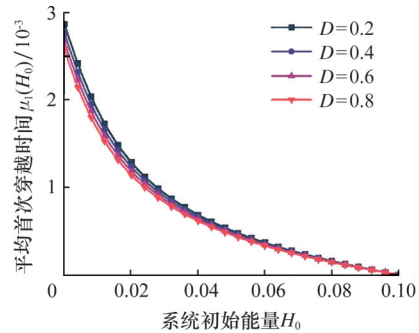


图 9 不同随机参激强度下平均首次穿越时间
Fig.9 The average first-passage time at different stochastic excitation intensities

由图 9 可知,随着初始能量值的增大,首次穿越时间均值即寿命会降低,且初始能量值接近于极限能量值时,首次穿越时间会减小到零,即系统寿命为零,系统会在极短的时间内发生首次穿越失效;首次穿越时间随初始能量值的变化并非线性变化,而是在初始能量值较小时,首次穿越时间下降速度较快。随机参激强度也会对系统的首次穿越时间即系统寿命产生影响,且随机参激强度增大时,首次穿越时间会减小,但是随机外激对首次穿越时间的影响程度大于随机参激的影响。

3.4 低随机激励下的首次穿越失效

取安全域右边界为 $H_c = 0.1$, 随机参激白噪声强度 $D = 0.005$, 随机参激功率谱强度 $S = 0.005$, 借助 MATLAB 软件对可靠性函数进行数值解迭代,低随机激励下的可靠性函数如图 10 所示。分别取初始能量值 $H_0 = 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.08$, 条件可靠性函数与时间的关系如图 11 所示。

由图 10 和图 11 可知,在任意的初始能量值下,条件可靠性函数都是随着时间的增长而减小

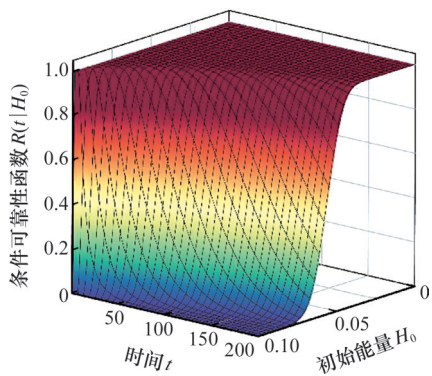


图10 低随机激励下条件可靠性函数

Fig.10 Conditional reliability function under low stochastic excitation

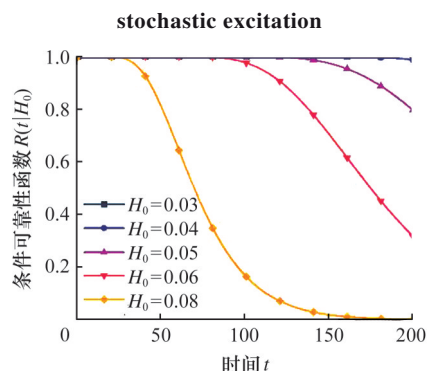


图11 低随机激励下不同初始能量值的条件可靠性函数

Fig.11 Conditional reliability functions for different initial energy values under low stochastic excitation

的,且减小速度先快后慢,但是在初始能量值不大于0.04时,可靠性函数都在0.95以上,当初始能量值在0.05时,可靠性函数都在0.8以上,但当初始能量值接近0.075时,可靠性函数便在时间刚开始迅速减小到接近于0。因此,在初始能量值不太大时,在低随机外激与随机参激的情况下,系统几乎不会发生首次穿越失效。

低随机激励下不同初始能量值的条件概率密度如图12所示,可知,在初始能量值不大于0.04时,条件概率密度函数几乎为0,即系统在某一时刻发生首次穿越失效的概率几乎为0,也就是几乎不失效,在初始能量值为0.06时,虽然条件概

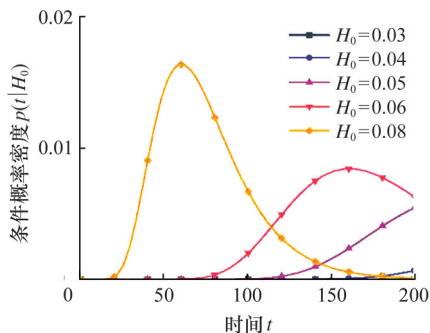


图12 低随机激励下不同初始能量值的条件概率密度

Fig.12 Conditional probability density for different initial energy values under low stochastic excitation

率会有一个峰值,但其数量级为 10^{-3} ,系统也大概率不失效,其描述的特征与图10和图11一致。

3.5 列车速度对首次穿越失效的影响

对于磁悬浮系统,列车速度对首次穿越的影响是人们更为关心的。分别取速度为50、200、400、500、600 km/h,安全域右边界 $H_c = 0.06$,初始能量 $H_0 = 0.05$,随机参激白噪声强度 $D = 0.15$,随机外激功率谱强度 $S = 0.025$,借助MATLAB软件对可靠性函数进行数值解迭代,仿真结果如图13~图15所示。

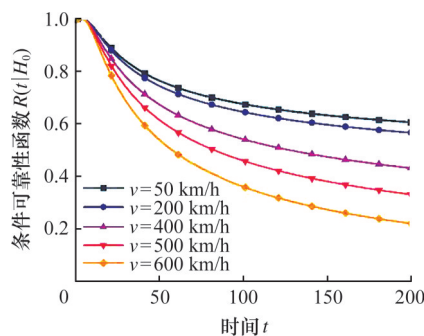


图13 不同速度下条件可靠性函数

Fig.13 Conditional reliability function at different speeds

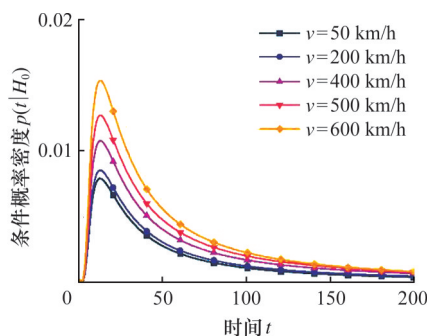


图14 不同速度下条件概率密度

Fig.14 Conditional probability density at different speeds

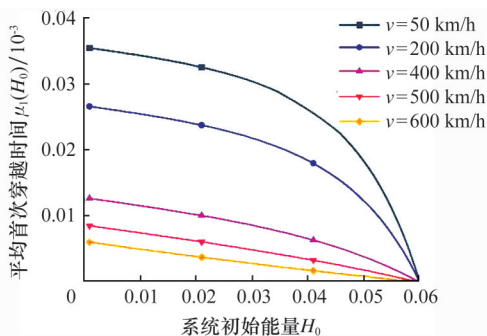


图15 不同速度下列车平均首次穿越时间

Fig.15 The average first-passage time for trains at different speeds

由图13和图14可知,在时间初期,无论列车运行速度大小,列车条件可靠性数值均为1,此时

几乎不会发生首次穿越失效;在任何运行速度下,列车的条件可靠性都是随时间而递减;随着运行速度的增加,列车可靠性下降得越来越快,列车发生首次穿越失效的时间越提前,发生失效的概率越高。当列车运行速度达到600 km/h时,列车可靠性会在短时间内急剧下降,从而发生首次穿越。

由图15可知,磁悬浮列车速度从50 km/h不断提高到600 km/h时,平均首次穿越时间呈倍数急剧下降,磁悬浮系统的寿命随着车速的提高逐渐降低,并且随着初始能量的增加,平均首次穿越时间也在逐渐减小。

4 结论

1)系统不同的初始能量下,随着时间的增长,条件可靠性函数会从1逐渐减小到0,此时代表系统发生首次穿越失效。随着初始能量的增加,磁悬浮系统发生首次穿越失效的时间提前。磁悬浮列车速度从50 km/h逐渐提高到600 km/h,列车的条件可靠性函数随时间逐渐减小,最大概率发生首次穿越的时间逐渐提前。

2)不同的随机外激强度与随机参激强度都会对系统的首次穿越时间即系统寿命产生影响,且随机外激强度或随机参激强度增大时,首次穿越时间会减小,但是随机外激对首次穿越时间的影响程度大于随机参激的影响。在低随机激励作用下,系统初始能量小于0.04时可靠性函数在0.95以上。当初始能量接近0.075时,可靠性函数会迅速减小到0。即在初始能量和随机激励都较低时,系统几乎不会发生首次穿越,并且条件概率密度函数中发生首次穿越的最大概率也较低。

3)增大初始能量值、随机外激、随机参激以及列车运行速度都会降低列车可靠性,使磁悬浮系统最大概率发生首次穿越的时间提前,平均首次穿越时间减小。

4)对磁悬浮系统首次穿越失效时间的判断都是基于概率统计的,即列车运行时间达到了概率意义上的寿命后,磁悬浮系统不一定会发生首次穿越失效,而是表示在概率意义上大概率会失效,它没有一个确定的解,而是具有随机波动性。

5)在列车运行过程中,应尽量避免可靠性函数的条件概率密度函数峰值出现,否则列车极有可能发生首次穿越失效,发生触轨、跳轨等,影响磁悬浮列车的平稳运行和乘坐安全性。

6)本文初步探讨了磁悬浮列车首次穿越失效可靠性的建模与分析,尚有以下内容需进一步研

究,包括通过实验数据来验证理论模型的准确性,尤其是在实际运行条件下对首次穿越的定量分析、首次穿越失效后系统演变特性、首次穿越后的非线性随机最优控制等。

参考文献:

- [1] 熊嘉阳, 邓自刚. 高速磁悬浮轨道交通研究进展[J]. 交通运输工程学报, 2021, 21(1): 177-198.
XIONG Jiayang, DENG Zigang. Research Progress of High-speed Maglev Rail Transit[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2021, 21(1):177-198.
- [2] 翟婉明, 赵春发. 磁浮车辆/轨道系统动力学(I)——磁/轨相互作用及稳定性[J]. 机械工程学报, 2005, 41(7):1-10.
ZHAI Wanming, ZHAO Chunfa. Dynamics of Maglev Vehicle/Guideway Systems (I): Magnet/Rail Interaction and System Stability[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(7):1-10.
- [3] 胡俊雄, 雷成, 马卫华, 等. 中低速磁浮列车中置式悬浮架的耦合姿态分析[J]. 铁道学报, 2021, 43(10):29-35.
HU Junxiong, LEI Cheng, MA Weihua, et al. Coupling Posture Analysis of Mid-set Levitation Frame of Medium and Low Speed Maglev Train[J]. Journal of the China Railway Society, 2021, 43(10): 29-35.
- [4] 李小珍, 王渝文, 胡启凯, 等. 不同桥跨对中低速磁浮列车-简支梁系统竖向耦合振动影响机理研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(19):8-15.
LI Xiaozhen, WANG Yuwen, HU Qikai, et al. Influence Mechanisms of Different Bridge Spans on Vertical Coupled Vibration of Low and Medium Speed Maglev Train—simply Supported Beam System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(19): 8-15.
- [5] 刘伟渭, 姜瑞金, 刘凤伟, 等. 约束轮对首次穿越失效的随机非线性最优控制[J]. 铁道学报, 2018, 40(6):30-35.
LIU Weiwei, JIANG Ruijin, LIU Fengwei, et al. Stochastic Nonlinear Optimal Control for First-passage Failure of Constrained Wheelset[J]. Journal of the China Railway Society, 2018, 40(6):30-35.
- [6] 于建志, 陈永生. 磁浮列车自动驾驶系统控制策略及可靠性研究[J]. 计算机应用, 2010, 30(12): 3419-3422.
YU Jianzhi, CHEN Yongsheng. Control Strategy and Reliability Study of Maglev Automatic Train Operation System[J]. Journal of Computer Applications, 2010, 30(12):3419-3422.

- [7] XU Y S, LONG Z Q, ZHAO Z G, et al. Real-time Stability Performance Monitoring and Evaluation of Maglev Trains' Levitation System: a Data-driven Approach[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(3):1912-1923.
- [8] 张龙文, 卢朝辉, 赵衍刚. 基于平稳非高斯结构响应前四阶矩的首次穿越概率计算[J]. 振动与冲击, 2018, 37(1):128-135.
- ZHANG Longwen, LU Zhaohui, ZHAO Yangang. First Passage Probability Assessment Based on the First Four Moments of the Stationary Non-Gaussian Structural Responses[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(1):128-135.
- [9] LIU L, XU W, YANG G D, et al. Reliability and Control of Strongly Nonlinear Vibro-impact System under External and Parametric Gaussian Noises[J]. Science China Technological Sciences, 2020, 63(9):1837-1845.
- [10] ZHU W Q, WU Y J. First-passage Time of Duffing Oscillator under Combined Harmonic and White-noise Excitations[J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 32(3):291-305.
- [11] WANG L, DENG Z G, WANG H D, et al. Dynamic Responses of HTS Maglev System under Track Random Irregularity[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2020, 30(4):1-7.
- [12] XU J Q, CHEN C, SUN Y G, et al. Nonlinear Dynamic Analysis of Maglev Vehicle Based on Flexible Guideway and Random Irregularity[J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2019, 60(2):263-280.
- [13] 陈琛, 徐俊起, 荣立军, 等. 轨道随机不平顺下磁浮车辆非线性动力学特性[J]. 交通运输工程学报, 2019, 19(4):115-124.
- CHEN Chen, XU Junqi, RONG Lijun, et al. Nonlinear Dynamics Characteristics of Maglev Vehicle under Track Random Irregularities [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2019, 19(4):115-124.
- [14] 王连春, 李金辉, 周丹峰, 等. 磁浮列车-桥梁耦合自激振动机理分析与仿真验证[J]. 振动与冲击, 2017, 36(18):13-19.
- WANG Lianchun, LI Jinhui, ZHOU Danfeng, et al. Principle Analysis and Simulation Verification on the Vehicle-bridge Coupled Self-excited Vibration of Maglevs[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(18):13-19.
- [15] 黎燕霞, 徐磊. 磁浮列车随机稳定性及首次穿越问题研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2021, 18(11):2806-2815.
- LI Yanxia, XU Lei. Reserch on Stochastic Stability and First-passage of a Maglev Vehicle [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2021, 18(11):2806-2815.
- [16] 吴晗, 曾晓辉. 气动升力下磁浮车辆非线性响应研究[J]. 机械工程学报, 2021, 57(14):223-231.
- WU Han, ZENG Xiaohui. Nonlinear Dynamics of Malev Vehicle under Aerodynamic Lift [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(14):223-231.
- [17] WU H, ZENG X H, GAO D G, et al. Dynamic Stability of an Electromagnetic Suspension Maglev Vehicle under Steady Aerodynamic Load [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 97:483-500.
- [18] 陈志贤, 李忠继, 杨吉忠, 等. 常导高速电磁悬浮车辆二系悬挂结构对比优化[J]. 机械工程学报, 2022, 58(10):160-168.
- CHEN Zhixian, LI Zhongji, YANG Jizhong, et al. Comparison and Optimization of Secondary Suspension Structure of High Speed EMS Vehicle [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(10):160-168.
- [19] SUN J J, ZHU W Q, JIANG W D, et al. Reliability of a Class of Nonlinear Systems under Switching Random Excitations [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(3):2083-2094.
- [20] 刘扬. 对流扩散方程的新型Crank-Nicholson差分格式[J]. 数学杂志, 2005, 25(4):463-467.
- LIU Yang. A New Crank-Nicholson Difference Scheme for Convection-diffusion Equations [J]. Journal of Mathematics, 2005, 25(4):463-467.

(编辑 袁兴玲)

作者简介:刘伟渭(通信作者),男,1984年生,博士研究生。研究方向为轨道车辆系统动力学。发表论文20余篇。E-mail:liuweiwei1592@163.com。

本文引用格式:

刘伟渭,李阔,余玺,等. 磁悬浮列车首次穿越失效可靠性研究[J]. 中国机械工程, 2025, 36(10):2232-2240.

LIU Weiwei, LI Kuo, YU Xi, et al. Research on First-passage failure and Reliability Analysis of Maglev Trains [J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(10):2232-2240.