

基于约束线的瞬轴求解方法

王友利* 郭佳程 王晓慧

太原科技大学机械工程学院,太原,030024

摘要:目前,空间瞬轴的主流求解方法为代数法,但机构稍复杂时代数法难以应用。从机构自由度本质为约束的观点出发,将机构运动副的约束用构件间的约束线来等效,研究了构件约束线数量及几何关系与构件自由度之间的关系。研究了构件约束线的性质与传递规律,证明了构件两条约束线的交点为构件的瞬心,两个约束面的交线为瞬轴,并从几何学角度论证了构件瞬心和瞬轴存在的充要条件。对构件约束线进行几何绘图和几何解析可确定机构构件的瞬心或瞬轴的位置。通过对Bennett机构连杆约束线的几何绘图和几何解析,求解了Bennett机构连杆的自由度和瞬轴,证明了从约束线出发求解构件瞬心和瞬轴方法的可行性。

关键词:约束线;瞬心;瞬轴;Bennett机构

中图分类号:TH122

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.01.008

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



A Method for Solving Instantaneous Axes Based on Constraint Line

WANG Youli* GUO Jiacheng WANG Xiaohui

School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan, 030024

Abstract: At present, the mainstream solution of spatial instantaneous axes was algebraic method, which was difficult to apply when the mechanisms were slightly complex. Starting from the perspective that the degrees of freedom of a mechanism were essentially constraints, the constraints of the motion pairs in the mechanisms were equivalent to the constraint lines between components, and the relationship between the number and geometric relationship of constraint lines on components and the degrees of freedom of components were studied. The properties and transmission laws of constraint lines on components were studied. It is proved that the intersection point of two constraint lines of a certain component is the instantaneous center, and the intersection line of two constraint surfaces is the instantaneous axis. The necessary and sufficient conditions for the existence of instantaneous centers and axes of components were demonstrated from a geometric perspective. Through geometric drawing and geometric analysis of constraint lines on components, the position of the instantaneous center or axis of each component in the mechanisms might be determined. The positions of instantaneous centers and axes were obtained through geometric drawing and analysis of the constraint lines on components. By geometric drawing and analysis of the constraint lines of the connecting rods in Bennett mechanisms, the degrees of freedom and instantaneous axis of the connecting rods in the Bennett mechanisms were solved, and the feasibility of using constraint lines to solve the instantaneous centers and axes was demonstrated.

Key words: constraint line; instantaneous center; instantaneous axis; Bennett mechanism

0 引言

瞬心与瞬轴在刚体的运动分析中至关重要,找到刚体的瞬心或瞬轴便可求得刚体上其余各点的速度。平面运动分析中,速度瞬心法是机构速度分析的一种重要方法,该方法能简捷直观地分析机构中某位置的运动特性,因而应用广泛^[1]。空间运动中,任一构件的瞬时运动都可看成是构件沿某瞬时轴(简称为瞬轴)做螺旋运动,因此要

分析构件的空间运动,必须先找到瞬轴。

瞬心研究中,罗洪田^[2]采用罗氏定式求解三心定理无法解决的瞬心问题。刘海生等^[3]创建多边形瞬心链方法求解瞬心。钱卫香等^[4]提出一套通用的机构综合模型来求解机构无穷远处的瞬心。杨浩然等^[5]基于速度瞬心,结合机械结构建立凸轮数学模型,以确定无碳小车的运行轨迹。黎朝阳等^[6]通过对外骨骼瞬心轨迹方程的求解,设计出气动人工肌肉驱动的可变瞬心人工膝关节。FOSTER等^[7-8]利用拓扑关系研究了二自由度、三自由度平面连杆机构的瞬心,提出一种求解

收稿日期:2024-08-30

基金项目:国家自然科学基金(51975395)

瞬心的方法。KIM等^[9]提出一种基于图形和速度关系就可确定平面闭式链机构瞬心的方法,该方法适用于四杆机构、曲柄滑块机构等各种平面闭链瞬心的求解。FERNANDES等^[10]基于空间运动状态的H表示法,提出一种估算关节空间内底盘瞬时旋转中心的算法。基于对瞬时回转中心的研究,ASGARI等^[11]设计了评估滚动阻尼的衰减试验。

瞬轴的研究中,朱喜林等^[12]利用对偶数和螺旋理论分析了空间机构运动中瞬轴与瞬轴面的特性。陈子明等^[13]利用几何方法绘制出空间少自由度并联机构的瞬轴曲面。张雷雷等^[14-15]分析了并联机构的运动特性,综述了瞬轴面的分布规律及推导过程。EHRIG等^[16]基于旋转矩阵的奇异值分解,提出一种从运动数据中确定瞬轴的方法。PAGE等^[17-18]提出一种确定瞬轴路径的模型来获得最佳的平均瞬轴路径。Di GREGORIO^[19]分析单自由度机构时,利用瞬轴位姿设计了一种几何分析方法来识别空间单自由度机构的奇异性。BRU等^[20]通过建立数学公式与模拟仿真来确定人体运动过程中瞬轴的位置。

瞬心和瞬轴的求解方法以几何法与代数法为主。几何法一般以三心定理为基础,只能解决简单的瞬心问题,面对复杂机构时难以应用。代数法普适性强,但机构越复杂,计算量越大。因此,本文将构件间运动副的约束关系转化为构件间约束线的数量和几何关系,基于约束线限制刚体自由度的规则及构件间约束线的几何关系,研究平面机构的瞬心和空间机构的瞬轴求解方法。

1 约束线的定义与几何关系

1.1 约束线与约束面的定义

刚体运动时,刚体上速度不为零的点称为动点,速度为零的点称为静点。

约束点:运动刚体与静止刚体的接触点。

约束线:以约束点为起点、沿公法线方向(两方向均可)的矢量。

约束面:两条非异面约束线组成的平面。

全约束:若刚体在某约束面内无自由度,则称该刚体在该约束面内为全约束。若刚体在空间无自由度,则称该刚体在空间内为全约束。

1.2 约束线限制刚体自由度的规则

运动刚体与静止刚体接触时,约束线的数量和几何关系决定了刚体被限制自由度的数量和性质。

根据约束法线^[21]的定义和性质可知运动刚体上的动点均不能在约束点的公法线方向做直线运动,即运动刚体与静止刚体接触时,运动刚体不能沿其约束线方向移动,因此约束线限制了刚体沿约束线方向的移动自由度。

规则 1 若刚体存在一条约束线,则该刚体沿约束线方向的移动自由度被限制。

规则 2 若刚体在一个平面内存在两条相交的约束线,则刚体在该平面内的移动自由度被约束,且约束线交点为该刚体的瞬心。

如图 1a 所示,刚体 A 在约束点 P_1 、 P_2 存在相交的约束线 F_1 和 F_2 ,交点为 P_3 。根据规则 2,若刚体在约束线 F_1 和 F_2 方向的移动自由度被限制,则点 P_3 瞬时为静点,刚体只有绕点 P_3 转动的自由度。刚体 A 上其余点均为不能做直线移动的动点,即刚体 A 在 F_1 与 F_2 所在的平面内任意方向的移动自由度都被约束线限制。约束线 F_1 与 F_2 可等效为交点为 P_3 的两条垂直约束线 F'_1 和 F'_2 ,如图 1b 所示。

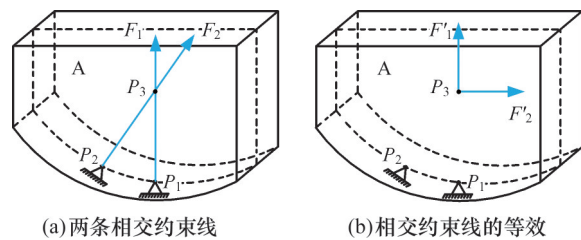


图 1 两条相交约束线的关系及等效

Fig.1 The relationship and equivalence of two intersecting constraint lines

规则 3 若刚体在平面内存在三条不交于一点的约束线,则该刚体在该平面内为全约束。

如图 2 所示,刚体 A 在约束点 P_1 、 P_2 和 P_3 存在约束线 F_1 、 F_2 和 F_3 ,若三条约束线在同一平面内且不交于一点,则刚体的瞬心不止一个,刚体的所有点在该平面内均为静点,即刚体在该平面内无自由度。根据全约束定义,刚体在约束线 F_1 、 F_2 、 F_3 所在平面内全约束。

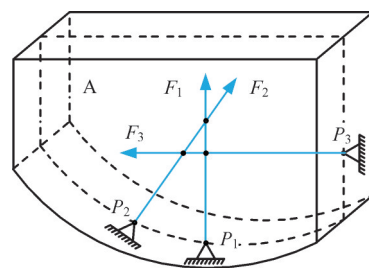


图 2 刚体在平面内全约束的约束线分布

Fig.2 The distribution of constraint lines for a rigid body fully constrained in a plane

规则4 若刚体存在若干条与某个平面平行的约束线,则各约束线限制的自 由度性质与该约束线在平面上投影得到的约束线限制的自 由度性质相同。

如图3a所示,若刚体在约束点 P_1 、 P_2 存在两条异面约束线 F_1 与 F_2 ,则两条异面直线一定平行于某平面,过约束线 F_1 、 F_2 可构建两个平行面。如图3b所示,根据规则4进行异面约束线 F_1 与 F_2 的等效,约束线 F_2 可等效为 F_1 所在面的投影 F_3 (F_3 与 F_1 相交于点 P_3)。根据规则2, F_1 与 F_3 限制了刚体在 F_1 与 F_3 所在平面及其平行平面内的移动自 由度。过 P_3 作 F_1 与 F_3 所在平面的垂线 L 。 L 是 F_1 与 F_2 的公垂线,刚体能绕 L 转动。

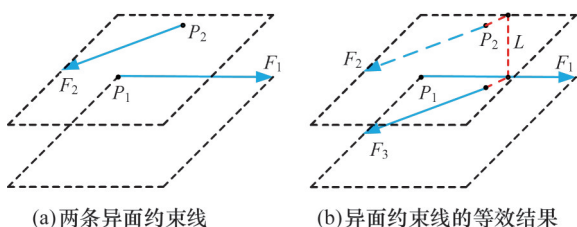


图3 两条异面约束线关系及等效结果

Fig.3 The relationship and equivalence of two constraint lines in different planes

如图4a所示,假设刚体的约束线 F_1 、 F_2 平行于同一平面,则刚体在约束点 P_2 存在一条与约束面平行的约束线 F_3 。如图4b所示,约束线 F_3 可等效为约束面的投影 F_4 ,约束线 F_1 、 F_2 和 F_4 不交于一点,根据规则3,该刚体在 F_1 与 F_2 组成的约束面及其平行平面内为全约束。

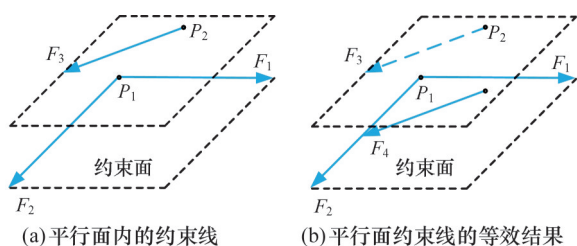


图4 平行面内的约束线关系及等效结果

Fig.4 The relationship and equivalence of constraint lines in parallel planes

规则5 若刚体存在3条不能平移到同一平面的约束线,则该刚体无移动自 由度。

若刚体存在3条不能平移到同一平面的约束线,则这3条约束线两两不平行。根据规则2与规则4,任意2条约束线的关系为相交或异面时,刚体在某个约束面内无移动自 由度,且剩下的1条约束线必与该约束面相交。这3条约束线使刚体在空间内无移动自 由度。

1.3 约束线的传递规律

刚体上2条相交的约束线组成一个约束面,约束线的交点为刚体的瞬心。瞬心在该约束面内为静点,刚体上的其余点在该约束面内为动点,动点在该约束面内只能绕静点转动。本文将静点与动点连线的方向定义为旋转半径方向,则以静点为起点,刚体存在1条沿旋转半径方向的约束线。该约束线与刚体之前存在的约束线等效,即约束线可通过静点及瞬心传递,且这种传递并不会增加新的约束线。

2 基于约束线的平面机构瞬心求解

2.1 平面内构件瞬心的求解

根据约束线的性质及几何关系,可得瞬心的求解方法。图5所示的平面机构中,固定的机架通过转动副约束构件1两个方向的移动自 由度,因此机架对构件1产生2条相交约束线,转动副中心为构件1的绝对瞬心 P_{01} ,构件1只能绕点 P_{01} 转动。根据约束线的传递规律,构件1上所有点都存在沿旋转半径方向的约束线 F_1 。同理,根据约束线性质和传递规律,机架对构件2产生2条相交约束线,构件2绝对瞬心为转动副中心 P_{02} ,构件2上所有点都存在沿旋转半径方向的约束线 F_2 。

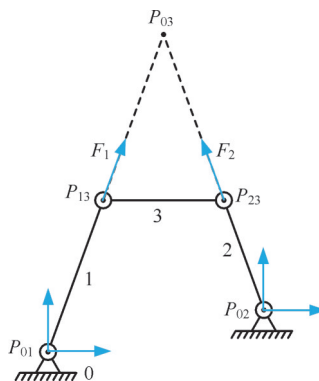


图5 平面机构瞬心求解

Fig.5 The solution of instantaneous center of planar mechanisms

构件1与构件3的相对瞬心为转动副中心 P_{13} 。点 P_{13} 同时属于构件1与构件3,不能沿 F_1 方向移动。同理,构件2与构件3的相对瞬心 P_{23} 不能沿 F_2 方向移动。杆件3存在相交的约束线 F_1 与 F_2 ,根据规则2,构件3的绝对瞬心 P_{03} 为两约束线的交点。

2.2 瞬心与约束线的关系

机械原理^[22]中,三心定理只能用反证法证明,而根据约束线的定义和传递,机架0对构件1

的约束线 F_1 也是构件 1 对构件 3 的约束线,如图 5 所示。瞬心一定在约束线上,因此机架 0、构件 1、构件 3 两两之间的 3 个瞬心一定共线。

发生相对运动的两构件在理论上存在 1 个瞬心,平面机构的瞬心数量 $N=k(k-1)/2$,其中, k 为构件数量。实际的两构件不一定有瞬心。若某构件相对于地面只存在一条约束线,则该构件无绝对瞬心,即存在至少 2 条约束线是两构件之间存在瞬心的必要条件。

3 基于约束线的瞬轴求解

3.1 瞬轴与约束线的关系

如图 6 所示,若某构件与机架有 5 条约束线,其中,约束线 $F_1、F_2、F_3$ 组成约束面 1,约束线 $F_4、F_5$ 组成约束面 2, F_1 与 F_2 相交于点 P_1 , F_4 与 F_5 相交于点 P_2 , F_3 的约束点为点 P_3 ,两约束面的交线为 L ,点 P_1 、点 P_2 和点 P_3 均不在交线 L 上。

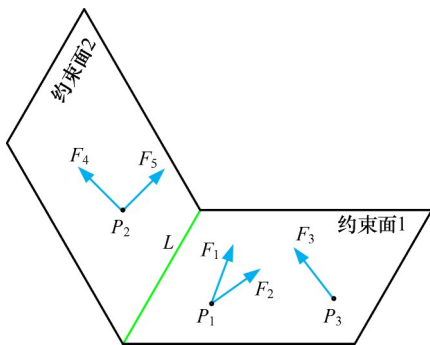


图 6 基于约束线求解构件瞬轴的第一种情况

Fig.6 The first scenario of solving the instantaneous axes of components based on constraint line

该构件在 2 个约束面内存在 5 条约束线,根据规则 5,约束线 $F_1、F_2、F_4$ 异面且不平行,不能平移到同一平面,因此该构件无移动自由度。根据规则 3,构件在约束面 1 内全约束,无转动自由度。根据规则 2,如图 7 所示,约束线 $F_1、F_3$ 和 F_5 可等效为与直线 L 平行的约束线 $F'_1、F'_3$ 和 F'_5 , F'_1 与 F'_5

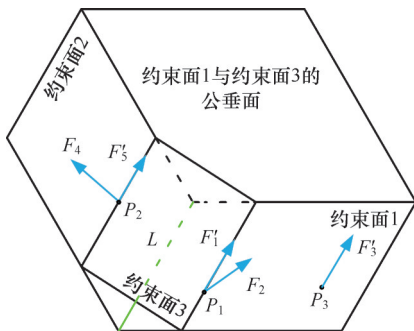


图 7 对图 6 基于约束线求解构件瞬轴

Fig.7 Solution of component instantaneous axis based on constraint line in Fig.6

可组成约束面 3。 F'_1 与 F'_5 平行,则限制了构件在约束面 3 内的转动。构件在约束面 3、约束面 1 内无转动自由度,则只能在约束面 1 与约束面 3 的公垂面内转动,即构件能绕公垂面的垂线转动。直线 L 平行于 F'_1 和 F'_5 ,则直线 L 垂直于该公垂面,且 L 上的点在公垂面内无移动自由度,即 L 上的点为公垂面内的瞬心,则直线 L 为构件的绝对瞬轴。

如图 8 所示,若构件在约束面 2 内存在 2 条不与直线 L 平行的约束线(平行约束线不与约束面 1 平行),则 5 条约束线限制了该构件的移动自由度,以及在约束面 1、约束面 2 内的转动自由度,亦可得直线 L 是该构件的绝对瞬轴。

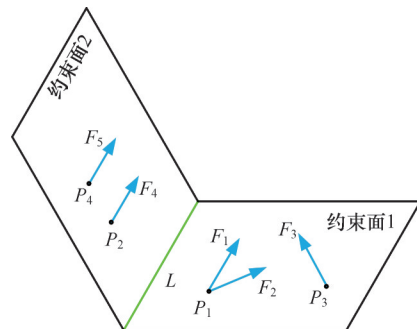


图 8 基于约束线求解构件瞬轴的第二种情况

Fig.8 The second scenario of solving the instantaneous axes of components based on constraint line

如图 9 所示,若构件在约束面 2 内存在与直线 L 平行的约束线 F_4 与 F_5 ,即这 2 条平行约束线与约束面 1 平行,则这 2 条平行约束线限制了构件沿约束线 $F_4、F_5$ 方向的移动,还限制了垂直于直线 L 的转动。约束面 1 内的 3 条约束线限制了约束平面 1 内的沿 L 方向即约束线 $F_1、F_3$ 方向的移动,因此构件存在平面 1 内移动方向的过约束。约束面 1 垂直方向的移动自由度没有被约束,因此该构件无绝对瞬轴。

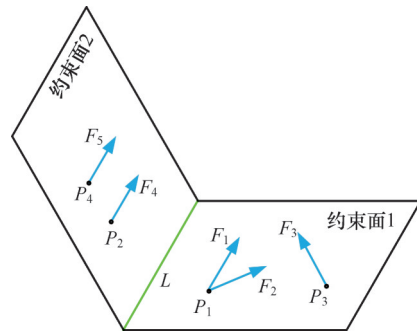


图 9 基于约束线求解构件瞬轴的第三种情况

Fig.9 The third scenario of solving the instantaneous axes of components based on constraint line

若构件只有绕轴的转动自由度,则该轴为构件的绝对瞬轴,因此构件存在绝对瞬轴的充要条

件为：①构件无移动自由度。②构件存在至少2个含有平行约束线或全约束的约束面，且这些约束面存在唯一的公垂面。③若构件的2个约束面仅有1条交线，则交线上的点均为静点；若交线垂直于公垂面，则交线为构件的绝对瞬轴。

3.2 空间运动副的等效约束

刚体自由度的限制是通过运动副的约束实现的，运动副元素可以是面接触、线接触和点接触。面由线组成，两点可确定一条直线，因此运动副的约束最后都可归结为点的约束，可用约束线等效表示。

根据约束线的传递规律，若构件通过转动副连接，而转动副中心一般为相对瞬心或相对瞬轴（瞬心在瞬轴上），则分析传递到瞬心上的约束线即可分析与该转动副连接的其他构件。

下面以 Bennett 机构为例求解瞬轴。

3.3 Bennett 机构中连杆瞬轴位置的确定

Bennett 机构是特殊的单自由度机构，该机构对边长度相等，对边扭角相等。该机构4个转动副的中心轴为轴1~4，轴1与轴3的转动副轴线交错角不等的 Bennett 机构类别不同。

图10所示 Bennett 机构中，轴1与轴3的夹角为 90° ，通过特殊设计可使四轴之间的公垂线在空间中形成闭环。建立空间直角坐标系，设定轴1为X轴，轴1与轴3的公垂线为Y轴，公垂线交轴1的点设为原点O，过O点与OXY平面垂直的轴为Z轴。

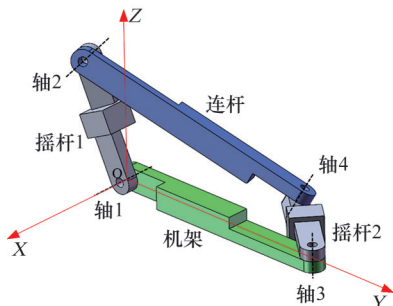


图10 Bennett 机构

Fig.10 Bennett mechanism

图11中，摇杆1与机架通过转动副连接，只有绕轴1的转动自由度，轴1在固定的机架上，则轴1固定。对于摇杆1，轴1上的点为静点，其余点为动点，所有动点在OYZ平面内只能绕静点转动，且在X向无移动自由度。轴2属于摇杆1，在轴2上任取两动点 P_1 与 P_2 ，则点 P_1 、 P_2 只能绕轴1上的静点转动，存在沿其旋转半径方向的约束线 F_1 与 F_2 ，以及X向的平行约束线 F_3 与 F_4 （二者组成约束面1）。

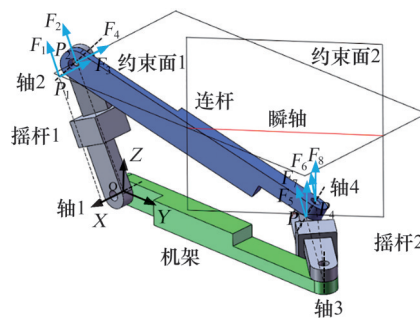


图11 Bennett 机构中连杆的瞬轴分析

Fig.11 Analysis of the instantaneous axis of the connecting rod in a Bennett mechanism

轴3与机架相连，则轴3固定。同理，对于摇杆2，轴3上的点为静点，其余点为动点，所有动点在OXY平面内只能绕轴3上的静点转动，且在Z向无移动自由度。在轴4上任取动点 P_3 与 P_4 ， P_3 、 P_4 存在沿其旋转半径方向的平行约束线 F_5 与 F_6 ，以及Z向的约束线 F_7 与 F_8 （二者组成约束面2）。

轴2同时属于摇杆1与连杆，轴4同时属于摇杆2与连杆，因此机架对连杆的约束可看成是机架通过摇杆1对轴2的约束和机架通过摇杆2对轴4的约束，即机架对连杆的约束就是轴2和轴4上受到的约束，轴2和轴4上共有8条约束线，即连杆共存在机架传递的8条约束线。

平行约束线 F_3 和 F_4 、平行约束线 F_7 和 F_8 约束了2个移动自由度和2个转动自由度，根据规则5，其余的4条约束线与约束线 F_3 / F_4 和约束线 F_7 / F_8 共约束了3个移动自由度，即6条约束线约束了3个自由度。连杆存在5条有效约束线，因此连杆无3个方向的移动自由度且在约束面1、约束面2内无转动自由度。平行约束线 F_3 和 F_4 、平行约束线 F_7 、 F_8 均不与两约束面的交线平行，则交线上的点均为静点，因此这两组平行约束线形成的约束面的交线即为连杆的绝对瞬轴，连杆有一个绕该瞬轴转动的自由度。

如图12所示，轴1与轴2的公垂线交轴2于点P，轴1与轴3的公垂线交轴3于点Q，轴3与轴4的公垂线交轴4于点R。 OP 与 OQ 的夹角为 θ_1 ($0^\circ < \theta_1 < 180^\circ$)， OQ 与 QR 的夹角为 θ_2 ($0^\circ < \theta_2 < 180^\circ$)，轴1与轴2异面，且轴1在XOY平面内，轴2与OXY平面平行，轴2上的约束线 F_3 、 F_4 与轴1平行，则 F_3 、 F_4 组成的约束面1始终与OXY平面平行，由此可得约束面1的方程 $z = a \cos \theta_1$ ，其中， a 为 OP 与 QR 的长度。

Q点坐标为 $(0, b, 0)$ ，P点坐标为 $(0, a \cos \theta_1, a \sin \theta_1)$ ，R点坐标为 $(-a \sin \theta_2, b - a \cos \theta_2, 0)$ ，其中， b 为 OQ 与 PR 的长度。 QR 垂直于轴3、轴4，

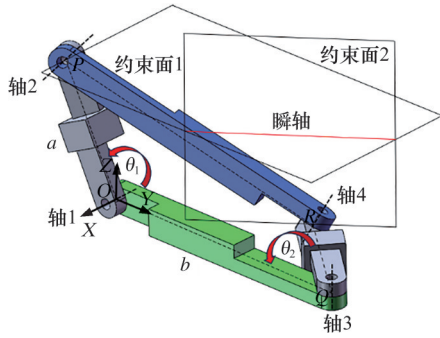


图 12 连杆瞬轴方程求解

Fig.12 Solution of the instantaneous axis equation of the connecting rod

约束线 F_7 、 F_8 均与轴 3 平行, 则 QR 垂直于约束面 2, 可得约束面 2 的方程:

$$(x + a \sin \theta_2) \sin \theta_2 + (y - b + a \cos \theta_2) \cos \theta_2 = 0$$

PR 的长度为 b , 可得 θ_1 与 θ_2 的关系:

$$(a \sin \theta_2)^2 + (b - a \cos \theta_2 - a \cos \theta_1)^2 + (a \sin \theta_1)^2 = b^2$$

化简可得

$$\cos \theta_1 = (b \cos \theta_2 - a) / (a \cos \theta_2 - b) = z$$

将约束面 1 和约束面 2 的方程联立, 可得瞬轴方程:

$$\left. \begin{aligned} a x \sin \theta_2 + a y \cos \theta_2 + a^2 - a b \cos \theta_2 &= 0 \\ z &= (b \cos \theta_2 - a) / (a \cos \theta_2 - b) \end{aligned} \right\}$$

从基于约束线的角度, 通过绘图和简单的几何解析可得机构瞬轴的笛卡儿直角坐标系方程。该方法在某些单自由度机构的分析上更简单。

4 结论

1) 约束线能表达机构运动副的约束关系, 通过判断约束线的数量及几何关系求解构件的瞬心与瞬轴。该方法简单直观, 避免了代数法的复杂分析计算。

2) 若两构件之间存在瞬心或瞬轴, 则两构件之间的瞬心或瞬轴一定在约束线或约束面上。

3) 2 个构件存在至少 2 条约束线是 2 个构件之间存在瞬心的必要条件, 存在至少 2 个约束面是 2 个构件之间存在瞬轴的必要条件。

参考文献:

[1] 马砚樵, 千学明, 冯欢. 速度瞬心必然存在的证明与研究[J]. 机械工程师, 2016(7): 31-33.
MA Yanqiao, QIAN Xueming, FENG Huan. Proving and Researching the Inevitable Existence of Instantaneous Center of Velocity[J]. Mechanical Engineer, 2016(7): 31-33.

[2] 罗洪田. 浅谈隐交点作图法——介绍德沙格(Desargue)定理的应用[J]. 教材通讯, 1987(2): 35-37.
LUO Hongtian. On the Drawing Method of Hidden Intersection—Introducing the Application of Desargue Theorem [J]. China University Teaching, 1987(2): 35-37.

[3] 刘海生, 付正飞, 李春平. 复杂机构速度瞬心确定方法的

研究[J]. 机械, 2008, 35(8): 17-19.
LIU Haisheng, FU Zhengfei, LI Chunping. The Research of Way for Locating Velocity Instantaneous Center of Complex Mechanism[J]. Machinery, 2008, 35(8): 17-19.

[4] 钱卫香, 杨银烁, 靳智超, 等. 瞬心无穷远近似直线导向机构综合及解域寻优方法[J]. 机械传动, 2023, 47(7): 29-34.
QIAN Weixiang, YANG Yinshuo, JIN Zhichao, et al. Synthesis and Solution Region Optimization Method of a Straight-line Mechanism with Instant Center at Infinity[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2023, 47(7): 29-34.

[5] 杨浩然, 赵旺初, 胡家豪. 基于速度瞬心的无碳小车复杂轨迹运行方案与虚拟样机仿真[J]. 机械设计, 2023, 40(7): 15-19.
YANG Haoran, ZHAO Wangchu, HU Jiahao. Complex Trajectory Operation Scheme and Virtual Prototype Simulation of Carbon-free Car Based on Instantaneous Center of Velocity [J]. Journal of Machine Design, 2023, 40(7): 15-19.

[6] 黎朝阳, 罗天洪, 马翔宇, 等. 气动人工肌肉驱动的可变瞬心外骨骼设计与研究[J]. 中国机械工程, 2024, 35(10): 1783-1792.
LI Chaoyang, LUO Tianhong, MA Xiangyu, et al. Design and Research of Variable Instantaneous Center Exoskeletons Driven by Pneumatic Artificial Muscles [J]. China Mechanical Engineering, 2024, 35(10): 1783-1792.

[7] FOSTER D E, PENNOCK G R. A Study of the Instantaneous Centers of Velocity for Two-degree-of-freedom Planar Linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(4): 641-657.

[8] FOSTER D E, PENNOCK G R. A Study of the Instantaneous Centers of Velocity for the 3-dof Planar Six-bar Linkage [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(9): 1276-1300.

[9] KIM M, HAN M S, SEO T, et al. A New Instantaneous Center Analysis Methodology for Planar Closed Chains via Graphical Representation [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2016, 14(6): 1528-1534.

[10] FERNANDES A C, ASGARI P, SOARES A R W. Asymmetric Roll Center of Symmetric Body in Beam Waves [J]. Ocean Engineering, 2016, 112: 66-75.

[11] ASGARI P, FERNANDES A C, LOW Y M. Most often Instantaneous Rotation Center (MOIRC) for Roll Damping Assessment in the Free Decay Test of a FPSO [J]. Applied Ocean Research, 2020, 95: 102014.

[12] 朱喜林, 江国宪. 空间机构运动中瞬轴面的动态模拟 [J]. 吉林工业大学学报, 1994, 24(1): 57-60.
ZHU Xilin, JIANG Guoxian. Dynamic Simulation on Axode in a Movement of Space Mechanisms [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 1994, 24(1): 57-60.

[13] 陈子明, 黄真, 曹文熬. 空间少自由度并联机构瞬时螺旋运动轴线曲面的几何表示方法 [J]. 燕山大学学报, 2012, 36(2): 113-118.
CHEN Ziming, HUANG Zhen, CAO Wenao. Geometric Expression of Axodes of Spatial Lower Mobility Parallel Mechanism [J]. Journal of Yanshan University, 2012, 36(2): 113-118.

[14] 张雷雷. 并联机构动定瞬轴面的螺旋对滚及其分布规律研究 [D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2022.
ZHANG Leilei. Theoretical Study on Screw Rolling between and Distribution Regularity of Fixed and Moving Axodes Traced by Parallel Mechanisms [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2022.

- [15] 张雷雷, 赵延治, 赵铁石. 并联机构瞬轴面研究进展[J]. 机械工程学报, 2023, 59(21): 131-146.
ZHANG Leilei, ZHAO Yanzhi, ZHAO Tieshi. State of the Art of Axodes Traced by Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(21): 131-146.
- [16] EHRIG R M, HELLER M O. On Intrinsic Equivalences of the Finite Helical Axis, the Instantaneous Helical Axis, and the SARA Approach. a Mathematical Perspective[J]. Journal of Biomechanics, 2019, 84: 4-10.
- [17] PAGE A, GALVEZ J A, de ROSARIO H, et al. Optimal Average Path of the Instantaneous Helical Axis in Planar Motions with One Functional Degree of Freedom[J]. Journal of Biomechanics, 2010, 43(2): 375-378.
- [18] PAGE Á, INGLÉS M, VENEGAS W, et al. Effect of Non-specific Neck Pain on the Path of the Instantaneous Axis of Rotation of the Neck during Its Flexion-extension Movement [J]. Musculoskeletal Science and Practice, 2023, 64: 102737.
- [19] Di GREGORIO R. Singularity Analysis of Spatial Single-DOF Mechanisms Based on the Locations of the Instantaneous Screw Axes[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 189: 105438.
- [20] BRU B, PASQUI V. A New Method for Determining the Location of the Instantaneous Axis of Rotation during Human Movements[J]. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2009, 12(S1): 65-67.
- [21] 罗国军, 王晓慧, 闫献国, 等. 基于约束法线的多环耦合机构自由度分析计算[J]. 机械传动, 2022, 46(5): 62-67.
LUO Guojun, WANG Xiaohui, YAN Xianguo, et al. Analysis and Calculation of DOF of Multi-loop Coupling Mechanism Based on Constraint Normal Line[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(5): 62-67.
- [22] 孙桓, 陈作模, 葛文杰. 机械原理[M]. 8版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
SUN Huan, CHEN Zuomo, GE Wenjie. Theory of Machines and Mechanisms[M]. 8th ed. Beijing: Higher Education Press, 2013.

(编辑 张 洋)

作者简介:王友利^{*}(通信作者),女,1981年生,博士、副教授、硕士研究生导师。研究方向为机械设计理论、结构设计、机械制造过程中的尺寸精度设计。发表论文20余篇。E-mail: ylwang0522@163.com。

本文引用格式:

王友利,郭佳程,王晓慧. 基于约束线的瞬轴求解方法[J]. 中国机械工程, 2026, 37(1): 66-72.
WANG Youli, GUO Jiacheng, WANG Xiaohui. A Method for Solving Instantaneous Axes Based on Constraint Line[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(1): 66-72.

(上接第65页)

- [23] 刘俊, 吴清源, 李毓洲, 等. 小尺寸涡轮盘槽激光冲击强化关键技术研究[J]. 电加工与模具, 2019(6): 47-50.
LIU Jun, WU Qingyuan, LI Yuzhou, et al. Research on Key Technology of Laser Shock Strengthening for Small-size Turbine Disk Groove[J]. Electromachining & Mould, 2019(6): 47-50.
- [24] 肖值兴, 毛建兴, 田腾跃, 等. 涡轮盘槽激光冲击强化数值模拟与试验验证[J]. 航空动力学报, 2022, 37(11): 2448-2454.
XIAO Zhixing, MAO Jianxing, TIAN Tengyue, et al. Numerical Simulation and Experimental Verification on Laser Shock Peening for Turbine Mortise[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(11): 2448-2454.
- [25] 孙蕴齐, 姚倡锋, 孙换凤, 等. 高温合金喷丸工艺表面完整性及其疲劳性能研究进展[J/OL]. 中国机械工程, 2025: 1-26. (2025-06-16). <https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1294.th.20250613.1754.004.html>.
SUN Yunqi, YAO Changfeng, SUN Huanfeng, et al. Research Progress on Surface Integrity and Fatigue Performance of High-temperature Alloy Shot Peening Process[J/OL]. China Mechanical Engineering, 2025: 1-26. (2025-06-16). <https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1294.th.20250613.1754.004.html>.
- [26] 张宇, 李文辉, 温学杰, 等. 喷丸、滚磨及其组合强化对TC4表面完整性的实验研究[J/OL]. 太原理工大学学报, 2025: 1-12. (2025-02-08). <https://kns.cnki.net/kcms/detail/14.1220.N.20250208.1011.003.html>.
ZHANG Yu, LI Wenhui, WEN Xuejie, et al. Experimental Study on the Surface Integrity of TC4 by Shot Peening, Mass Finishing and Their Combined Strengthening [J/OL]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2025: 1-12. (2025-02-08). <https://kns.cnki.net/kcms/detail/14.1220.N.20250208.1011.003.html>.
- [27] 安宏亮, 刘梦金, 牛志强, 等. 机械喷丸+激光冲击复合表面改性TC4钛合金表面完整性研究[J]. 失效分析与预防, 2024, 19(5): 337-345.
AN Hongliang, LIU Mengjin, NIU Zhiqiang, et al. Surface Integrity Research of TC4 Titanium Alloy Treated by Laser Shock Peening and Shot Peening[J]. Failure Analysis and Prevention, 2024, 19(5): 337-345.
- [28] 林超辉. 航空发动机涡轮盘榫接材料激光斜冲击强化机理研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2021.
LIN Chaohui. Research on Laser Oblique Shock Peening Mechanism of Aero-engine Turbine Disk Dovetail Joint Material[D]. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2021.
- [29] 王燕礼, 朱有利, 杨嘉勤. 滚压强化技术及在航空领域研究应用进展[J]. 航空制造技术, 2018, 61(5): 75-83.
WANG Yanli, ZHU Youli, YANG Jiaqin. Rolling Reinforcement Technology and Its Research Application Progress in Aviation Field [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2018, 61(5): 75-83.
- [30] 齐欢. INCONEL 718(GH4169)高温合金的发展与工艺[J]. 材料工程, 2012, 40(8): 92-100.
QI Huan. Review of INCONEL 718 Alloy: Its History, Properties, Processing and Developing Substitutes [J]. Journal of Materials Engineering, 2012, 40(8): 92-100.

(编辑 张 洋)

作者简介:余昶锐,男,2002年生,硕士研究生。研究方向为抗疲劳制造加工技术。发表论文1篇。E-mail: 15617001176@163.com。
李 勋^{*}(通信作者),男,1980年生,副教授、硕士研究生导师。研究方向为航空航天高性能材料切削磨削加工技术及其表面完整性。E-mail: lixun@buaa.edu.cn。

本文引用格式:

余昶锐,刘良宝,周靖刚,等. 面向涡轮盘榫槽凹圆弧表面的滚压参数优化[J]. 中国机械工程, 2026, 37(1): 60-65.
YU Changrui, LIU Liangbao, ZHOU Jinggang, et al. Optimization of Roller Burnishing Parameters for Concave Circular-arc Surfaces of Turbine Disk Mortise Grooves[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(1): 60-65.