

# 可轮换用动平台三自由度并联机构的拓扑设计及其性能分析

朱 潇 沈惠平\* 李 菊 李 涛 叶鹏达 朱 伟

常州大学现代机构学研究中心,常州,213164

**摘要:**根据基于方位特征方程的并联机构拓扑设计理论和方法,设计了一种通过轮换使用动平台产生两种输出运动的三自由度并联机构。分析计算了该机构在两种模式下的以下特性:包括方位特征、自由度和耦合度的拓扑特征;符号式位置正反解、工作空间和奇异性的运动学性能;驱动力变化的动力学性能。然后,以可达工作空间为目标对机构尺寸进行了优化设计。最后对该机构在自动包装物件生产的应用场景进行了概念设计。

**关键词:**并联机构;拓扑学;可轮换用动平台;运动学;动力学;优化设计

**中图分类号:**TH12

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.01.013

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Topological Design and Performance Analysis of 3-DOF Parallel Mechanisms with Alternately Used Moving Platforms

ZHU Xiao SHEN Huiping\* LI Ju LI Tao YE Pengda ZHU Wei

Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu, 213164

**Abstract:** According to the theory and method of topological design for parallel mechanisms based on azimuthal characteristic equations, a 3-DOF parallel mechanism with alternately used moving platforms was designed. The mechanism generated two output motion modes by swapping the moving platform. The characteristics of the mechanism such as topological characteristics, kinematics performance, and dynamics performance were analyzed and calculated under two different modes. Topological characteristics were composed of position and orientation characteristics, degrees of freedom, and coupling degree. Kinematics performances were composed of symbolic forward and inverse position solutions, workspace, and singularity. Dynamics performances were composed of driving force variations. Then, the dimensional parameters of the mechanisms were subjected to an optimal design with the goal of achieving a reachable workspace. Finally, a conceptual design was conducted for the application scenario of using the mechanisms in automated object packaging productions.

**Key words:** parallel mechanism; topology; alternately used moving platform; kinematics; dynamics; optimal design

### 0 引言

三平移一转动(3T1R)和三平移(3T)的三自由度并联机构(parallel mechanism, PM)因驱动元件少、设计制造方便而具有较高的实用价值。

3T1R并联机构在空间抓取操作领域具有显著的应用价值。KRUT等<sup>[1]</sup>设计出一系列能实现3T1R的高速搬运机器人。GHAFFARI等<sup>[2]</sup>设计的3T1R并联机构具有部分解耦、结构简单、对称分布的特点,可用于涡轮叶片的加工。贺磊盈

等<sup>[3]</sup>针对大多数3T1R并联机构的动平台转动范围小于90°的问题,设计了动平台转动范围360°的混合型3T1R并联机构。

3T并联机构可用于搬运、焊接、喷涂等操作。BOURI等<sup>[4]</sup>提出了旋转型和直线型驱动的并联机器人机构(直线型驱动并联机构比旋转型驱动并联机构的工作空间更大)。PRAUSE等<sup>[5]</sup>通过数综合、边界条件和工作空间等多维度评价体系对多种机构构型进行了综合性能对比分析,筛选出具有优越运动性能优化机构构型。MAZARE等<sup>[6]</sup>研究了一种具有3T的三自由度并联机构机床,求得不同位姿下动平台的雅可比矩阵,计算了机构的灵巧度。

生产线在不同工作阶段分别输出3T1R、3T

收稿日期:2024-09-28

基金项目:国家自然科学基金(52375007);常州智能制造龙城实验室项目(CJ20242061);江苏省产业前瞻与关键核心技术重点项目(BE2021016-2, BE2021016-4)

运动时,可采用多模式或可重构方式,即根据不同的任务需求,通过改变部分拓扑结构(运动副、支链等)切换出不同的运动模式<sup>[7-8]</sup>。ZLATANOV等<sup>[9]</sup>研究了多模式并联机构的实例,验证了机构经过奇异位形时可实现运动分岔。YE等<sup>[10]</sup>将提出的新型多菱形运动链用于空间可重构支链的设计,成功构建出可切换3T、3R、2T1R、1T2R运动模式的多模式机构。KONG等<sup>[11]</sup>研究了具有9种操作模式的3-RER型三自由度并联机构,并证实了欧拉参数法在描述动平台位姿变化时的优势。

上述研究采用“重构”运动副、奇异等手段改变机构的拓扑结构、实现模式切换。切换的具体策略与实现技术尚不明确,导致设计、制造、运维困难。目前,不改变拓扑结构(不借助机电设备临时“释放”或“锁死”特定关节),而由一个主机机构实现3T1R和3T两种输出模式机构的研究较少。

笔者根据基于方位特征(position and orientation characteristic, POC)方程的并联机构拓扑设计理论设计了一种具有双动平台的可轮换用动平台并联机构<sup>[12]</sup>,并对该机构在这两种模式下的拓扑学、运动学、动力学性能进行了完整的分析,并给出了应用场景设计。

### 1 可轮换用动平台并联机构的拓扑设计和分析

可轮换用动平台并联机构(PM with alternately used moving platforms, AMP-PM)在不改变机构拓扑结构的前提下,使用同一主机机构的不同输出构件依次充当动平台来实现模式切换和输出。生产线在不同工艺操作阶段换用动平台依次输出3T1R和3T两种模式的运动,可大大节约主装备的设计、制造、运行成本,以及整机的安装空间。

#### 1.1 机构设计及其POC分析

串联机构的POC集为

$$M_{b_i} = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} \quad (1)$$

式中: $M_{J_i}$ 为第*i*个运动副 $J_i$ 的POC集; $m$ 为运动副数量。

并联机构的POC集为

$$M_{Pa} = \bigcup_{j=1}^{v+1} M_{b_j} \quad (2)$$

式中: $M_{b_j}$ 为第*j*条支链 $b_j$ 末端构件的POC集(所有支链的POC集在动平台基点处的交集); $v$ 为并联机构的独立回路数。

基于POC方程(式(1)、式(2))<sup>[13]</sup>的三自由度

并联机构拓扑设计过程如下。

#### 1.1.1 三平移一转动(3T1R)的输出模式

图1为3T1R输出模式下的并联机构简图。混合支链I(图1中的粉色支链)包含子链1( $P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14}$ )、子链2( $P_{21} // R_{22} // R_{23} // R_{24}$ )并联而成的子并联机构,其中,符号“//”表示平行。该子并联机构的输出杆串联1个平行于转动副 $R_{14}$ 轴线的转动副 $R_{35}$ (与动平台1的一端相连)。静平台0上的移动副 $P_{11}$ 、 $P_{21}$ 的轴线垂直。

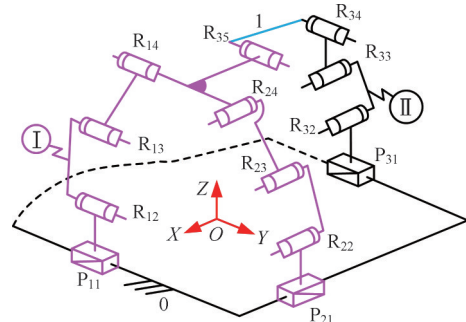


图1 3T1R输出模式下的并联机构简图

Fig.1 Schematic diagram of the PM in 3T1R output mode

简单支链II(图1中的黑色支链)由移动副 $P_{31}$ 和3个转动副串联组成,运动副的关系为 $P_{31} \perp R_{32} // R_{33} \perp R_{34}$ ,其中,符号“ $\perp$ ”表示垂直。转动副 $R_{34}$ 与动平台1的另一端相连。

将混合支链I和简单支链II并联连接于静平台0、动平台1之间。静平台0上运动副的位置关系为 $P_{11} \perp P_{21} \perp P_{31}$ ,动平台1上运动副的位置关系为 $R_{34} // R_{35}$ 。

以转动副 $R_{35}$ 轴线上一点为基点,由式(1)可知支链I、II末端构件的POC集为

$$M_{b_1} = \left( \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(//R_{14}) \end{matrix} \right] \cap \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(//R_{24}) \end{matrix} \right] \right) \cup \left[ \begin{matrix} t^0 \\ r^1(//R_{35}) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^0 \\ r^1(//R_{35}) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(//R_{35}) \end{matrix} \right]$$

$$M_{b_2} = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(//\diamond(R_{33}, R_{34})) \end{matrix} \right]$$

式中: $t$ 表示移动; $r$ 表示转动;上标为自由度(运动)的数量; $t^1(\text{dir.})$ 表示在( $\text{dir.}$ )方向存在一个有限移动; $r^1(\text{dir.})$ 表示在( $\text{dir.}$ )方向存在一个有限转动; $r^2(//\diamond(R_{33}, R_{34}))$ 表示在平行于 $R_{33}$ 副轴线和 $R_{34}$ 副轴线的平面内存在2个有限转动。

由式(2)可知动平台1的POC集为

$$M_{Pa} = M_{b_1} \cap M_{b_2} = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(//R_{35}) \end{matrix} \right] \cap \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(//\diamond(R_{33}, R_{34})) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(//R_{35}) \end{matrix} \right]$$

因此,在图1所示的3T1R输出模式下,动平台1具有沿X、Y、Z轴移动及绕Y轴转动的输出,

属于少输入-多输出的运动模式<sup>[14]</sup>。此时,在静坐标系  $OXYZ$  中,动平台1基点处输出元素的  $x$  坐标仅由输入元素  $P_{21}$  决定,输出元素的  $y$  坐标仅由输入元素  $P_{11}$  决定。

1.1.2 三平移(3T)的输出模式

图2为3T输出模式下的并联机构简图。3条简单支链中,支链I(图2中的粉色支链)、II(图2中的蓝色支链)具有相同的拓扑结构,均由1个移动副和3个转动副串联构成,且每条支链中的运动副相互平行,拓扑符号的表达为  $SOC_1\{P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14}\}$ 、 $SOC_2\{P_{21} // R_{22} // R_{23} // R_{24}\}$ ;支链III(图2中的黑色支链)由移动副  $P_{31}$  和4个转动副串联组成,运动副的关系为  $P_{31} \perp R_{32} // R_{33} \perp R_{34} // R_{35}$ 。

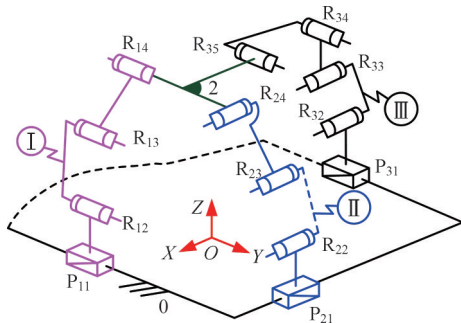


图2 3T输出模式下的并联机构简图

Fig.2 Schematic diagram of the PM in 3T output mode

将3条简单支链并联连接于静平台0、动平台2之间,其中,静平台0上运动副的位置关系为  $P_{11} \perp P_{21} \perp P_{31}$ ,动平台2上运动副的位置关系为  $R_{14} \perp R_{24} \perp R_{35}$ 。

取动平台2上的任一点为基点,由式(1)可知支链I、II、III末端的POC集分别为

$$M_{b_1} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{12} \end{bmatrix} \quad M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 // \diamond(R_{33}, R_{34}) \end{bmatrix}$$

由式(2)可知动平台2的POC集为

$$M_{pa} = M_{b_1} \cap M_{b_2} \cap M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{12} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{22} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // \diamond(R_{33}, R_{34}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$$

因此,在图2所示的3T输出模式下,机构仅有3个独立的移动。

1.2 自由度分析

基于最优路径<sup>[15]</sup>(shortest loop, S-Loop)的机构自由度(degree of freedom, DOF)计算表达式<sup>[16-17]</sup>为

$$F = \sum_{i=1}^v F_j \quad (3)$$

$$F_j = f_j - \xi_j \quad (4)$$

$$\xi_j = \dim. \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}} \} \quad (5)$$

式中: $F$ 、 $F_j$ 分别为机构和第  $j$  个回路的自由度; $f_j$ 为第  $j$  个回路中新添加的支链(首次参与计算)运动副自由度之和(不含局部自由度); $\xi_j$ 为第  $j$  个回路的独立位移方程数量。

机构在图1、图2所示的两种模式下皆含有2个独立回路。图1所示的3T1R输出模式下,机构自由度的求解如下:

1)第1回路由混合支链I中的空间子并联机构组成,即  $L_1\{(P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14}) - (R_{24} // R_{23} // R_{22} // P_{21})\}$ ,由式(5)可知该回路的独立位移方程数

$$\xi_1 = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{12} \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{22} \end{bmatrix} \right\} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 // \diamond(R_{12}, R_{22}) \end{bmatrix} \right\} = 5$$

由式(4)可知该回路的自由度

$$F_1 = f_1 - \xi_1 = 8 - 5 = 3$$

2)第2回路由第1回路、混合支链I的子链( $R_{35}$ )、简单支链II组成,记为  $L_2\{P_{31} \perp R_{32} // R_{33} \perp R_{34} // R_{35}\}$ ,由式(5)知该回路的独立位移方程数

$$\xi_2 = \dim. \left\{ \left( \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{12} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 // R_{22} \end{bmatrix} \right) \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 // \diamond(R_{33}, R_{34}) \end{bmatrix} \right\} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 // \diamond(R_{33}, R_{34}) \end{bmatrix} \right\} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 // \diamond(R_{33}, R_{34}) \end{bmatrix} \right\} = 5$$

由式(4)可知该回路的自由度

$$F_2 = f_2 - \xi_2 = 5 - 5 = 0$$

由式(3)可知机构的自由度

$$F = F_1 + F_2 = 3 + 0 = 3$$

基于最优路径<sup>[18]</sup>的选取准则可知,上述回路为3T1R输出模式下机构位置分析的最优路径方案。经计算分析,3T输出模式下的机构回路选取与自由度和3T1R输出模式相同。

因此,当静平台0上的移动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$ 、 $P_{31}$  为驱动副时,动平台1可实现3T1R输出,此时的输出参数数目为4<sup>[14]</sup>;动平台2可实现3T输出,输出参数数目为3,不含寄生运动。两种模式下,基点处  $x$  值均由  $P_{21}$  决定,  $y$  值均由  $P_{11}$  决定,因此该机构具有较好的输入-输出运动解耦性。

1.3 计算耦合度  $k$

最短回路层次上,单开链约束度为<sup>[16-17]</sup>

$$\Delta_j = F_j - I_j \quad (6)$$

式中: $I_j$ 为第  $j$  条回路中给定的驱动副数目。

由一组单开链(single-open-chain, SOC)组成

的子运动链(sub-kinematics chain, SKC)的耦合度为

$$k = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (7)$$

3T1R 输出模式下,由式(6)可知第 1、2 个回路的约束度分别为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 - I_1 = 3 - 2 = 1 \\ \Delta_2 &= F_2 - I_2 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

则机构的耦合度为

$$k = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} (|\Delta_1| + |\Delta_2|) = 1$$

3T 输出模式下,机构的 SKC 构成及耦合度与 3T1R 输出模式时相同。

## 2 机构运动学分析

基于拓扑特征的运动学建模方法<sup>[19]</sup>可有效简化建模过程并显著减小计算量,本文采用该方法构建了图 3 所示的机构运动学模型。

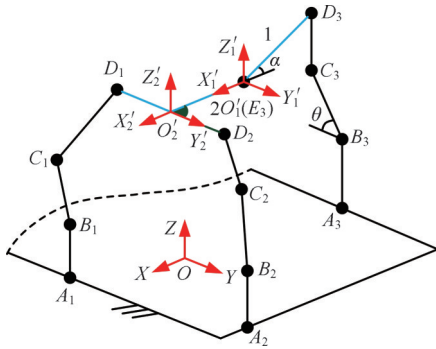


图 3 3-DOF 可轮换用并联机构的运动学建模  
Fig.3 Kinematic modeling of 3-DOF APM-PM

静坐标系  $OXYZ$  的坐标原点  $O$  在静平台 0 的质心处,  $X$  轴平行于移动副  $P_{21}$  并指向移动副  $P_{11}$ ,  $Y$  轴平行于移动副  $P_{11}$  并指向移动副  $P_{21}$ ,  $Z$  轴平行于静平台 0 的法线并指向动平台 2。

动平台 1 为输出端时,动坐标系  $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$  的原点  $O'_1$  位于动平台 1 上  $E_3$  点处,  $X'_1$  轴垂直于  $D_1$  点和  $D_2$  点的连线并指向  $D_1$  点,  $Y'_1$  轴平行于  $D_1$  点和  $D_2$  点的连线并指向  $D_2$  点,  $Z'_1$  轴方向由右手定则确定。

动平台 2 为输出端时,动坐标系  $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$  的原点  $O'_2$  是动平台 1 上  $D_1D_2$  的中点,  $X'_2$  轴垂直于  $D_1$  点和  $D_2$  点的连线并指向  $A_1$  点,  $Y'_2$  轴与  $D_1$  点和  $D_2$  点的连线重合并指向  $D_2$  点,  $Z'_2$  轴方向由右手定则确定。

设  $l_{A_1B_1} = l_{A_2B_2} = l_{A_3B_3} = l_1$ ,  $l_{B_1C_1} = l_{B_2C_2} = l_2$ ,  $l_{C_1D_1} = l_{C_2D_2} = l_3$ ,  $l_{B_3C_3} = l_4$ ,  $l_{C_3D_3} = l_5$ ,  $l_{E_3D_3} = l_6$ ,  $l_{D_1O'_2} = l_{D_2O'_2} = d$ ,  $l_{O_1O_2} = e$ 。点  $A_1, A_3$  与原点  $O$  的距离均为  $a$ , 点  $A_2$  与原点  $O$  的距离为  $b$ 。设杆  $E_3D_3$  与  $X'_1$  轴负方向

的夹角为  $\alpha$ , 杆  $B_3C_3$  与  $Y'_1$  轴负方向的夹角为  $\theta$ 。

### 2.1 位置正解

#### 2.1.1 3T1R 输出模式

已知输入元素即驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的移动量  $y_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}$ , 求动平台 1 上  $O'_1$  点坐标  $(x_1, y_1, z_1)$  及位姿角  $\alpha$ 。

1) 约束度为正 ( $\Delta_1 = 1$ ) 的第 1 回路。T 型杆  $D_1D_2E_3$  始终平行于静平台 0, 由矩阵变换得点  $D_1, D_2$  在静坐标系  $OXYZ$  中的坐标:

$$\begin{aligned} D_1 &= (x_1 + e, y_2 - d, z_1) \\ D_2 &= (x_1 + e, y_2 + d, z_1) \end{aligned}$$

由 3T1R 模式下的机构拓扑结构易知

$$\begin{cases} x_{A_2} = x_1 + e \\ y_{A_1} = y_1 - d \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} x_{A_2} = x_1 - e \\ y_{A_1} = y_1 + d \end{cases}$$

2) 约束度为负 ( $\Delta_2 = -1$ ) 的第 2 回路。静坐标系  $OXYZ$  中, 已知驱动副的移动量、各杆长度及  $\theta$ , 易得点  $C_3, D_3$  的坐标:

$$\begin{aligned} C_3 &= (-a, y_{A_3} - l_4 \cos \theta, l_4 \sin \theta + l_1) \\ D_3 &= (-a, y_{A_3} - l_4 \cos \theta, l_4 \sin \theta + l_1 + l_5) \end{aligned}$$

由约束条件  $y_{D_3} = y_1, x_1 = x_{A_3} + l_6 \cos \alpha$ , 可得

$$\begin{cases} \theta = \arccos \frac{y_{A_3} - y_{A_1} - d}{l_4} \\ \alpha = \arccos \frac{x_{A_2} - e + a}{l_6} \end{cases}$$

由杆长条件  $E_3D_3 = l_6$ , 解得

$$z_1 = \pm \sqrt{l_6^2 - (x_{A_2} - e + a)^2} + l_1 + l_5 + l_4 \sin \theta$$

因此, 取动平台 1 上  $O'_1$  点为基点时, 3T1R 输出模式下的机构位置正解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A_2} - e \\ y_{A_1} + d \\ l_1 + l_5 + l_4 \sin \theta \pm \sqrt{l_6^2 - (x_{A_2} - e + a)^2} \\ \arccos \frac{x_{A_2} - e + a}{l_6} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式(8)可知,  $x_1$  由  $x_{A_2}$  决定,  $y_1$  由  $y_{A_1}$  决定,  $z_1$  由  $y_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}$  共同决定, 位姿角  $\alpha$  由  $x_{A_2}$  决定, 故 3T1R 输出模式下的机构具有较好的输入-输出运动解耦性。

#### 2.1.2 3T 输出模式

已知输入元素即驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的移动量  $y_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}$ , 求动平台 2 上  $O'_2$  点坐标  $(x_2, y_2, z_2)$ 。

由可轮换用动平台并联机构构型可知,  $y_1 = y_2, z_1 = z_2, x_2 = x_1 + e$ 。因此, 由式(8)知, 取动平台 2 上  $O'_2$  点为基点时, 3T 输出模式下的机构位置正解为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{A2} \\ y_{A1} + d \\ \sqrt{l_6^2 - (x_{A2} - e + a)^2} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

由式(9)可知,  $x_2$  由  $x_{A2}$  决定,  $y_2$  由  $y_{A1}$  决定,  $z_2$  由  $y_{A1}, x_{A2}, y_{A3}$  共同决定。因此, 3T 输出模式下的机构具有较好的输入-输出运动解耦性。

## 2.2 位置逆解

### 2.2.1 3T1R 输出模式

已知动平台 1 上基点  $O'_1$  坐标和位姿角, 求驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的移动量  $y_{A1}, x_{A2}, y_{A3}$ 。

由式(8)易知

$$\begin{cases} y_{A1} = y_1 - d \\ x_{A2} = x_1 + e \end{cases}$$

静坐标系  $OXYZ$  中, 已知驱动副的移动量、各杆长度及杆  $B_3C_3$  与  $Y$  轴负方向的夹角  $\theta$ , 易得  $C_3$  点坐标:

$$C_3 = (-a, y_{A3} - l_4 \cos \theta, l_1 + l_4 \sin \theta)$$

动坐标系  $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$  中, 已知基点  $O'_1$  的坐标、各杆长度及位姿角  $\alpha$ , 易得  $D_3$  点坐标:

$$D_3 = (x_1 - l_6 \cos \alpha, y_1, z_1 + l_6 \sin \alpha)$$

由约束条件  $y_1 = y_{C3}, z_{D3} = z_{C3} + l_5$ : 可得

$$\begin{cases} y_{A3} = y_1 + l_4 \cos \theta \\ \theta = \arcsin \frac{z_1 + l_6 \sin \alpha - l_5 - l_1}{l_4} \end{cases}$$

因此, 以动平台 1 上  $O'_1$  点为基点时, 3T1R 输出模式下的机构位置反解为

$$\begin{bmatrix} y_{A1} \\ x_{A2} \\ y_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - d \\ x_1 + e \\ y_1 + l_4 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 2.2.2 3T 输出模式

已知动平台 2 上基点  $O'_2$  坐标, 求驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的移动量  $y_{A1}, x_{A2}, y_{A3}$ 。

由式(9)易知

$$\begin{cases} y_{A1} = y_2 - d \\ x_{A2} = x_2 \end{cases}$$

动平台  $O'_2X'_2Y'_2Z'_2$  中, 已知基点  $O'_2$  的坐标、各杆长度, 易得  $E_3$  点坐标:

$$E_3 = (x_2 - e, y_2, z_2)$$

由约束条件  $y_{O1} = y_{C3}, z_{O1} = z_{C3} + l_5$  可得

$$\begin{cases} y_{A3} = y_2 + l_4 \cos \theta \\ \theta = \arcsin \frac{z_2 + l_6 \sin \alpha - l_5 - l_1}{l_4} \end{cases}$$

因此, 以动平台 2 上  $O'_2$  点为基点时, 3T 输出模式下机构的位置逆解为

$$\begin{bmatrix} y_{A1} \\ x_{A2} \\ y_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - d \\ x_2 \\ y_2 + l_4 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

## 2.3 正逆解实例验算

设机构结构参数:  $a=280$  mm,  $b=220$  mm,  $d=152$  mm,  $e=300$  mm,  $l_1=120$  mm,  $l_2=220$  mm,  $l_3=160$  mm,  $l_4=180$  mm,  $l_5=125$  mm,  $l_6=160$  mm。

3T1R 输出模式下, 驱动副开始运行前 ( $t=0$ ) 的初始位置为

$$\begin{cases} S_{01} = -175.08 \text{ mm} \\ S_{02} = 160.95 \text{ mm} \\ S_{03} = 3.15 \text{ mm} \end{cases}$$

3T 输出模式下, 驱动副开始运行前 ( $t=0$ ) 的初始位置为

$$\begin{cases} S_{01} = -174.07 \text{ mm} \\ S_{02} = 157.99 \text{ mm} \\ S_{03} = 3.15 \text{ mm} \end{cases}$$

在 SOLIDWorks 中对该机构进行三维建模, 并赋予下列驱动函数:

$$\begin{cases} S_1 = 10 \sin t \text{ mm} \\ S_2 = -5 \sin t \text{ mm} \\ S_3 = -10 \sin t \text{ mm} \end{cases}$$

由 MATLAB 编程与 SOLIDWorks 仿真得到 3T1R 模式下动平台 1 的位移曲线(图 4)、3T 模式下动平台 2 的位移曲线(图 5)。基点  $O'_1$  位于动平台 1、2 的交界处, 且动平台 2 做 3T 运动, 则动平台 2 沿  $Y$  轴、 $Z$  轴的位移曲线, 与动平台 1 沿  $Y$  轴、 $Z$  轴的位移曲线相同。

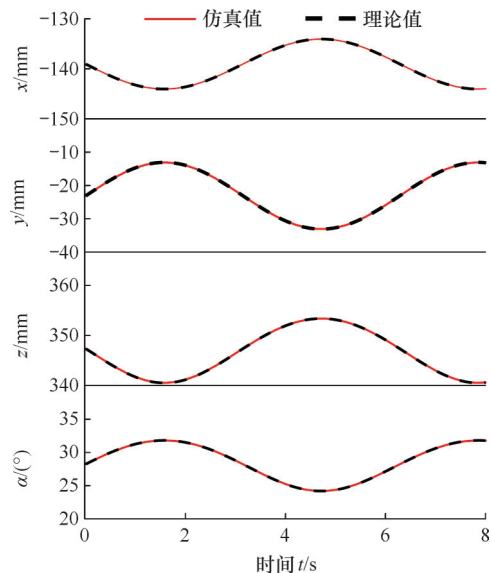


图 4 3T1R 模式下动平台 1 的位移曲线  
Fig.4 Displacement curves of moving platform 1 in 3T1R mode

## 3 机构工作空间分析

根据基于运动学正解的机构的工作空间求解方法<sup>[18]</sup>, 设定搜索范围:  $-500 \text{ mm} \leq y_{A1} \leq 300 \text{ mm}$ ,

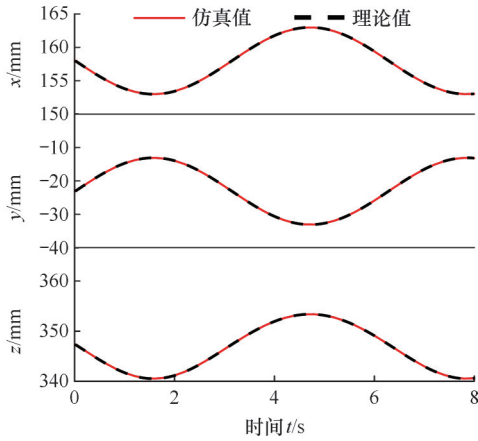


图5 3T模式下动平台2的位移曲线

Fig.5 Displacement curves of moving platform 2 in 3T mode

$-100 \text{ mm} \leq x_{A2} \leq 200 \text{ mm}$ ,  $-500 \text{ mm} \leq y_{A3} \leq 600 \text{ mm}$ 。通过MATLAB对式(8)、式(9)编程,得到该机构动平台1、2质心处的三维工作空间,见图6。

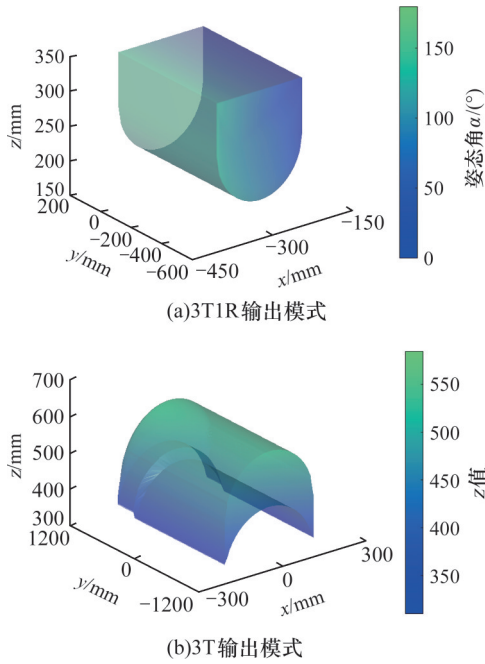


图6 动平台1、2质心处的三维工作空间

Fig.6 3D workspaces at the centroids of moving platforms 1 and 2

## 4 速度与奇异性分析

### 4.1 机构速度分析

#### 4.1.1 3T1R输出模式

##### 4.1.1.1 动平台1末端的速度映射模型

由式(10)得3T1R输出模式下机构的位置逆解方程:

$$\left. \begin{aligned} f_1: y_{A1} - y_1 + d &= 0 \\ f_2: x_{A2} - x_1 &= 0 \\ f_3: y_{A3} - y_1 - l_4 \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对式(12)进行全微分,可得

$$J_0 \dot{\omega} = J_i \dot{\rho} \quad (13)$$

$$\dot{\omega} = [\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{z}_1]^T \quad \dot{\rho} = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \end{bmatrix} \quad J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_{A1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_{A2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial y_{A3}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = f_{11} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = f_{12} = -1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = f_{13} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = f_{21} = -1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = f_{22} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = f_{23} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = f_{31} = \frac{(e-x-a) \tan \theta}{\sqrt{l_6^2 - (x-e+a)^2}} e^{-x-a}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_2} = f_{32} = -1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial z_1} = f_{33} = \tan \theta \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_{A1}} = u_{11} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{A2}} = u_{22} = 1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_{A3}} = u_{33} = 1$$

式中: $\dot{\omega}$ 为3T1R模式下的输出; $\dot{\rho}$ 为输入; $J_0$ 为正向运动学雅可比矩阵; $J_i$ 为逆向运动学雅可比矩阵。

机构不处于奇异位形时, $J_0$ 可逆,由式(13)可得

$$\dot{\omega} = J_0^{-1} J_i \dot{\rho} \quad (14)$$

式(14)为动平台1上 $O'_1$ 点沿X轴、Y轴、Z轴移动的速度映射模型。该机构在3T1R输出模式下做少输入-多输出<sup>[14]</sup>运动,存在1个寄生运动(绕Y轴的转动)。对位姿角 $\alpha$ 与基点 $O'_1$ 沿Z轴位移关系式求时间的一阶导数可得该寄生运动的角速度。

##### 4.1.1.2 动平台1末端的加速度映射模型

机构不处于奇异位形时, $J_0$ 可逆,将式(14)两边同时对时间 $t$ 求导,整理得

$$\ddot{\omega} = J_0^{-1} J_i \ddot{\rho} - J_0^{-1} \dot{K}_0 \quad (15)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \dot{f}_{11} \dot{x}_1 + \dot{f}_{12} \dot{y}_1 + \dot{f}_{13} \dot{z}_1 + \dot{u}_{11} \dot{y}_{A1} \\ \dot{f}_{21} \dot{x}_1 + \dot{f}_{22} \dot{y}_1 + \dot{f}_{23} \dot{z}_1 + \dot{u}_{22} \dot{x}_{A2} \\ \dot{f}_{31} \dot{x}_1 + \dot{f}_{32} \dot{y}_1 + \dot{f}_{33} \dot{z}_1 + \dot{u}_{33} \dot{y}_{A3} \end{bmatrix}$$

式(15)为动平台1上 $O'_1$ 点沿X轴、Y轴、Z轴移动的加速度映射模型。对位姿角 $\alpha$ 与基点 $O'_1$ 沿Z轴位移的关系式求时间的二阶导数可得绕Y轴的角加速度。

##### 4.1.2 3T输出模式

动平台2上基点 $O'_2$ 处于动平台1和动平台2的交界处,因此,3T模式输出元素的速度及加速度与3T1R模式下3个移动方向的输出元素是相同的,故不赘述。

## 4.2 算例仿真与验证

利用MATLAB对式(14)、式(15)进行编程,

代入2.3节的运动规律及初始位置,得到动平台速度、加速度的理论曲线,通过SolidWorks得到动平台的速度、加速度仿真曲线,图7为双动平台基点的运动曲线。

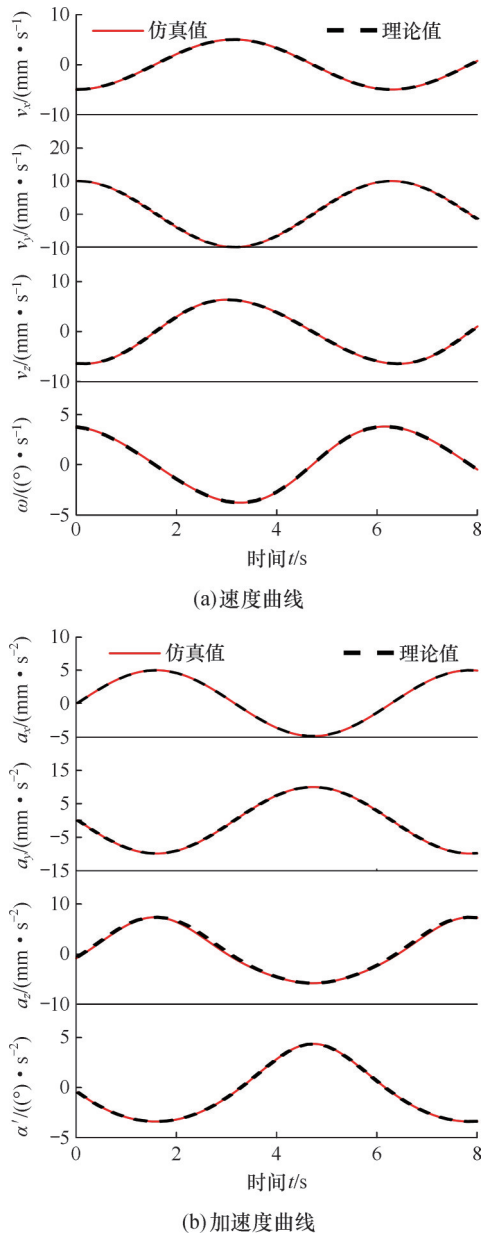


图7 双动平台基点的运动曲线  
Fig.7 Motion curve of moving platform mode

基点  $O'_1$  处于动平台1、2的交界处,两动平台沿X轴、Y轴、Z轴移动的速度与加速度相同。由图7可见, MATLAB 计算的理论曲线与 SolidWorks 的仿真曲线一致,表明运动学建模及其公式推导正确,且动平台速度、加速度曲线无突变。

### 4.3 机构奇异性分析

#### 4.3.1 3T1R 输出模式

将式(13)对时间  $t$  求导,得机构动平台末端执行器输出速度  $\dot{\omega} = [\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{z}_1]^T$ 、主动关节的输入速度  $\dot{\rho} = [\dot{y}_{A1} \ \dot{x}_{A2} \ \dot{y}_{A3}]^T$ ,两者关系为

$$A\dot{\omega} + B\dot{\rho} = 0 \quad (16)$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

依据矩阵  $A$ 、 $B$  是否奇异,将机构奇异位形分为如下3类:

1)第 I 类奇异。此时要求  $\det(B) = 0$ , 计算得  $\theta = 90^\circ$ , 即  $B_3C_3$  需垂直于静平台 0, 这不符合实际情况,因此机构不存在奇异位置。

2)第 II 类奇异。此时要求  $\det(A) = 0$ , 计算得  $\theta = 0^\circ$  或  $180^\circ$ , 即  $B_3C_3$  平行于静平台 0 时发生输出奇异,如图8所示。

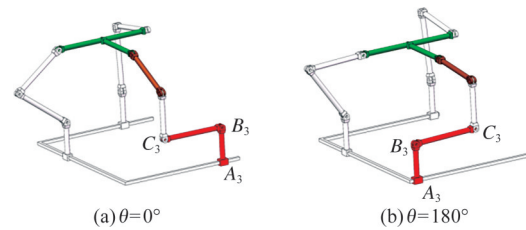


图8 输入奇异位置

Fig.8 Input singular position

3)第 III 类奇异。此时要求  $\det(A) = \det(B) = 0$ , 计算无解,因此 3T1R 输出模式下的机构不存在综合奇异位置。

#### 4.3.2 3T 输出模式

经计算分析,3T 输出模式下的奇异位置与 3T1R 输出模式下的奇异位置相同,当且仅当  $\theta = 0^\circ$  或  $180^\circ$  即杆  $B_3C_3$  平行于静平台 0 时,3T 模式与 3T1R 模式的机构奇异位置相同,如图8所示。

## 5 动力学分析

首先,基于序单开链法<sup>[18]</sup>将复杂的机械系统按照拓扑分解路线拆分为若干子运动链(SKC),再将每个 SKC 拆解为虚拟的单开链(SOC)结构;然后,利用虚功原理<sup>[18]</sup>即理想约束下所有外力所做虚功之和为零,推导出各支链的动力学平衡方程。

### 5.1 受力分析

对于动平台,作用在质心  $O$  上的力  $F_o$  和力矩  $M_o$  为

$$\begin{bmatrix} F_o \\ M_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_o + m_o g - m_o \alpha \\ \tau_o - {}^0 I_o \epsilon - \omega {}^0 I_o \omega \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:  $f_o$ 、 $\tau_o$  分别为作用在动平台质心处的外力和外力矩;  ${}^0 I_o$  为动平台质心处惯量;  $\epsilon$ 、 $\omega$  分别为动平台质心处的角加速度和角速度;  $g$  为重力加速度;  $m_o$  为动平台质量。

假设动平台外的各支链仅受重力作用,则作用在杆件  $l$  的力  $F_l$  和力矩  $M_l$  分别为

$$\begin{bmatrix} F_l \\ M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_l g - m_l \alpha_l \\ -{}^0 I_l \epsilon_l - \omega_l {}^0 I_l \omega_l \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中： $I_l$ 为杆件 $l$ 质心处的惯量； $\epsilon_l, \omega_l$ 分别为杆件 $l$ 质心处的角加速度和角速度； $m_l$ 为杆件 $l$ 的质量。

### 5.2 动力学方程

#### 5.2.1 3T1R 输出模式

在第2回路中，解除点 $O'_1$ 处的约束后，将点 $O'_1$ 处的运动副支反力 $F_{O'_1}$ 转化为未知外力，由虚功原理可建立方程：

$$\begin{bmatrix} \delta X_{A_3B_3} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_3B_3} + \begin{bmatrix} \delta X_{B_3C_3} & \delta \theta_{B_3C_3} \end{bmatrix} Q_{B_3C_3} + \begin{bmatrix} \delta X_{C_3D_3} & 0 \end{bmatrix} Q_{C_3D_3} + \begin{bmatrix} \delta X_{E_3D_3} & \delta \theta_{E_3D_3} \end{bmatrix} Q_{E_3D_3} = 0 \quad (19)$$

式中： $Q_l$ 为杆件 $l$ 的受力矩阵； $\delta X_l, \delta \theta_l$ 分别为杆件 $l$ 的移动虚位移和转动虚位移。

对于第1回路，将支反力 $F_{O_1}$ 视为未知外力，由虚功原理可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta X_{A_1B_1} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_1B_1} + \begin{bmatrix} \delta X_{B_1C_1} & \delta \theta_{B_1C_1} \end{bmatrix} Q_{B_1C_1} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{C_1D_1} & \delta \theta_{C_1D_1} \end{bmatrix} Q_{C_1D_1} + \begin{bmatrix} \delta X_{A_2B_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_2B_2} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{B_2C_2} & \delta \theta_{B_2C_2} \end{bmatrix} Q_{B_2C_2} + \begin{bmatrix} \delta X_{C_2D_2} & \delta \theta_{C_2D_2} \end{bmatrix} Q_{C_2D_2} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{D_1D_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{D_1D_2} + \begin{bmatrix} \delta X_{O'_1O'_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{O'_1O'_2} - \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{O_1} & 0 \end{bmatrix} Q_{O_1} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta X_{A_iB_i} &= J_{v, A_iB_i} \delta q \\ \delta X_{B_iC_i} &= J_{v, B_iC_i} \delta q \\ \delta X_{C_iD_i} &= J_{v, C_iD_i} \delta q \\ \delta \theta_{B_iC_i} &= J_{\omega, B_iC_i} \delta q \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \delta X_{D_1D_2} &= J_{v, D_1D_2} \delta q & \delta X_{E_3D_3} &= J_{v, E_3D_3} \delta q \\ \delta X_{O'_1O'_2} &= J_{v, O'_1O'_2} \delta q & \delta \theta_{C_1D_1} &= J_{\omega, C_1D_1} \delta q \\ \delta \theta_{C_2D_2} &= J_{\omega, C_2D_2} \delta q & \delta \theta_{E_3D_3} &= J_{\omega, E_3D_3} \delta q \end{aligned}$$

式中： $J_{v,l}, J_{\omega,l}$ 分别为杆件 $l$ 的速度雅可比矩阵和角速度雅可比矩阵； $\delta q$ 为广义虚位移。

#### 5.2.2 3T 输出模式

对于SKC<sub>1</sub>，解除 $O'_2$ 处的约束，将点 $O'_2$ 处的运动副支反力 $F_{O'_2}$ 转化为未知外力，由虚功原理可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta X_{A_3B_3} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_3B_3} + \begin{bmatrix} \delta X_{C_3D_3} & 0 \end{bmatrix} Q_{C_3D_3} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{O'_1O'_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{O'_1O'_2} + \begin{bmatrix} \delta X_{B_3C_3} & \delta \theta_{B_3C_3} \end{bmatrix} Q_{B_3C_3} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{E_3D_3} & \delta \theta_{E_3D_3} \end{bmatrix} Q_{E_3D_3} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

将第1回路的支反力 $F_{O'_2}$ 视为未知外力，由虚功原理可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta X_{A_1B_1} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_1B_1} + \begin{bmatrix} \delta X_{B_1C_1} & \delta \theta_{B_1C_1} \end{bmatrix} Q_{B_1C_1} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{C_1D_1} & \delta \theta_{C_1D_1} \end{bmatrix} Q_{C_1D_1} + \begin{bmatrix} \delta X_{A_2B_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_2B_2} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{B_2C_2} & \delta \theta_{B_2C_2} \end{bmatrix} Q_{B_2C_2} + \begin{bmatrix} \delta X_{C_2D_2} & \delta \theta_{C_2D_2} \end{bmatrix} Q_{C_2D_2} + \\ & \begin{bmatrix} \delta X_{D_1D_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{D_1D_2} - \begin{bmatrix} \delta X_{O'_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{O'_2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta X_{A_iB_i} &= J_{v, A_iB_i} \delta q \\ \delta X_{B_iC_i} &= J_{v, B_iC_i} \delta q \\ \delta X_{C_iD_i} &= J_{v, C_iD_i} \delta q \\ \delta \theta_{B_iC_i} &= J_{\omega, B_iC_i} \delta q \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \delta X_{D_1D_2} &= J_{v, D_1D_2} \delta q & \delta X_{E_3D_3} &= J_{v, E_3D_3} \delta q \\ \delta X_{O'_1O'_2} &= J_{v, O'_1O'_2} \delta q & \delta \theta_{C_1D_1} &= J_{\omega, C_1D_1} \delta q \\ \delta \theta_{C_2D_2} &= J_{\omega, C_2D_2} \delta q & \delta \theta_{E_3D_3} &= J_{\omega, E_3D_3} \delta q \end{aligned}$$

### 5.3 数值仿真算例

杆件在形状规律、密度均匀条件下的质量为

$M_{a_1B_1}=M_{a_2B_2}=M_{a_3B_3}=2.43 \text{ Kg}$ ,  $M_{b_1C_1}=M_{b_2C_2}=2.75 \text{ Kg}$ ,  $M_{c_1D_1}=M_{c_2D_2}=2.12 \text{ Kg}$ ,  $M_{b_3C_3}=2.5 \text{ Kg}$ ,  $M_{c_3D_3}=1.99 \text{ Kg}$ ,  $M_{e_3D_3}=2.32 \text{ Kg}$ ,  $M_{o'_1O'_2}=2.13 \text{ Kg}$ ,  $M_{d_1O'_2}=M_{d_2O'_2}=2.24 \text{ Kg}$ 。各杆件的转动惯量如表1所示。

表1 各杆件的转动惯量参数

Tab.1 Parameters of rotational inertia of each bar

名称	$I_{XX}$	$I_{YY}$	$I_{ZZ}$
杆件 $B_1C_1$	185 518.3	314 549.1	261 395.8
杆件 $B_2C_2$	257 012.5	169 818.5	196 233.8
杆件 $B_3C_3$	100 552.4	271 593.9	171 441.8
杆件 $C_1D_1$	448 544.8	527 994.4	261 925.3
杆件 $C_2D_2$	481 678.6	424 287.5	207 711.1
T型杆 $D_1D_2E_3$ (动平台2)	187 919.2	242 926.1	562 211.3
杆件 $E_3D_3$ (动平台1)	226 360.8	270 871.4	484 048.2

驱动力求解步骤如下：①确定并联机构动平台末端执行器的运动轨迹和运动规律；②根据给定动平台的末端轨迹，结合逆向运动学求解结果，确定各驱动副的运动规律；③设定动平台1、2分别承受10 Kg、8 Kg负载，对比SolidWorks获得的仿真驱动力与Matlab获得的理论驱动力。

#### 5.3.1 3T1R 输出模式

设定3T1R工况下，动平台1末端执行器的运动轨迹由三段路径组成，如图9所示。0~4 S内，动平台1以5 Mm/S的速度沿着X轴运动，同时绕Y轴以5°/S的速度转动，从点 $Q_1$ 移动到点 $Q_2$ 。4~8 S内，动平台1以6 Mm/S沿Y轴运动，从点 $Q_2$ 移动到点 $Q_3$ 。8~12 S内，动平台1以8 Mm/S沿Z轴运动，从点 $Q_3$ 移动到点 $Q_4$ 。

根据输出运动轨迹规律及式(10)，得到3T1R模式下3个驱动副的运动规律：

$$S_1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 4 \text{ s 或 } 8 \text{ s} \leq t \leq 12 \text{ s} \\ 6t & 4 \text{ s} < t \leq 8 \text{ s} \end{cases} \quad (23)$$

$$S_2 = \begin{cases} 5t & 0 \leq t \leq 4 \text{ s} \\ 0 & 4 \text{ s} < t \leq 12 \text{ s} \end{cases} \quad (24)$$

$$S_3 = \begin{cases} -22.07 + \sqrt{180^2 - (40.49 + \sqrt{160^2 - (105.48 + 5t)^2})^2} & 0 \leq t \leq 4 \text{ s} \\ 6t & 4 \text{ s} < t \leq 8 \text{ s} \\ -56.89 + \sqrt{180^2 - (8t + 75.75)^2} & 8 \text{ s} < t \leq 12 \text{ s} \end{cases} \quad (25)$$

在动平台1、2上分别加载10 kg、8 kg，SolidWorks获得的驱动力仿真曲线与MATLAB获得的理论驱动力曲线见图10。

#### 5.3.2 3T 输出模式

设定3T模式下，动平台2末端执行器的运动

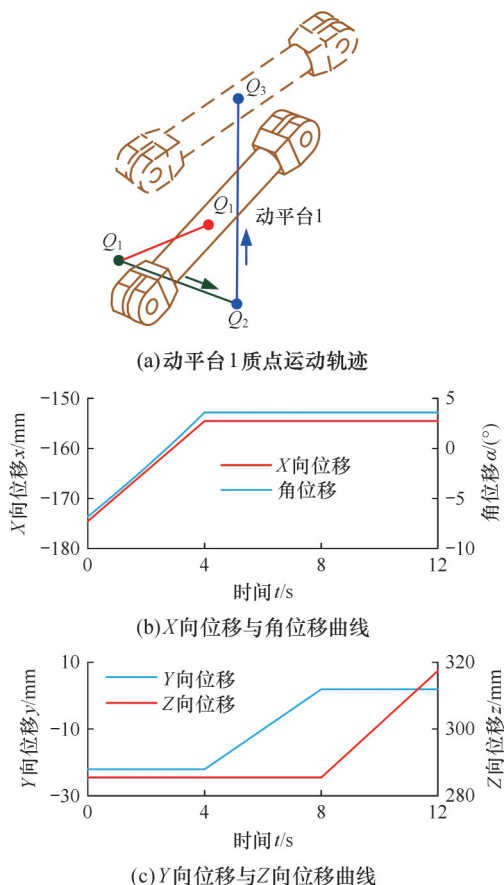


图9 3T1R模式下动平台1的运动轨迹与运动规律  
Fig.9 The motion trajectory and law of moving platform 1 in 3T1R mode

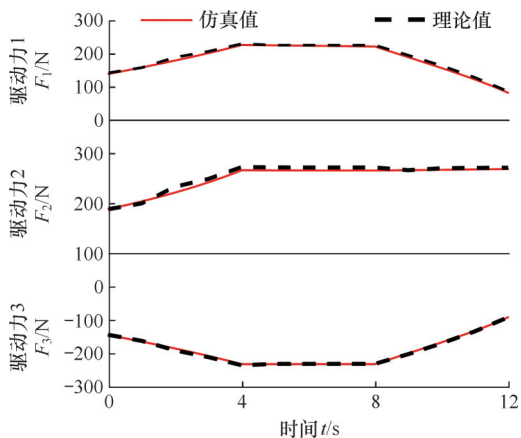


图10 3T1R模式下的驱动力曲线  
Fig.10 Curves of driving force in 3T1R mode

轨迹由三段构成,如图11所示。0~4 s内,动平台2以5 mm/s的速度沿X轴运动,从点 $P_1$ 运动到点 $P_2$ 。4~8 s内,动平台2以6 mm/s沿Y轴运动,从点 $P_2$ 运动到点 $P_3$ 。8~12 s内,动平台2以8 mm/s沿Z轴运动,从点 $P_3$ 运动到点 $P_4$ 。

3T1R模式下,基点 $O'_1$ 处于动平台1和动平台2的交界处,导致3T1R模式与3T模式的杆件速度雅可比矩阵相同,进而使动力学公式中的参数相同。因此,3T模式下的驱动力曲线与3T1R

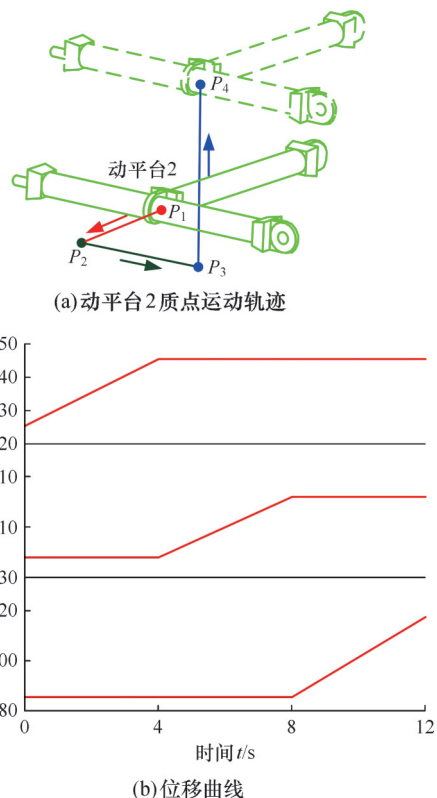


图11 3T模式下动平台2的运动轨迹与运动规律  
Fig.11 The motion trajectory and law of moving platform 2 in 3T mode

模式下的驱动力曲线相同。

### 5.3.3 算例结论

仿真过程中,输入MATLAB的转动杆转动惯量、移动副的起始值、质心坐标等参数均为近似值,导致机构驱动力的仿真曲线和理论曲线存在误差。由图10可知,机构驱动力的理论曲线与仿真曲线大致吻合,可认为动力学模型及其驱动力方程无误。

## 6 优化设计

鉴于差分进化算法在连续优化领域的优势,本节将其作为优化方法。

### 6.1 设计变量

由式(8)、式(9)可知参数 $l_1, l_4, l_5, l_6, d, e$ 对机构工作空间大小的影响较为明显,因此,取这些参数为设计变量。

### 6.2 目标函数

设 $V$ 为该机构两种运动模式下工作空间的总和。对于并联机构,在满足设计要求的前提下,希望机构可达工作空间最大。在预估的工作空间内划分网格并统计格点数,计算动平台1、2的可达工作空间。设3T1R、3T模式下的机构工作空间分别为 $n_1, n_2$ ,两运动模式下工作空间之和最大

值为  $V_{max}$ 。将  $V_{max}$  作为该可轮换用双动平台并联机构工作空间优化的目标函数：

$$V_{max} = n_1 + n_2 \quad (26)$$

### 6.3 约束条件

根据 2.3 节的机构结构参数，给出该可轮换用双动平台并联机构设计变量的范围，见表 2。

表 2 设计变量的约束范围

Tab. 2 Constraint ranges for design variables mm

设计变量	约束范围	设计变量	约束范围
$l_1$	[70, 170]	$l_6$	[110, 210]
$l_4$	[130, 230]	$d$	[102, 152]
$l_5$	[75, 175]	$e$	[250, 350]

结合实际情况确定本次机构尺度优化的参数配置，如表 3 所示。按照参数设置要求运用 MATLAB 对式(26)进行编程计算，得到目标函数变化曲线。由图 12 所示的目标函数曲线可知，目标函数在迭代 8 次后保持定值不变。

表 3 参数设置

Tab.3 Parameter settings

维度	随机数	迭代次数	缩放因子	交叉概率
7	100	20	0.5	0.9

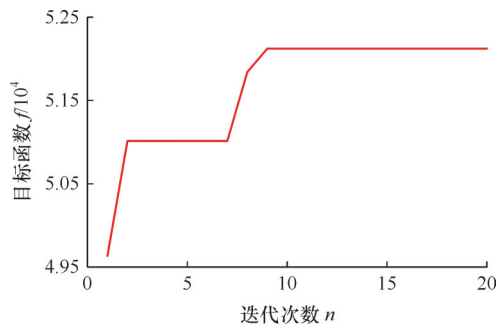


图 12 目标函数随迭代次数变化曲线

Fig.10 Curve of the objective function with the number of iterations

表 4 列出了优化前后各杆件的参数值。圆整后，得到一组新的机构参数： $l_1=110$  mm,  $l_4=230$  mm,  $l_5=90$  mm,  $l_6=210$  mm,  $d=180$  mm,  $e=280$  mm。依据表 4 所示参数，利用 MATLAB 计算优化后的机构工作空间，如图 13 所示，优化后的机构工作空间边界连续，可实现较为平稳和准确的运动轨迹。优化后的机构工作空间均关于 Z 轴对称分布，这说明该机构在 Z 向具有优异的力传递

表 4 优化前后各构件的参数值

Tab.4 Parameter values of optimized mechanism components mm

变量	优化前	优化后	变量	优化前	优化后
$l_1$	120	105.437	$l_6$	160	205.031
$l_4$	180	227.425	$d$	152	177.401
$l_5$	125	94.118	$e$	300	278.112

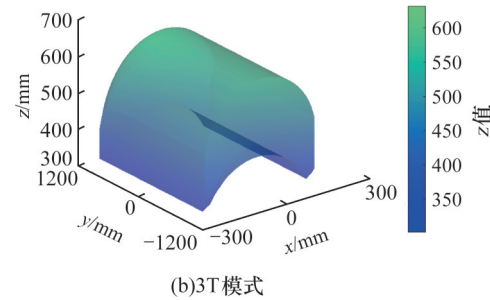
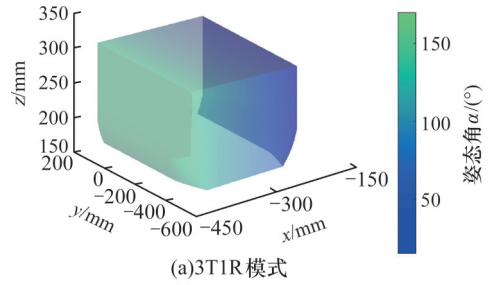


图 13 优化后的机构工作空间

Fig.13 Workspace of the optimized mechanism

性能。

尺度优化后，两模式下的工作空间显著增大。优化后，3T1R 模式工作空间的增大率为

$$V_{3T1R} = \frac{V_{3T1R}'' - V_{3T1R}'}{V_{3T1R}'} = \frac{199\ 711\ \text{mm}^3 - 128\ 700\ \text{mm}^3}{128\ 700\ \text{mm}^3} = 55\%$$

式中： $V_{3T1R}'$ 、 $V_{3T1R}''$  分别为优化前后的 3T1R 模式下的工作空间体积。

优化后，3T 模式工作空间的增大率为

$$V_{3T} = \frac{V_{3T}'' - V_{3T}'}{V_{3T}'} = \frac{343\ 549\ \text{mm}^3 - 219\ 442\ \text{mm}^3}{219\ 442\ \text{mm}^3} = 57\%$$

式中： $V_{3T}'$ 、 $V_{3T}''$  分别为优化前后的 3T 模式下的工作空间体积。

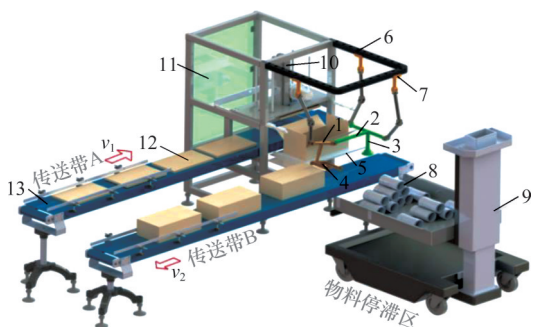
## 7 应用场景设计

图 14 所示的自动化包装线<sup>[20]</sup>由自动包装装置、送料装置组成。主机机构包含动平台 1(安装有末端旋转撑手)、动平台 2(安装有末端吸盘)、导轨(安装 3 个移动的滑块)。可轮换用动平台并联机构能完成取料和搬运。送料装置包含传送带 A 和 B、折叠纸箱、涡轮式洗衣机滚筒(以下称为“物料”)及运料车。

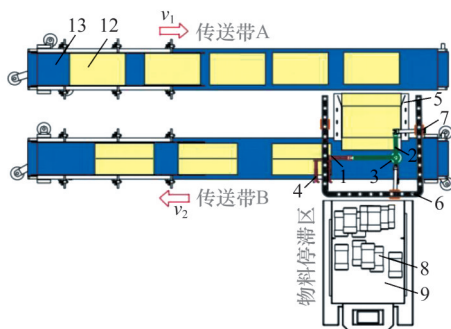
自动化包装线采用本文设计的可轮换用动平台并联机构作为主机机构，其工序流程与工作原理如下：

1) 人工推动运料车，将物料送到指定的物料停滞区。

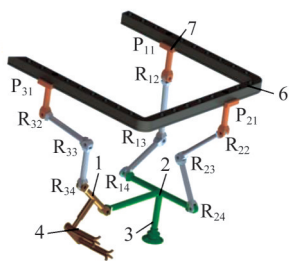
2) 传送带 A 以  $v_1$  的速度匀速将折叠纸箱送至气动机械手处后停止，气动机械手的吸盘吸附



(a) 三维概念设计图



(b) 俯视图



(c) 主机机构局部放大图

- 1. 动平台1 2. 动平台2 3. 末端吸盘 4. 末端旋转撑手
- 5. 纸箱承托平台 6. 导轨 7. 滑块
- 8. 涡轮洗衣机滚筒 9. 运料车 10. 气动机械手
- 11. 套袋封箱机 12. 折叠纸箱 13. 传送带

图14 应用场景概念设计图

Fig.14 Conceptual design diagram of the application scenario

折叠纸箱,并将折叠纸箱切开张箱,再运送至纸箱承托平台。

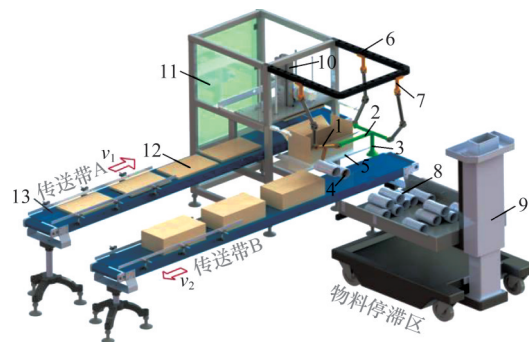
3)主机机构动平台1将物料从物料停滞区搬运到承托平台的纸箱中。如图15a所示,主机机构在3T1R模式下实现取料。具体动作如下:主机机构控制3个驱动副,利用动平台1的末端旋转撑爪将待包装的物料转运到打开的纸箱中。动平台1沿X、Y、Z轴的移动能实现末端旋转撑爪大范围的移动,便更加靠近物料;动平台1绕Y轴的转动使机构能触及并抓取更多物料,扩大作业范围。物料装满一箱后,套袋封装机合箱。

4)套装封装机结束作业后,主机机构动平台2将整箱物料运输至传送带B。如图15b所示,主机机构在3T模式下实现搬运。具体动作如下:主

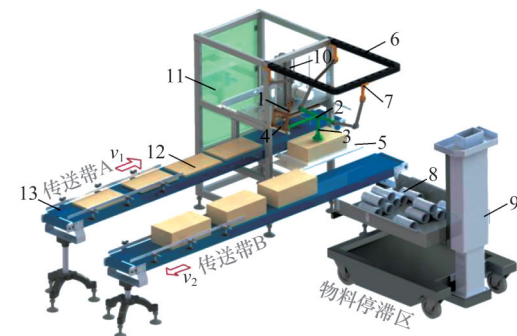
机构控制3个驱动副,利用动平台2的末端吸盘吸附整装物料后,沿X、Y、Z轴移动,将整装物料放到传送带B上,以速度 $v_2$ 匀速出品。

以上操作是一个完整的工作循环。自动化包装线完成每个循环后,将自动重复执行上述操作。

可轮换用双动平台并联机构使自动化包装线实现了“一机两用”,大大简化了机械结构,节省了设备占用空间,降低了制造成本。



(a) 工序一: 取料



(b) 工序二: 搬运

- 1. 动平台1 2. 动平台2 3. 末端吸盘 4. 末端旋转撑手
- 5. 纸箱承托平台 6. 导轨 7. 滑块 8. 涡轮洗衣机滚筒
- 9. 运料车 10. 气动机械手 11. 套袋封箱机
- 12. 折叠纸箱 13. 传送带

图15 可轮换用动平台并联机构工作流程图

Fig.15 Workflow diagram of APM-PM

## 8 结论

通过轮换动平台1和2,三自由度可轮换用双动平台并联机构可分别实现3T1R与3T两种运动模式,且这两种模式均具有符号式位置正解与运动解耦性。该可轮换用双动平台并联机构具有以下特性:①两模式下,并联机构自动平台质点的速度、加速度曲线变化连续;②以并联机构工作空间之和为优化目标,优化后的工作空间变大,边界连续,可实现较为平稳和准确的运动轨迹;③根据基于虚功原理的序单开链法求解了逆向运动学模型,可轮换用双动平台并联机构的驱动力曲线平稳且过渡缓和。

## 参考文献:

- [1] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. A New Parallel Mechanism for Scara Motions[C]// Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation(ICRA 2003). New York, 2003:1875-1880.
- [2] GHAFFARI H, PAYEGANEH G, ARBABTAFTI M. Kinematic Design of a Novel 4-DOF Parallel Mechanism for Turbine Blade Machining[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 74(5): 729-739.
- [3] 贺磊盈, 涂叶凯, 叶伟, 等. 一种可整周回转的新型3T1R并联机构运动学分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 151-160.
- HE Leiying, TU Yekai, YE Wei, et al. Kinematics Analysis of a Novel 3T1R Parallel Manipulator with Full Rotational Capability[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 151-160.
- [4] BOURI M, CLAVEL R. The Linear Delta: Developments and Applications[C]//ISR 2010 (41st International Symposium on Robotics) and ROBOTIK 2010 (6th German Conference on Robotics). Munich, 2010: 1-8.
- [5] PRAUSE I, CHARAF EDDINE S, et al. Comparison of Parallel Kinematic Machines with Three Translational Degrees of Freedom and Linear Actuation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4): 841-850.
- [6] MAZARE M, TAGHIZADEH M, RASOOL NAJAFI M. Kinematic Analysis and Design of a 3-DOF Translational Parallel Robot[J]. International Journal of Automation and Computing, 2017, 14(4): 432-441.
- [7] 吴砚博. 多模式机构模式切换力平稳性分析与冗余驱动优选研究[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2023.
- WU Yanbo. Study on The Stability Analysis of Mode Switching Force and Redundant Drive Optimization of Multimode Mechanism[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2023.
- [8] HUNT K. Kinematic Geometry of Mechanism[M]. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [9] ZLATANOV D, BONEV I, GOSSELIN C. Constraint Singularities as C-space Singularities[M]//Advances in Robot Kinematics. Dordrecht: Springer, 2002.
- [10] YE Wei, FANG Yuefa, GUO Sheng, et al. Two Classes of Reconfigurable Parallel Mechanisms Constructed with Multi-diamond Kinematotropic Chain[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 230(18): 3319-3330.
- [11] KONG Xianwen. Reconfiguration Analysis of a 4-DOF 3-RER Parallel Manipulator with Equilateral Triangular Base and Moving Platform [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 98: 180-189.
- [12] 沈惠平, 潘海月, 李菊, 等. 运动解耦且位置正解符号化的三维平移操作手: 中国, 202310760734.9[P]. 2023-08-29.
- SHEN Huiping, PAN Haiyue, LI Ju, et al. A 3-DOF Translational Manipulator with Motion Decoupling and Symbolic Forward Position Solutions: China, 202310760734.9[P]. 2023-08-29.
- [13] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and Application of Robot Mechanism Topology[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [14] 沈惠平, 邓嘉鸣, 李菊, 等. 少维输入-多维期望运动输出并联机构及其应用[J]. 机械设计与制造工程, 2013, 42(6): 1-4.
- SHEN Huiping, DENG Jiaming, LI Ju, et al. Fewer Inputs-more Expected Outputs Parallel Mechanisms and Application[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2013, 42(6): 1-4.
- [15] 沈惠平, 李菊, 朱小蓉, 等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报, 2024, 60(19): 40-52.
- SHEN Huiping, LI Ju, ZHU Xiaorong, et al. New Method and Formula for Degree-of-freedom Calculation of Parallel Mechanism Based on Optimal Paths[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(19): 40-52.
- [16] 沈惠平, 李菊, 吴广磊, 等. 并联机器人机构的拓扑结构优化[M]. 北京: 高等教育出版社, 2025.
- SHEN Huiping, LI Ju, WU Guanglei, et al. Topological Structure Optimization for Parallel Robotic Mechanisms[M]. Beijing: Higher Education Press, 2025.
- [17] 沈惠平. 并联机器人机构拓扑分析: 方法与技巧及应用[M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2025.
- SHEN Huiping. Topological Analysis for Parallel Robotic Mechanisms[M]. Nanjing: Jiangsu Phoenix Education Publishing, Ltd., 2025.
- [18] 杨廷力. 机械系统基本理论: 结构学·运动学·动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- YANG Tingli. Basic Theory of Mechanical System: Structure, Kinematics and Dynamics[M]. Beijing: China Machine Press, 1996.
- [19] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- SHEN Huiping. Topological Characteristics-based Kinematics for Robotic Mechanisms[M]. Beijing: Higher Education Press, 2021.
- [20] 王佳睿, 张德强. 包装机PVC夹持步进装置同步带传动机构建模与动态特性分析[J]. 机械设计与制造, 2024(10): 203-208.
- WANG Jiarui, ZHANG Deqiang. Modeling and Dynamic Characteristics Analysis of Synchronous Belt Transmission Mechanism in PVC Clamping and Stepping Device for Packaging Machine[J]. Machinery Design & Manufacture, 2024(10): 203-208.

(编辑 张洋)

作者简介:朱潇,女,2001年生,硕士研究生。研究方向为并联机器人机构学。E-mail:18796167749@139.com。沈惠平(通信作者),1965年生,教授、博士研究生导师。研究方向为机器人机构学。发表论文320篇。E-mail:shp65@126.com。

## 本文引用格式:

朱潇,沈惠平,李菊,等. 可轮换用动平台三自由度并联机构的拓扑设计及其性能分析[J]. 中国机械工程,2026,37(1):114-125.

ZHU Xiao, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Topological Design and Performance Analysis of 3-DOF Parallel Mechanisms with Alternately Used Moving Platforms[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(1):114-125.