

# 非圆行星齿轮传动系统非线性动力学特性

莫帅<sup>1,2\*</sup> 李亚鑫<sup>1,2</sup> 吴生阳<sup>1,2</sup> 赵新浩<sup>3</sup> 陈素姣<sup>4</sup> 彭南江<sup>5</sup> 张伟<sup>1</sup>

1. 广西大学特色金属材料与组合结构全寿命安全国家重点实验室, 南宁, 530004

2. 广西大学机械工程学院, 南宁, 530004

3. 中国航发中传机械有限公司, 长沙, 410200

4. 柳工柳州传动件有限公司, 柳州, 545007

5. 柳州五菱汽车工业有限公司, 柳州, 545007

**摘要:**为研究非圆行星齿轮系统非线性动力学特性,基于非圆行星齿轮各构件运动关系建立非圆行星齿轮传动系统;考虑时变啮合刚度、齿侧间隙、啮合阻尼、激励频率等关键非线性因素,构建非圆行星齿轮非线性动力学模型;运用分岔图、相图和时域图等表征方法定量研究系统动态行为,揭示了不同参数条件下对系统振动响应的影响机制。结果表明,偏心率、啮合阻尼和激励频率变化的情况下系统表现出丰富的动力学行为;大阻尼和高激励频率有利于非圆行星齿轮系统的运行稳定;偏心率可调控太阳轮性能。

**关键词:**非圆齿轮;行星齿轮传动系统;非线性动力学;分岔与混沌

**中图分类号:**TH132.424

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.02.010

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Nonlinear Dynamics Characteristics of Non-circular Planetary Gear Systems

MO Shuai<sup>1,2\*</sup> LI Yaxin<sup>1,2</sup> WU Shengyang<sup>1,2</sup> ZHAO Xinhao<sup>3</sup> CHEN Sujiao<sup>4</sup>

PENG Nanjiang<sup>5</sup> ZHANG Wei<sup>5</sup>

1.State Key Laboratory of Featured Metal Materials and Life-cycle Safety for Composite Structures, University of Guangxi, Nanning, 530004

2.School of Mechanical Engineering, University of Guangxi, Nanning, 530004

3.Aero Engine Corporation of China Zhongchuan Transmission Machinery Co., Ltd., Changsha, 410200

4.Liugong Liuzhou Driveline Co., Ltd., Liuzhou, Guangxi, 545007

5.Liuzhou Wuling Automobile Industry Co., Ltd., Liuzhou, Guangxi, 545007

**Abstract:** To investigate the nonlinear dynamics behavior of non-circular planetary gear systems, a non-circular planetary gear transmission system was first developed based on the relative motion relationships among system components. Subsequently, a nonlinear dynamics model was established by incorporating critical nonlinear factors including time-varying mesh stiffness, backlash, meshing damping, and excitation frequency. The dynamics characteristics were quantitatively analyzed through bifurcation diagrams, phase portraits, and time-domain waveforms to elucidate the influence mechanism of various parameters on system vibration response. The results show that the system exhibits complex dynamics behaviors under variations in eccentricity, meshing damping, and excitation frequency. Higher damping coefficients and elevated excitation frequencies are found to enhance system stability, while eccentricity is identified as an effective parameter for sun gear performance modulation.

**Key words:** non-circular gear; planetary gear transmission system; nonlinear dynamics; bifurcation and chaos

## 0 引言

非圆行星齿轮传动系统是一种新型传动系

统,与传统行星齿轮传动系统相比,具有变传动比、变中心距、结构紧凑以及运动平稳等优势。非圆齿轮是该传动系统的关键构件,其独特的节曲线形状突破了传统齿轮在特殊应用场景的局限性,展现了其独特的优势,但其制造上仍存在挑战,许多学者在非圆齿轮的设计与制造领域作出了重要贡献。AO等<sup>[1]</sup>提出一种具有非圆齿轮约束的新型混合六杆机构,实现了蔬菜盆栽苗的多

收稿日期:2025-02-24

基金项目:广西杰出青年科学基金(2025GXNSFFA069016);广西科技重大专项(桂科AA24263074,桂科AA23073019);中国航空发动机集团科技创新平台项目(CXPT-2023-044);智能制造装备与技术全国重点实验室开放课题(IMETKF2025021)

工位采摘和种植。ADDOMINE等<sup>[2]</sup>介绍了非圆齿轮传动系统和最早的非圆齿轮传动系统设计程序。HAN等<sup>[3]</sup>提出一种对非圆直齿轮传动性能做出高精度评价的等时测量方法。HU等<sup>[4]</sup>将非圆齿轮应用于无级变速器设计。BURROWS等<sup>[5]</sup>在飞虱成虫后腿上发现功能非圆齿轮,这进一步证明了非圆齿轮应用的广泛性。李渤涛等<sup>[6]</sup>归纳总结了非圆齿轮研究现状,预测了非圆齿轮领域的发展方向。

齿轮传动系统非线性动力学研究对齿轮系统的优化设计具有指导意义,针对齿轮传动系统的非线性动力学研究已取得了许多重要成果。ZHANG等<sup>[7]</sup>研究了齿轮接触温度对风电齿轮箱高速齿轮磨损的影响机理。XIA等<sup>[8]</sup>研究了齿面微观形貌对齿轮时变啮合刚度和齿隙的影响机理。ZHENG等<sup>[9]</sup>研究了离心效应对齿轮动态特性的影响机制。莫帅等<sup>[10-16]</sup>系统研究了时变啮合刚度、轴承间隙、摩擦力等非线性因素对非正交面齿轮、人字齿轮等齿轮传动系统振动特性的影响机理。LUO等<sup>[17]</sup>研究了滑动摩擦和剥落缺陷对行星齿轮动态性能的影响规律。LAI等<sup>[18]</sup>研究了一种带有卸载浮环齿轮的行星齿轮传动系统的三维振动响应和浮环齿轮动态载荷。董长斌等<sup>[19-20]</sup>研究了非圆行星轮系非线性动力学特征,考虑了阻尼、静态传递误差等非线性因素。

综上所述,非线性动力学在各种齿轮传动系统的研究中占据重要位置。非圆行星齿轮系统动态特性复杂<sup>[21-22]</sup>,稳定性受多种非线性因素的影响,但是它们对系统运动的影响机理仍然模糊。为此,本文聚焦激励频率、啮合阻尼变化、偏心率变化对非圆行星齿轮系统非线性动力学特性的影响机理,揭示其对系统稳定性的影响机制。

### 1 非圆行星齿轮结构设计

基于非圆行星齿轮设计理论,广西大学团队成功设计了一种独特的3-5型非圆行星齿轮构型。该构型的太阳轮节线呈类似三角形的形状,而内齿圈节线则类似五边形。整个系统由中心轴、太阳轮、内齿圈和行星轮组成。图1所示为这一创新设计,左侧为该构型的实物模型,右侧为详细的设计构型图。这种设计在结构和功能上都具有创新性,为非圆行星齿轮传动领域提供了新的思路和应用可能性。

非圆行星齿轮各构件运动关系如图2所示。最上端曲线为内齿圈节曲线,最下端曲线为太阳

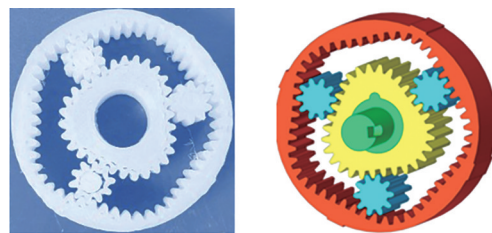


图1 3-5型非圆行星齿轮实物和构型

Fig.1 Physical and configuration model of 3-5 non-circular planetary gear

轮节曲线,中间曲线为行星轮节圆。 $r_r, r_s, r_p$ 分别为内齿圈节曲线向径、太阳轮节曲线向径和行星轮节圆半径; $\varphi_r, \varphi_s$ 分别为内齿圈和太阳轮极角; $\omega_r, \omega_s, \omega_p$ 分别为内齿圈、太阳轮、行星轮瞬时角速度; $u_1$ 为内齿圈节曲线与行星轮节圆切点的切向正方向与向径 $r_r$ 的夹角, $\mu_2$ 为点 $h$ 处太阳轮节曲线切向正方向与内齿圈节曲线向径 $r_r$ 方向的夹角, $u_1 = \mu_2$ ;下标 $r, s, p$ 分别代表内齿圈、太阳轮、行星轮。内齿圈节曲线为高阶椭圆曲线,方程为

$$\left. \begin{aligned} r_r &= \frac{R_z}{1 - e \cos n_r \varphi_r} \\ R_z &= A(1 - e^2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $e$ 为偏心率; $A$ 为长轴半径; $n_r$ 为椭圆阶数; $R_z$ 为高阶椭圆变长轴半径。

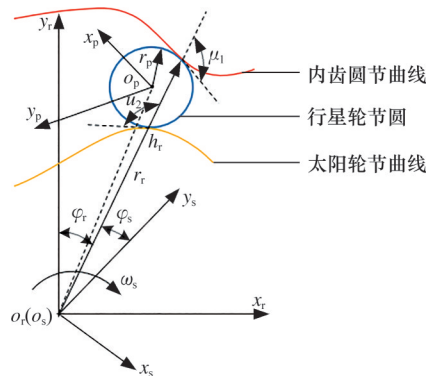


图2 非圆行星齿轮运动关系

Fig.2 Non-circular planetary gear motion relationship

根据内齿圈与太阳轮运动的关系,得到太阳轮节曲线方程:

$$\left. \begin{aligned} r_s &= r_r - 2r_p \sin u_1 \\ \varphi_s &= \int_0^{\varphi_r} \frac{r_r}{r_s} - \frac{r_p \sin u_1}{r_s} \frac{du_1}{d\varphi_r} d\varphi_r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

太阳轮与内齿圈曲率半径为

$$\rho_i = \frac{\left[ r_i^2 + \left( \frac{dr_i}{d\varphi_i} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| r_i^2 + 2 \left( \frac{dr_i}{d\varphi_i} \right)^2 - r_i \frac{d^2 r_i}{d\varphi_i^2} \right|} \quad (3)$$

式中: $i=r, s$ 。

设初始压力角 $\alpha_0 = 15^\circ$ ,此时行星轮与太阳轮和内齿圈的理论中心距分别为 $a_{s0}, a_{r0}$ ,则任意时

刻行星轮与太阳轮和内齿圈的压力角为

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_s &= \arccos \frac{a_{s0} \cos \alpha_0}{\rho_s + r_p} \\ \alpha'_r &= \arccos \frac{a_{r0} \cos \alpha_0}{\rho_r - r_p} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为了保证齿轮系统的平稳运转,避免不必要的齿面摩擦力、接触应力,减少不必要的径向振动,设计节曲线和齿轮齿数时应保证节曲线不交叉且封闭,确保轮齿均匀分布在节曲线上,故应遵循以下两个条件:

$$\frac{2\pi}{n_s} = \int_0^{2\pi} \frac{r_r}{r_s} d\varphi_r + \int_0^{2\pi} \frac{2r_p \sin u_1}{r_s} \frac{du_1}{d\varphi_r} d\varphi_r \quad (5)$$

$$\pi m Z_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_i^2 + (dr_i/d\varphi_r)^2} d\varphi_r \quad (6)$$

设  $n_r=5$ ,  $r_p=10$  mm, 偏心率  $e=0.03$ , 模数  $m=2$  mm。由式(1)、式(2)和式(5),得到符合要求的太阳轮与内齿圈节曲线,如图3所示。图中,外部曲线为内齿圈节曲线,内部曲线为太阳轮节曲线。

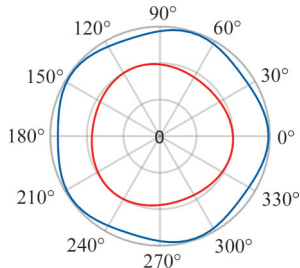


图3 非圆行星齿轮节曲线

Fig.3 Non-circular planetary gear pitch curve

折算齿形法是将各齿折算为当量圆柱齿轮的齿形,均布在齿轮节曲线上。该方法简便快捷,可以达到一定精度,故采用折算齿形法生成非圆行星齿轮的齿廓。内齿圈和太阳轮齿数  $Z_1$ 、 $Z_3$  可由式(6)得到。通过以上设计过程,可得优化设计后的非圆行星齿轮构型,如图4所示。

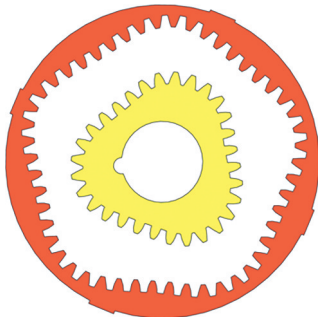


图4 非圆行星齿轮构型

Fig.4 Non-circular planetary gear configuration

## 2 非圆行星齿轮动力学模型

非圆行星齿轮系统具有变中心距和变压力角特性,运动过程中各齿轮位置关系逐渐变化。非

圆行星齿轮采用标准渐开线齿廓,由此在微小时间内将非圆行星齿轮啮合副视为当量圆柱齿轮啮合副,故将齿轮压力角离散,建立瞬态非圆行星齿轮系统非线性动力学模型。该模型忽略齿间摩擦力和自身重力等因素,考虑时变压力角、系统误差、啮合阻尼等非线性因素,非圆行星齿轮系统非线性动力学模型如图5所示。

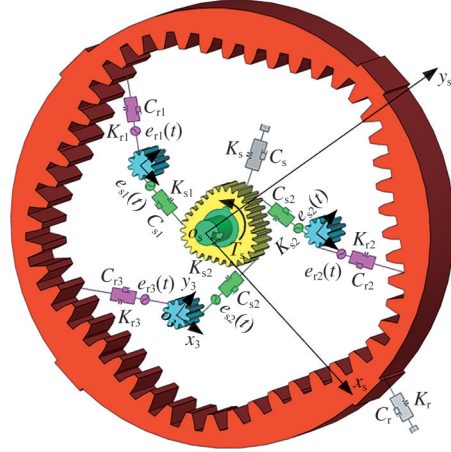


图5 非圆行星齿轮动力学模型

Fig.5 Dynamic model of non-circular planetary gear

图5中,  $K_m$ 、 $K_r$ 、 $K_{sn}$ 、 $K_s$  分别为内齿圈和太阳轮的啮合刚度和支撑刚度;  $C_m$ 、 $C_r$ 、 $C_{sn}$ 、 $C_s$  分别为内齿圈和太阳轮的啮合阻尼和支撑阻尼;  $e_m(t)$ 、 $e_{sn}(t)$  分别为内齿圈与行星轮和太阳轮与行星轮齿轮副综合误差( $n=1,2,3$ )。

非圆行星齿轮采用标准渐开线齿廓,系统时变啮合刚度近似圆柱齿轮时变啮合刚度,故采用傅里叶级数拟合实际啮合刚度曲线<sup>[12]</sup>,则系统时变啮合刚度  $K_{in}(t)$  可表示为

$$K_{in}(t) = k_{im} + \sum_{n=1}^{\infty} k_m \cos(n\omega_m t + \varphi_{in}) \quad (7)$$

式中:  $k_{im}$  为啮合刚度的常数部分;  $k_m$  为傅里叶系数;  $\omega_m$  为啮合频率。

非圆行星齿轮系统综合误差是指齿轮系统中各种误差因素的叠加效应,可表示为

$$e_{in}(t) = e_{0i} + E_m \sin(\omega_m t + \varphi_{in}) \quad (8)$$

式中:  $e_{0i}$  为误差常值;  $E_m$  为误差波动幅值;  $\varphi_{in}$  为初始相位角( $n=1,2,3; i=s,r$ )。

## 3 非圆行星齿轮系统振动微分方程

瞬态非圆行星齿轮系统非线性动力学模型中,太阳轮、内齿圈和行星轮分别具有沿  $x$ 、 $y$  轴方向的平动以及绕  $z$  轴的转动,故系统拥有15个自由度,则广义坐标为

$$X = (x_s, y_s, \theta_s, x_r, y_r, \theta_r, x_{p1}, y_{p1}, \theta_{p2}, x_{p2}, y_{p2}, \theta_{p2}, x_{p3}, y_{p3}, \theta_{p3}) \quad (9)$$

式中:  $x_m, y_m$  分别为构件  $x$  方向和  $y$  方向上的位移;  $\theta_m$  为构件角位移 ( $m=r, s, p_1, p_2, p_3$ )。

为方便计算, 将角位移转换为线位移:

$$\left. \begin{aligned} \mu_s &= r_s \theta_s \\ \mu_r &= r_r \theta_r \\ \mu_{pi} &= r_{pi} \theta_{pi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

故  $t$  时刻太阳-行星啮合线和内齿圈-行星啮合线方向上的投影位移为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{sn} &= (x_n - x_s) \sin \alpha_{sn}(t) + (y_s - y_n) \cos \alpha_{sn}(t) + \mu_s - \mu_{pn} + e_{sn}(t) \\ \delta_{rn} &= (x_n - x_r) \sin \alpha_{rn}(t) + (y_r - y_n) \cos \alpha_{rn}(t) + \mu_r - \mu_{pn} + e_{rn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

齿间啮合力是影响系统振动的重要因素, 它受到齿侧间隙、阻尼等多种因素的综合影响。齿间啮合力表达式为

$$F_{in} = K_{in}(t) f(\delta_{in}) + C_{in} \dot{\delta}_{in} \quad (12)$$

其中,  $f(\delta_{in})$  为齿侧间隙函数, 表达式如下:

$$f(\delta_{in}) = \begin{cases} \delta_{in} - b_m & \delta_{in} > b_m \\ 0 & -b_m \leq \delta_{in} \leq b_m \\ \delta_{in} + b_m & \delta_{in} < -b_m \end{cases} \quad (13)$$

根据系统非线性动力学模型中各构件的力学关系, 结合式(9)~式(13), 以牛顿定律为基础, 建立非圆行星齿轮系统振动微分方程组。由于系统非线性动力学模型中各构件的力学关系所涉及参数数量级相差较大, 为方便计算, 建立以齿侧间隙的一半  $b_m$  为基准尺度的量纲一化振动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_s - \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{sn} \sin \alpha_{sn}(t) + \kappa_s \bar{x}_s + 2C_{sb} \dot{\bar{x}}_s &= 0 \\ \ddot{\bar{y}}_s + \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{sn} \cos \alpha_{sn}(t) + \kappa_s \bar{y}_s + 2C_{sb} \dot{\bar{y}}_s &= 0 \\ \ddot{\bar{\mu}}_s + \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{sn} + \kappa_{st} \bar{\mu}_s + 2C_{stb} \dot{\bar{\mu}}_s &= f_{out} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_r - \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{rn} \sin \alpha_{rn}(t) + \kappa_r \bar{x}_r + 2C_{rb} \dot{\bar{x}}_r &= 0 \\ \ddot{\bar{y}}_r - \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{rn} \cos \alpha_{rn}(t) + \kappa_r \bar{y}_r + 2C_{rb} \dot{\bar{y}}_r &= 0 \\ \ddot{\bar{\mu}}_r + \sum_{n=1}^3 \bar{F}_{rn} + \kappa_{rt} \bar{\mu}_r + 2C_{rtb} \dot{\bar{\mu}}_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_{pn} + \bar{F}_{sn} \sin \alpha_{sn}(t) + \bar{F}_{rn} \sin \alpha_{rn}(t) - 2C_{pnb} \dot{\bar{x}}_{pn} &= 0 \\ \ddot{\bar{y}}_{pn} - \bar{F}_{sn} \cos \alpha_{sn}(t) - \bar{F}_{rn} \cos \alpha_{rn}(t) - 2C_{pnb} \dot{\bar{y}}_{pn} &= 0 \\ \ddot{\bar{\mu}}_{pn} + \bar{F}_{sn} - \bar{F}_{rn} = f_{in} & \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中, 各量纲一变量的转换关系如下:

$$\begin{aligned} \bar{x}_h &= \frac{x_h}{b_m}, \bar{y}_h = \frac{y_h}{b_m}, \bar{\mu}_h = \frac{\mu_h}{b_m}, \omega_e = \sqrt{\frac{k_{sa}}{m_e}} \\ \kappa_j &= \frac{K_{in}(t)}{m_h \omega_e^2} \kappa_i = \frac{K_i}{m_h \omega_e^2} C_j = \frac{C_{in}}{2m_h \omega_e} \\ C_{nb} &= \frac{C_i}{2m_h \omega_e} \bar{F}_j = \kappa_j f(\bar{\delta}_j) + 2C_j \dot{\bar{\delta}} \\ f_{out} &= T_s / (m_s b_m r_s \omega_e^2) f_{in} = F_{in} / (m_{pn} b_m \omega_e^2) \end{aligned}$$

$$f(\bar{\delta}_j) = \begin{cases} \bar{\delta}_j - 1 & \bar{\delta}_j > 1 \\ 0 & -1 \leq \bar{\delta}_j \leq 1 \\ \bar{\delta}_j + 1 & \bar{\delta}_j < -1 \end{cases}$$

$$h = s, r, p_n \quad i = s, r, p_n, st, rt \quad j = sn, rn$$

式中:  $F_{sn}, F_{rn}$  分别为太阳轮、内齿圈与第  $n$  个行星轮的啮合力 ( $n=1, 2, 3$ );  $T_s, F_{out}$  分别为太阳轮输入转矩、行星轮输出力;  $K_r, K_n$  分别为构件的径向和切向支撑刚度;  $C_r, C_n$  分别为构件的径向和切向支撑阻尼 ( $i=r, s, p$ );  $\omega_e$  为系统固有频率;  $k_{sa}$  为太阳轮的平均啮合刚度;  $m_e$  为系统等效质量。

#### 4 非圆行星齿轮系统动力学特性

本节采用龙格库塔数值方法求解系统振动微分方程组, 得到不同参数变化下系统动态响应特性, 采用分岔图、空间相图、时域图等多种表现方法直观地反映不同参数下非圆行星齿轮系统动态响应特性。由第一节得到表1所示的结构参数。本系统主要面向低速重载工况(如工程机械中的液压马达、无级变速器等典型应用), 其动力学参数需满足高扭矩输出与变速适应性要求。基于此, 针对此类工况的参数设计值见表2。

表1 非圆行星齿轮结构参数

Tab.1 Structural parameters of non-circular planetary gear

零件	质量/kg	模数/mm	齿数	齿宽/mm	偏心率
太阳轮	5.25	2	30	35	
内齿圈	8.23	2	50	35	0.03
行星轮	0.84	2	10	35	

表2 非圆行星齿轮动力学参数

Tab.2 Dynamic parameters of non-circular planetary gear

参数	内齿圈	太阳轮	行星轮
综合误差/ $\mu\text{m}$	10	10	10
平均啮合刚度/ $(\text{GN} \cdot \text{m}^{-1})$	1.8	2.3	
阻尼	0.1	0.1	0.1
转速/ $(\text{r} \cdot \text{min}^{-1})$		700	

#### 4.1 偏心率对系统振动响应的影响

##### 4.1.1 偏心率对 $s-p_1$ 齿轮副振动的影响

图6表明, 当系统激励频率一定时, 随着偏心率的增大,  $s-p_1$  齿轮副阻尼响应变化丰富, 混沌响应区长度先增大后减小, 振动幅值则先减小后增大; 系统稳定响应区呈现周期增加现象, 当  $e=0.040$  时阻尼响应周期数变为4。这表明偏心率是  $s-p_1$  齿轮副阻尼响应特性的关键影响因素。

图7表明, 偏心率对  $s-p_1$  齿轮副的激励响应影响较大。当系统阻尼一定时, 随着偏心率的增大, 系统激励响应的混沌响应区逐渐变长, 响应幅

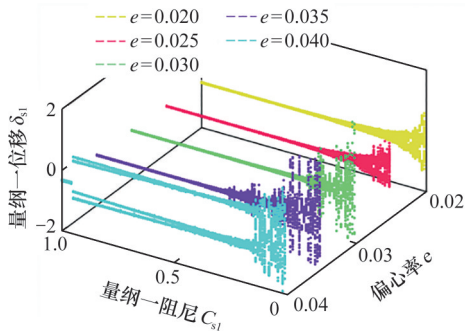


图6 偏心率影响下s-p<sub>1</sub>啮合线上的阻尼振动响应  
Fig.6 Damped vibration response on s-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of eccentricity

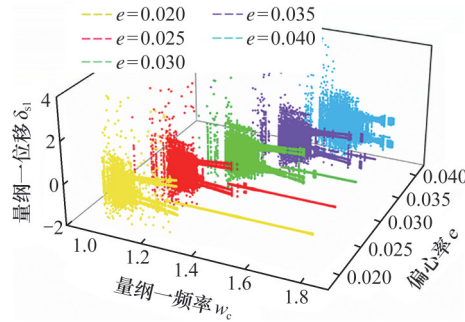


图7 偏心率影响下s-p<sub>1</sub>啮合线上的激励振动响应  
Fig.7 The excitation vibration response on the s-p<sub>1</sub> meshing line under the change of eccentricity

值逐渐增大,当 $e=0.040$ 时,系统基本处于混沌状态。这表明偏心率是s-p<sub>1</sub>齿轮副激励响应特性的关键影响因素。

综上所述,偏心率是影响s-p<sub>1</sub>齿轮副响应的关键结构参数。经分析可知,当偏心率过大时,振动响应幅值会显著增加,然而它对不同参数下混沌区长度的影响规律存在差异;而偏心率过小,则会使非圆齿轮丧失其独特性能。故在非圆太阳轮设计过程中,偏心率的选择应适中,本文选择 $e=0.03$ 。

4.1.2 偏心率对r-p<sub>1</sub>齿轮副振动响应的影响

图8表明,偏心率对r-p<sub>1</sub>啮合线上的阻尼响应影响较小,随着偏心率的增大,阻尼响应的混沌区

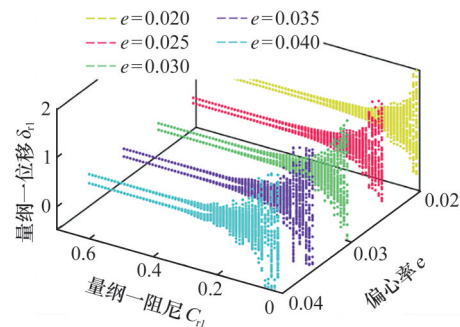


图8 偏心率影响下r-p<sub>1</sub>啮合线上的阻尼振动响应  
Fig.8 Damped vibration response on r-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of eccentricity

长度缓慢变长,振动幅值逐渐变大。这表明偏心率不是r-p<sub>1</sub>齿轮副阻尼响应特性的关键影响因素。

图9表明,偏心率对r-p<sub>1</sub>啮合线上的激励响应影响较小,随着偏心率的增大,激励响应特性基本不变。这表明偏心率是r-p<sub>1</sub>齿轮副激励响应特性的关键影响因素。

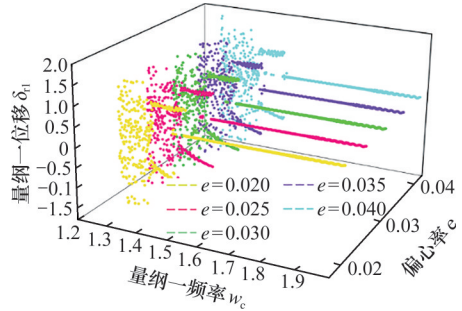


图9 偏心率影响下r-p<sub>1</sub>啮合线上的激励振动响应  
Fig.9 The excitation vibration response on the r-p<sub>1</sub> meshing line under the change of eccentricity

综上所述,偏心率不是r-p<sub>1</sub>啮合副响应的关键结构参数,其影响较小。以上分析表明,偏心率对两啮合副的影响存在差异,主要原因是太阳轮作为主要动力部件,对非圆齿轮设计参数的改变更为敏感。由此在非圆行星齿轮系统中应着重关注太阳轮的性能变化情况。

4.2 啮合阻尼对系统振动响应的影响

4.2.1 啮合阻尼对s-p<sub>1</sub>齿轮副振动的影响

图10所示为啮合阻尼在0~1.0范围内变化时s-p<sub>1</sub>啮合线上量纲一位移的变化规律。当阻尼 $C_{s1} \in [0, 0.3]$ 时,系统处于混沌响应状态,此区间相图表现为无规则曲线,庞加莱截面上有多个点;当阻尼 $C_{s1} \in [0.3, 0.5]$ 时,系统处于准周期响应状态,此区间相图表现为相对规则曲线,庞加莱截面上有多个点;当阻尼 $C_{s1} \in [0.5, 1.0]$ 时,系统处于周期响应状态,此区间上时域图表现为周期余弦

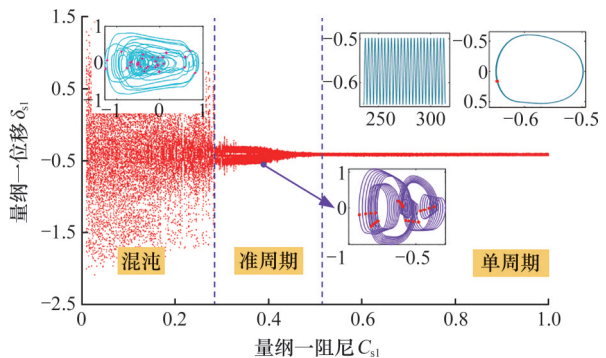


图10 啮合阻尼变化下s-p<sub>1</sub>啮合线上的位移分岔图  
Fig.10 The displacement bifurcation diagram on the s-p<sub>1</sub> meshing line under the change of meshing damping

波,相图表现为单股椭圆曲线,庞加莱截面上只有一个点。这表明,随着啮合阻尼的变化,s-p<sub>1</sub>啮合副呈现出较为复杂的非线性特性。通常情况下,当系统啮合阻尼较大时,s-p<sub>1</sub>啮合副的稳定性会得到一定程度的提高。

图11从空间相图的角度进一步描述啮合阻尼影响下s-p<sub>1</sub>啮合线上的响应特性。当C<sub>s1</sub><0.2时,相图杂乱无章,此时系统处于混沌响应状态;随着C<sub>s1</sub>的增大,相图逐渐变小,曲线逐渐规整;当C<sub>s1</sub>>0.5时,相图演变为单股圆环状,此时系统处于单周期响应状态。

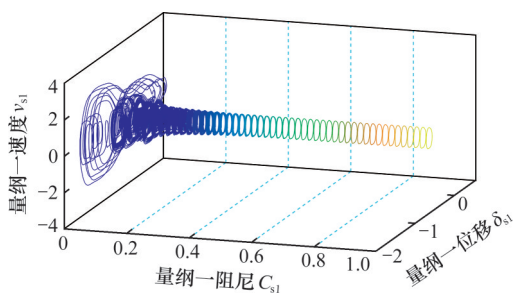


图11 啮合阻尼变化下s-p<sub>1</sub>啮合线上的空间相图

Fig.11 The spatial phase diagram on the s-p<sub>1</sub> meshing line under the change of meshing damping

综上所述,啮合阻尼的增大有助于s-p<sub>1</sub>啮合副的稳定。由此在设计非圆太阳轮时,可以通过提高重合度、改换润滑条件来提高啮合阻尼,从而保证s-p<sub>1</sub>啮合副的稳定运行。

#### 4.2.2 啮合阻尼对r-p<sub>1</sub>齿轮副振动的影响

如图12所示,分岔图展示了啮合阻尼在0~0.6范围内变化时r-p<sub>1</sub>啮合线上量纲一位移的变化规律。当阻尼C<sub>r1</sub>∈[0,0.12]时,位移点范围较广,相图由杂乱曲线组成,庞加莱截面上分布着许多点,故系统处于混沌响应状态;当阻尼C<sub>r1</sub>∈[0.12,0.38]时,位移点趋于平稳,相图由多股曲线绕圈组成

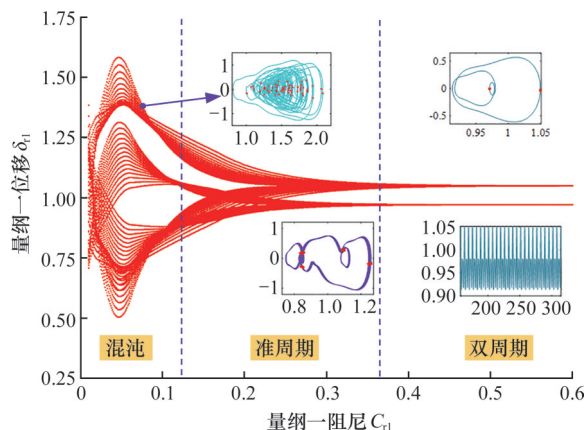


图12 啮合阻尼影响下r-p<sub>1</sub>啮合线上的位移分岔图

Fig.12 The displacement bifurcation diagram on the r-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of meshing damping

成,庞加莱截面上呈现4个点集,故系统处于准周期状态;当阻尼C<sub>r1</sub>∈[0.3,0.6]时,位移点趋于两条直线,相图由单股曲线绕圈形成,庞加莱截面上呈现两个点集,故系统处于双周期响应状态。

图13从空间相图进一步描述系统的响应特性。当C<sub>r1</sub><0.3时,相图杂乱无章,由此系统处于混沌响应状态;随着C<sub>r1</sub>的增大,相图逐渐变小;当C<sub>r1</sub>>0.4时,相图演变为由单股曲线环绕而成的封闭曲线,由此系统处于双周期响应状态。

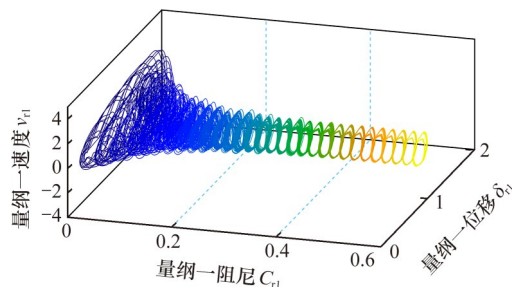


图13 啮合阻尼变化下r-p<sub>1</sub>啮合线上的空间相图

Fig.13 The spatial phase diagram on the r-p<sub>1</sub> meshing line under the change of meshing damping

综上所述,啮合阻尼的增大同样有助于r-p<sub>1</sub>啮合副的稳定。由此在设计非圆内齿圈时,可以通过提高重合度、改换润滑条件来提高啮合阻尼,从而保证r-p<sub>1</sub>啮合副的稳定运行。

#### 4.3 激励频率对系统振动响应的影响

##### 4.3.1 激励频率对s-p<sub>1</sub>齿轮副振动的影响

图14所示为激励频率在1.2~1.8范围内变化时s-p<sub>1</sub>啮合线上量纲一位移的变化规律。当频率ω<sub>c</sub><1.38时,位移点散乱无序,相图由多股曲线环绕组成,庞加莱截面上呈现多点,由此系统处于混沌响应状态;当频率ω<sub>c</sub>∈[1.38,1.59]时,位移点聚合为带状,相图由多条曲线环绕而成,庞加莱截面上聚合为4个点集,由此系统处于准周期响应状态;当频率ω<sub>c</sub>>1.59时,位移点为单线状,相图由一条曲线组成,庞加莱截面上为一个点,由此系

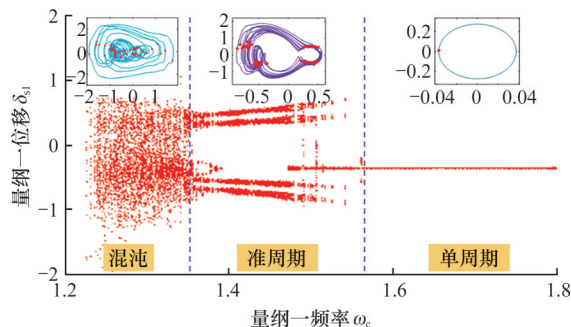


图14 激励频率影响下s-p<sub>1</sub>啮合线上的位移分岔图

Fig.14 The displacement bifurcation diagram on the s-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of excitation frequency

统处于单周期响应状态。

图 15 从 Lyapunov 指数的角度进一步描述激励频率变化时 s-p<sub>1</sub> 啮合线上系统的响应特性。当  $\omega_c < 1.38$  时, Lyapunov 指数全部位于零线以上, 此时系统处于混沌响应状态; 当  $\omega_c \in [1.38, 1.59]$ , Lyapunov 指数在零线位置上下浮动, 系统处于准周期状态; 当  $\omega_c > 1.6$  时, Lyapunov 指数全部位于零线以下, 此时系统处于单周期响应状态。

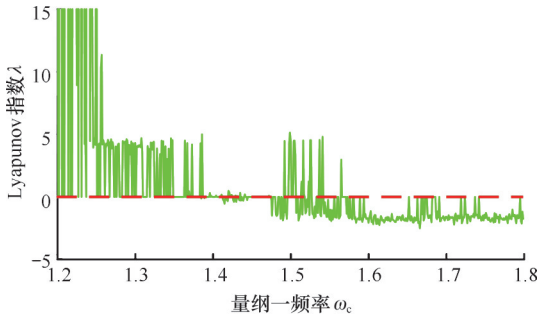


图 15 激励频率影响下 s-p<sub>1</sub> 啮合线上的 Lyapunov 指数  
Fig.15 The Lyapunov exponent on the s-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of excitation frequency

s-p<sub>1</sub> 啮合线上的振动响应如图 16 所示。当  $\omega_c = 1.8$  时系统处于单周期响应状态, 频域图(图 16a)表现为单峰; 小波时频图(图 16c)上反映为一条亮线, 其值与色谱对应。当  $\omega_c = 1.35$  时, 系统处于混沌响应状态, 频域图(图 16b)出现多峰, 反映到小波时频图(图 16d), 则出现多条亮线, 且低频信号丰富。

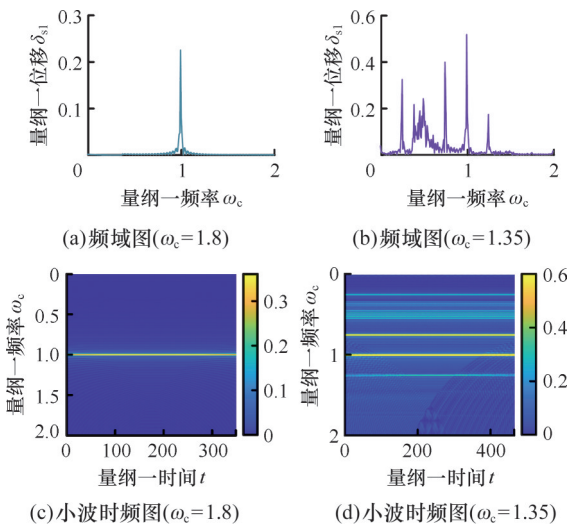


图 16 s-p<sub>1</sub> 啮合线上的振动响应

Fig.16 The vibration response on the s-p<sub>1</sub> meshing line

综上所述, 高激励频率有助于 s-p<sub>1</sub> 啮合副的稳定运行, 由此可通过提高齿轮转速来保证齿轮副的稳定运行。

4.3.2 激励频率对 r-p<sub>1</sub> 齿轮副振动的影响

图 17 所示为激励频率在 1.3~2.0 范围内变

化时内齿圈与行星轮 p<sub>1</sub> 啮合线上量纲一位移的变化规律。当频率  $\omega_c \in [1.3, 1.43]$  时, 位移点呈现散乱无序状态, 相图由多条曲线组成, 庞加莱截面有多个散乱点, 故系统处于混沌响应状态; 当频率  $\omega_c \in [1.43, 1.55]$  时, 位移点聚合为多条线状, 相图由多股曲线缠绕组成。庞加莱截面上聚合为 4 个点集, 故系统处于多周期响应状态; 当频率  $\omega_c \in [1.55, 2.0]$  时, 位移点形状变为单线, 相图由单条曲线组成, 庞加莱截面为一个点集, 频域图呈现为单峰, 故系统处于单周期响应状态。

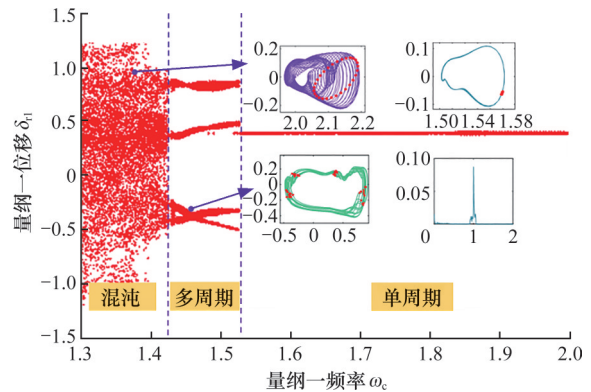


图 17 激励频率影响下 r-p<sub>1</sub> 啮合线上的位移分岔图  
Fig.17 The displacement bifurcation diagram on the r-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of excitation frequency

图 18 从 Lyapunov 指数的角度进一步描述激励频率变化时, r-p<sub>1</sub> 啮合线上系统的响应特性。当  $\omega_c < 1.43$  时, Lyapunov 指数均位于零线上方, 此时系统处于混沌响应状态; 随着  $\omega_c$  的增大, Lyapunov 指数逐渐位于零线以下, 系统逐渐趋于稳定; 当  $\omega_c > 1.55$  时, Lyapunov 指数位于零线以下, 此时系统处于单周期响应状态。

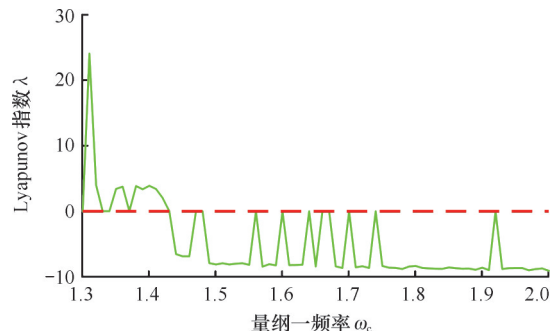


图 18 激励频率影响下 r-p<sub>1</sub> 啮合线上的 Lyapunov 指数  
Fig.18 The Lyapunov exponent on the r-p<sub>1</sub> meshing line under the influence of excitation frequency

图 19 选取两个典型的激励频率, 全面展示系统的不同响应状态。当  $\omega_c = 1.66$  时, 系统处于单周期响应状态, 频域图(图 19a)表现为单峰, 以基频振动为主; 小波时频图(图 19c)反映为一条亮

线,其值与色谱相对应。当 $\omega_c=1.4$ 时,系统处于混沌响应状态,频域图(图19b)表现为多峰,但以 $1/2$ 次谐波及其整数倍阶谐波为主;小波时频图(图19d)则表现为多条亮线,低幅值信号丰富,其值与色谱图相对应。

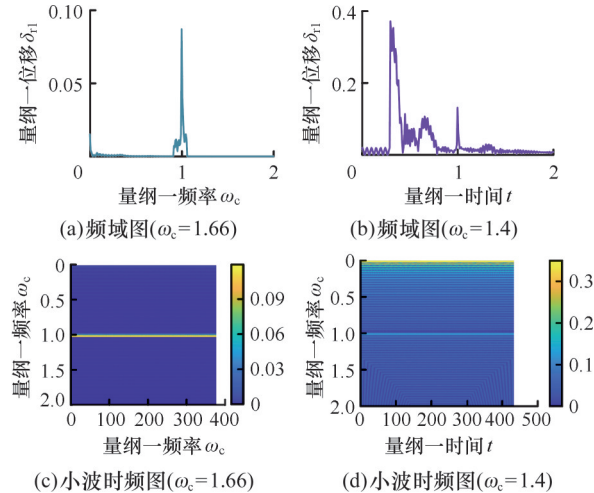


图19 r-p<sub>1</sub>啮合线上的振动响应

Fig.19 The Vibration response on the r-p<sub>1</sub> meshing line

综上所述,高激励频率同样有助于r-p<sub>1</sub>啮合副的稳定运行,由此可通过提高齿轮转速保证齿轮副的稳定运行。

## 5 结论

1)本文建立了非圆行星齿轮传动系统非线性动力学计算模型,模型考虑了偏心率、激励频率和啮合阻尼等非线性因素,这进一步完善了模型假设。该模型为系统优化提供了技术参考。

2)啮合阻尼有利于系统稳定。增大阻尼能有效抑制系统振动幅值,使系统跳出混沌状态,提高系统可靠性,可通过提高重合度或改换润滑条件来提高啮合阻尼, $C_{s1}$ 和 $C_{r1}$ 应在 $[0.04, 0.1]$ 范围内取值。

3)激励频率有利于系统稳定。当频率较低时,系统处于混沌状态;随着频率的增大,系统振动减小,系统趋于稳定,可通过提高系统的许用转速来提高激励频率,激励频率 $\omega_c$ 应在 $[3.4, 4.2]$  kHz内选取。

4)非圆行星齿轮偏心率对太阳轮的影响较大,对内齿圈的影响较小,可通过调节偏心率来改善太阳轮性能,优化系统整体性能。

## 参考文献:

[1] AO Meng, YU Gaohong, WANG Lei, et al. Optimization Synthesis of Hybrid Six-bar Mechanism with Non-circular Gear Constraints[J]. Journal of Mechanical Design, 2023, 145(6): 064502.

[2] ADDOMINE M, FIGLIOLINI G, PENNESTRÌ E. A Landmark in the History of Non-circular Gears Design: The Mechanical Masterpiece of Dondi's Astrarium[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 122: 219-232.

[3] HAN Xinghui, HE Chen, ZHENG Fangyan, et al. Transmission Performance Evaluation of Non-circular Spur Bevel Gear Based on a Novel Isochronal Measurement Method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 185: 105329.

[4] HU Yanan, LIN Chao, HE Chunjiang, et al. Design of Linear Functional Noncircular Gear with High Contact Ratio Used in Continuously Variable Transmission[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2023, 36(1): 71.

[5] BURROWS M, SUTTON G. Interacting Gears Synchronize Propulsive Leg Movements in a Jumping Insect[J]. Science, 2013, 341(6151): 1254-1256.

[6] 李渤涛, 陈定方. 非圆齿轮设计、制造、检测及应用[J]. 机械工程学报, 2020, 56(9): 55-72.

LI Botao, CHEN Dingfang. Design, Manufacture, Inspection and Application of Non-circular Gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(9): 55-72.

[7] ZHANG Xu, ZHONG Jiaxin, LI Wei, et al. Nonlinear Dynamic Analysis of High-speed Gear Pair with Wear Fault and Tooth Contact Temperature for a Wind Turbine Gearbox[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 173: 104840.

[8] XIA Heng, MENG Fanshan, ZHANG Xin, et al. Nonlinear Dynamics Analysis of Gear System Considering Time-varying Meshing Stiffness and Backlash with Fractal Characteristics[J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(16): 14851-14877.

[9] ZHENG Xingyuan, LUO Wenjun, HU Yumei, et al. Study on the Mesh Stiffness and Nonlinear Dynamics Accounting for Centrifugal Effect of High-speed Spur Gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 170: 104686.

[10] 莫帅, 黄祖瑞, 刘翔恒, 等. 航空非正交偏置面齿轮分汇流系统非线性动力学[J]. 力学学报, 2024, 56(4): 1110-1122.

MO Shuai, HUANG Zurui, LIU Yiheng, et al. Non-linear Dynamics of Aeronautical Non-orthogonal Offset Gear Split Flow System[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2024, 56(4): 1110-1122.

[11] 莫帅, 曾彦钧, 王震, 等. 高速重载人字齿轮传动非线性动力学分析[J]. 力学学报, 2023, 55(10): 2381-2392.

MO Shuai, ZENG Yanjun, WANG Zhen, et al. Nonlinear Dynamic Analysis of High Speed and Heavy Load Herringbone Gear Transmission[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(10): 2381-2392.

[12] 莫帅, 周长鹏, 王楠, 等. 机器人关节裂纹传动系统机电耦合动态特性研究[J]. 机械工程学报, 2022, 58(19): 57-67.

MO Shuai, ZHOU Changpeng, WANG Lei, et al. Study on Dynamic Characteristics of Electromechanical Coupling of Robot Joint Crack Transmission System[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(19): 57-67.

[13] MO Shuai, ZHANG Yingxin, SONG Yuling, et al. Non-linear Vibration and Primary Resonance Analysis of Non-orthogonal Face Gear-rotor-bearing System[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(4): 3367-3389.

[14] MO Shuai, ZHANG Ting, JIN Guoguang, et al. Analytical Investigation on Load Sharing Characteristics of Herringbone Planetary Gear Train with Flexible Support and Floating Sun Gear[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 144: 103670.

(下转第373页)