

# 一种面向多保真 Kriging 模型结构可靠性分析的主动学习方法

杜尊峰<sup>1\*</sup> 樊涛<sup>2</sup> 姜登耀<sup>1</sup>

1. 天津大学水利工程智能建设与运维全国重点实验室, 天津, 300354

2. 航空工业第一飞机设计研究院, 西安, 710089

**摘要:**提出了一种基于多保真 Kriging 模型与主动学习的结构可靠性分析方法。通过三阶段选择确定每次迭代过程中样本点的更新位置与空间位置, 第一阶段通过集成多种学习函数确定最优样本点集合; 第二阶段通过所提 BES 方法 (beneficial effect strategy) 确定样本点的更新位置; 第三阶段运用 Bootstrap 自举抽样法从最优样本点集合中确定样本点的空间位置。通过两个数值算例与一个工程实际算例证明了所提方法的有效性与高效性。与目前先进的多保真结构可靠性方法相比, 当模型的保真度较低时能有效地避免计算失败, 证明了所提方法的先进性与较好的适用性。

**关键词:**结构可靠性; 主动学习; 多保真 Kriging 模型; 保真度选择策略

**中图分类号:** TP181; TB114.3

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.02.018

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## A New Active Learning Method for Structural Reliability Analysis of Multi-fidelity Kriging Models

DU Zunfeng<sup>1\*</sup> FAN Tao<sup>2</sup> JIANG Dengyao<sup>1</sup>

1. State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Intelligent Construction and Operation, Tianjin University, Tianjin, 300354

2. AVIC the First Aircraft Institute, Xi'an, 710089

**Abstract:** A structural reliability method was proposed based on multi-fidelity Kriging modeling with active learning, which determined the computational and spatial locations of sample points during each iteration through a three-stage selection. Firstly, the optimal set of sample points was determined by ensemble multiple learning functions. Secondly, the computational locations of the sample points were determined by the proposed BES (beneficial effect strategy). Finally, the spatial locations of the sample points were determined from the optimal set of sample points by applying Bootstrap sampling method. The effectiveness and efficiency of the method was demonstrated by two numerical examples and one practical engineering example. Compared with the current advanced multi-fidelity model structure reliability method, when the fidelity of the model is lower, the computational failure may be effectively avoided, which shows the advanced and better applicability of the method.

**Key words:** structural reliability; active learning; multi-fidelity Kriging model; fidelity selection strategy

### 0 引言

随着复杂机械结构与工程结构所受的环境载荷愈发恶劣, 不确定性因素对结构可靠性的影响也愈发重要<sup>[1]</sup>, 针对多源随机不确定性下的复杂结构可靠性评估, 蒙特卡罗模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 通过直接随机生成大量模拟样本以

求得稳健的可靠性结果而被认为是准确的结果, 但当复杂结构的响应计算涉及大量的有限元计算时, MCS 的计算成本极高, 往往不具备可行性。

为提高求解效率, 同时保证计算精度, 通过构建代理模型取代结构复杂且昂贵的响应计算过程, 结合 MCS 开展结构可靠性评估的方法逐渐成为主流趋势。其中, Kriging 模型因计算效率高、对强非线性具备较好的拟合和预测能力<sup>[2-3]</sup>, 同时能够提供预测方差而广泛应用于复杂结构的可靠性评估。通常, 由于结构可靠性更关心极限状态 (limit state function, LSF) 附近的拟合精度, 利用

收稿日期: 2024-12-22

基金项目: 国家自然科学基金(51109158, U2106223); 国家重点研发计划(2022YFC2806300); 天津市自然科学基金(23JCZDJC01150)

Kriging 模型进行结构可靠性分析时一般通过主动学习和实验设计 (design of experiments, DoE) 序贯更新 Kriging 模型, 而主动学习函数是自适应更新 Kriging 模型的关键。基于此, 学者们提出了大量主动学习函数, 以进一步提高 Kriging 模型的拟合效率和拟合精度, 如 BICHON 等<sup>[4]</sup>提出的经典的预期可行性 (expected feasibility function, EFF) 学习函数、ECHARD 等<sup>[5]</sup>提出的考虑样本点符号被错误估计概率的 U 函数及 ZHANG 等<sup>[6]</sup>提出的基于折叠正态和考虑样本密度的 REIF2 (reliability-based expected improvement function 2) 学习函数等<sup>[7-10]</sup>。其中, U 函数和 EFF 函数应用最为广泛。同时, HONG 等<sup>[11]</sup>指出不同学习函数各有优劣, 在解决实际问题时, 难以判断哪一种学习函数更适用, 并基于投资组合分配策略实现了对多种学习函数的集成, 充分利用了各学习函数的优势, 避免了学习函数选择困难。

上述方法构建的 Kriging 模型的数据均来源于单一高保真模型, 但对于复杂结构, 即使利用 Kriging 模型能够大幅降低计算成本, 但高保真模型的单次计算成本特别耗时, 如涉及高精度 CFD 计算, 构建 Kriging 模型的计算成本仍然过高, 且对于实际工程问题, 往往可以使用多种方法获取不同保真度的响应值。因此, 构建多保真 Kriging 模型成为一种平衡计算精度和计算成本行之有效的方法, 近年来许多研究也致力于多保真代理模型的应用, 涉及敏感性分析<sup>[12]</sup>、结构优化<sup>[13-14]</sup>及不确定性量化<sup>[15-16]</sup>等。但多保真 Kriging 模型在结构可靠性领域应用相对较少, 主要原因是, 与单保真 Kriging 模型结构可靠性分析的主动学习仅需确定样本点的空间位置不同, 多保真 Kriging 模型结构可靠性分析需要同时确定样本点的空间位置与更新位置。YI 等<sup>[17]</sup>基于互相关函数和 EFF 函数提出了一种基于多保真 Kriging 模型的结构可靠性方法 (active multi-fidelity Kriging-augment efficient feasibility function, AMK-AEFF)。在此基础上, LU 等<sup>[18]</sup>考虑样本概率密度函数的影响, 结合 D 学习函数<sup>[9]</sup>对多保真结构可靠性的主动学习方法进行了拓展。但基于互相关函数的主学习方法在面对模型保真度较低和维数复杂的问题时容易导致计算失败。基于此, YI 等<sup>[19]</sup>基于“Believer”策略提出了一种新的多保真结构可靠性方法 (BSC-believer), 有效地解决了 AMK-AEFF 不适用于多维问题的弊端。ZHANG 等<sup>[20]</sup>基于多保真高斯回归代理模型和 Believer 策略提出了一种

集体学习函数, 可以与任何已提出的单保真结构可靠性的学习函数相适配, 但该方法并未充分利用不同学习函数的优势。

综上所述, 现阶段多保真 Kriging 模型结构可靠性方法主要存在两方面问题: 一是未考虑模型保真度对分析结果的影响, 事实上, 当模型的保真度较低时, 现有主动学习方法易出现计算失败; 二是未充分利用不同学习函数的优势, 主动学习大多仅依靠单一学习函数进行扩展。本文基于不同保真度模型对多保真建模的“有益效果”, 集成多种学习函数提出了一种全新的主动学习方法, 简称 ELF-BES (ensemble learning function-beneficial effect strategy)。首先集成多种学习函数, 筛选出各种学习函数所青睐的最佳样本点, 然后通过 BES 方法确定样本点的更新位置, 最后通过 ELF 策略确定样本点的空间位置, 以实现多保真 Kriging 模型的自适应序贯更新, 并通过算例验证该方法的有效性以及在解决模型保真度较低问题时的优越性。

## 1 ELF-BES 方法介绍

### 1.1 现有主动学习方法

面对多保真 Kriging 模型的主动学习, 目前所提出的学习函数大致可以分为两类: 一类是在已有的适用于单一高保真 Kriging 模型的结构可靠性分析方法的学习函数基础上提出适用于多保真 Kriging 模型的主动学习函数, 其一般构型可表示为

$$MF\_lf(x, v) = \frac{lf(x) \times h(x, v) \times \eta(x, v) \times f_X(x)}{c(v)}$$

$$(x, v) = \arg \max_{i \in \theta} (MF\_lf(x_i, v)) \quad (1)$$

下一最佳样本点的空间位置通过最大化  $MF\_lf(x, v)$  实现,  $x$  为样本点集;  $lf(x)$  为单一高保真模型的主动学习函数, 如提出的 ERF (expected risk function) 学习函数等;  $f_X(x)$  为随机变量的联合概率密度函数;  $v$  表示样本点的更新位置,  $v=1$  表示样本点在低保真模型中更新,  $v=h$  表示样本点在高保真模型中更新;  $\theta$  表示候选样本池;  $c(v)$ 、 $h(x, v)$  和  $\eta(x, v)$  分别表示成本函数、交叉相关性函数和密度函数, 是影响多保真 Kriging 模型的主动学习的三个重要函数, 其含义详见文献<sup>[18]</sup>。

另一类是基于 Kriging Believer 策略<sup>[19]</sup>提出的一种新的学习函数。现结合一个非线性三角函数  $y = x^2 \cos x + \sin x \cos x$  来阐述其原理, 分别在  $x \in$

[0, 20]区间上均匀抽取8个样本点作为训练集并构建Kriging模型,如图1所示。具体而言,基于Believer策略的主动学习的本质是通过在当前DoE下已构建的Kriging模型所提供的样本点 $x$ 处预测均值,将该预测均值视为“伪真实值”,并基于主动学习选择最佳“伪样本点”添加到DoE,如图1中的“伪样本点1”。然后更新Kriging模型,根据设计的判定标准计算更新前后所取得的“有益效果”,如模型精度提升、符号预测错误概率降低等。

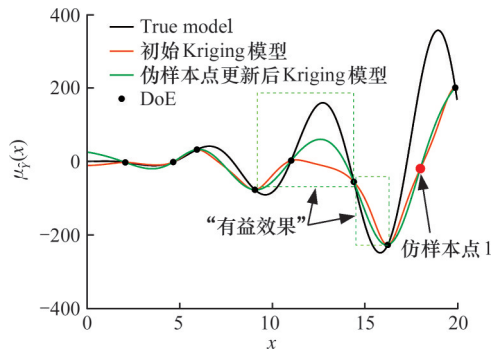


图1 Believer策略机理展示

Fig.1 Demonstration of Believer strategy mechanism

## 1.2 ELF-BES基本原理

本文提出的ELF-BES方法在多保真Kriging模型的序贯更新过程中通过三阶段选择确定最佳样本点的空间位置和更新位置,具体实施方式如下。

第一阶段基于需集成的学习函数选择最优样本点集合 $\{x_{new}^{EFF}, x_{new}^U, \dots, x_{new}^{ERF}\}$ ,由于没有一种学习函数适用于所有可靠性问题<sup>[21]</sup>,故在选择需集成的学习函数时,要尽可能地包含侧重点不同的学习函数,如EFF学习函数和U学习函数更侧重于LSF附近样本预测误差对结果的影响,ERF学习函数基于样本点对模型的预期改进出发,H学习函数利用信息熵表征样本点的不确定性等。本文选择EFF、U、ERF<sup>[7]</sup>、REIF2、H<sup>[22]</sup>函数来说明ELF-BES方法。各学习函数的推导过程详见相应文献,不再赘述。需要说明的是,集成多种学习函数虽然会增加一定的计算成本,但评价可靠性算法的计算效率主要包含三个方面:一是代理模型的构建过程,二是主动学习过程,三是LSF的计算过程,其中,最重要的是LSF的计算过程,因为基于代理模型的结构可靠性算法所应用的问题往往涉及大量复杂的有限元计算过程。

第二阶段是确定下一样本点的更新位置。本文提出了一种基于实际“有益效果”的保真度选择策略,BES方法本质上是认为存在多保真模型时,考虑到高保真模型的建模成本远远高于低保

真模型,一般情况下是更倾向于用较多的低保真数据和较少的高保真数据获得较好的拟合结果。同时,低保真样本点并不是越多越好,过多的低保真样本点可能对Kriging模型造成“负面效果”。因此,当低保真样本点对当前多保真Kriging模型不能提供建模“有益效果”时,则认为此时高保真样本集所提供的信息已被充分利用,需要添加一个高保真样本点,并继续添加低保真样本点;否则,继续添加低保真样本点。

对多保真Kriging模型“有益效果”的选择可以使失效概率的最大相对预测误差降低,如ESC (error-based stopping criterion)<sup>[23]</sup>、BSC (error-based stopping criterion using bootstrap estimation)准则<sup>[8]</sup>等、多保真Kriging模型预测误差降低以及基于失效概率的不确定性缩小等。本文给出基于失效概率的置信边界缩小作为对多保真Kriging模型“有益效果”的评价准则。基于估计失效概率的置信边界的表达式为

$$\hat{\epsilon}_{f_i}^{\text{bound}} = \frac{\hat{P}_i^+ - \hat{P}_i^-}{\hat{P}_i} \quad (2)$$

其中, $\hat{P}_i^+$ 、 $\hat{P}_i^-$ 分别表示失效概率的置信上边界和下边界,其计算表达式如下:

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^\pm &= P(\hat{G}(x) \mp k\sigma_G(x)) \\ k &= \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $(1 - \alpha)$ 为置信水平,通常, $k = \Phi^{-1}(97.5\%) = 1.96$ ; $\hat{G}(x)$ 为多保真Kriging模型的预测均值; $\sigma_G(x)$ 为预测方差。

第三阶段是确定下一样本点的空间位置,即在 $\{x_{new}^{EFF}, x_{new}^U, \dots, x_{new}^{ERF}\}$ 中选择最终样本点实现对多保真Kriging模型的序贯更新,确定样本点的空间位置可以根据式(1)确定。但由于本文集成了多种学习函数,而不同学习函数的计算方式不同,故无法直接使用 $l_f(x)$ 值进行计算对比。此时,需要构造一个统一的 $l_{f_{new}}(x)$ 值以方便计算筛选。另外,下一最佳样本点会更倾向于选择多保真Kriging模型预测不确定性较大的点,一般来说,Kriging模型会直接提供某一点误差,但这类误差是偏小的<sup>[24]</sup>,且多保真Kriging模型一般是通过多Kriging模型融合,这也放大了不确定性估计的误差。因此,受文献<sup>[25]</sup>启发,本文通过Bootstrap自举抽样法量化多保真Kriging模型对最优样本点集合的预测不确定性,并令 $l_{f_{new}}(x)$ 等于由Bootstrap自举抽样法得出的样本点局部误差,最后结合式(1)完成第三阶段样本点选择,确定最终的待更新样本点。

Bootstrap 自举抽样法是通过初始 DoE 进行有放回的重采样<sup>[25]</sup>,其具体实施方式如图 2 所示。假设现需要重采样  $m$  次,记录每一次采样所得样本为一个新的 DoE<sub>new</sub>,并构建新的 Kriging 模型,可得到  $m$  个 Kriging 模型。分别计算  $m$  个 Kriging 模型对某一样本点  $x$  的估计值  $\{\hat{G}_1(x), \hat{G}_2(x), \dots, \hat{G}_m(x)\}$ ,同时,为了避免抽样随机性的影响,仅保留 95% 置信区间内的预测值,假设 95% 置信区间内,  $m$  个 Kriging 模型对样本点  $x$  的预测值集合为  $\{\hat{G}_1(x), \hat{G}_2(x), \dots, \hat{G}_e(x)\}$ ,则多保真 Kriging 模型对样本点  $x$  处的预测误差  $\sigma_{bs}(x)$  为

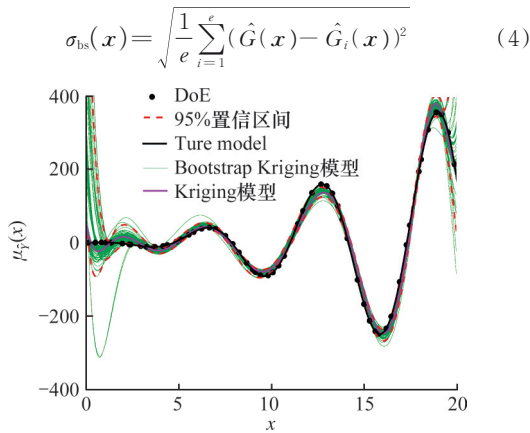


图 2 Bootstrap 自举抽样法示意图  
Fig.2 Bootstrap sampling method schematic

### 1.3 停止准则

停止标准是主动学习方法的另一个关键要素。而基于估计失效概率的置信边界缩小本身也能作为一种停止准则用以中止方法,但该方法本质上是利用当前 Kriging 模型的预测结果进行计算,而未考虑失效概率稳定的情况和 Kriging 模型给出的预测方差存在偏差的情况<sup>[26]</sup>,因此,可能会出现方法早熟的情况。本文引入一种混合收敛准则,既能检测失效概率估计的误差边界,又能利用收敛过程的稳定特性,在适当阶段终止所提方法。该准则在满足估计失效概率的置信边界的基础上,利用连续迭代次数后失效概率的变化来检测失效概率估计的稳定性,以补充完善基于估计失效概率置信边界的停止准则<sup>[27]</sup>。具体表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\hat{P}_f}^{\text{bound}} &\leq \epsilon_1 \\ \max \left( \frac{|\hat{P}_f^d - \hat{P}_f^{d-1}|}{\hat{P}_f^d}, \frac{|\hat{P}_f^{d-1} - \hat{P}_f^{d-2}|}{\hat{P}_f^{d-1}}, \frac{|\hat{P}_f^{d-2} - \hat{P}_f^{d-3}|}{\hat{P}_f^{d-2}} \right) &\leq \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中,  $\hat{P}_f^d$  为第  $d$  次迭代计算所得的失效概率,该

停止准则认为最后 4 次迭代所得失效概率的相对误差小于  $\epsilon_2$  且满足基于估计失效概率的置信边界的停止准则时,失效概率已趋于稳定且误差较小,此时可认为模型已经收敛。 $\epsilon_1, \epsilon_2$  的取值需确保在精度和效率之间取得良好的平衡,本文给出参考取值分别为  $\epsilon_1=0.2, \epsilon_2=0.01$ 。

### 1.4 方法流程

本文所提多保真 Kriging 模型结构可靠性分析方法由以下 10 个核心步骤组成:

1) 采用 Monte Carlo 抽样构建  $\Theta$ , 根据随机变量的分布类型抽取  $N_{mc}$  个样本点作为样本池  $\{x_1, x_2, \dots, x_{mc}\}$ 。

2) 确定初始高/低保真样本点  $\{x_1^h, x_2^h, \dots, x_{init}^h\}, \{x_1^l, x_2^l, \dots, x_{init}^l\}$ 。

3) 分别计算初始高/低保真样本点的真实响应值,构建初始高/低保真 DoE,构建初始(更新)多保真 Kriging 模型。

4) 基于集成的学习函数计算每一学习函数所对应的最佳样本点,整合所有学习函数所对应的最佳样本点,构建最佳样本点集合  $\{x_{new}^{EFF}, x_{new}^U, \dots, x_{new}^{ERF}\}$ 。

5) 基于 BES 方法确定下一最佳样本点更新位置,对于首次迭代,默认选择低保真模型作为更新位置。

6) 确定更新位置后,利用 Bootstrap 自举抽样法量化  $\{x_{new}^{EFF}, x_{new}^U, \dots, x_{new}^{ERF}\}$  中每一样本点的预测误差,并利用式(1)确定下一最佳样本点的空间位置。

7) 判断是否满足停止准则,若满足则执行步骤 8); 否则,将  $x_{new}$  添加到 DoE 中并执行步骤 3)。

8) 根据式(6)、式(7)计算当前迭代步下的结构失效概率  $\hat{P}_f$  和变异系数  $Cov_{P_f}$ 。判断变异系数是否满足  $Cov_{P_f} < 0.05$ , 若满足则执行步骤 10); 否则,执行步骤 9)。

$$\hat{P}_f \approx \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I(\hat{G}(x_i)) \quad (6)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 0 \\ 0 & |x| > 0 \end{cases}$$

$$Cov_{P_f} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{\hat{P}_f N_{mc}}} \quad (7)$$

9) 主动学习过程收敛,但  $Cov_{P_f} > 0.05$  时,说明当前样本池  $\Theta$  的规模未达到要求,则扩大样本池  $\Theta$  的范围,令  $N_{mc} = 5N_{mc}$ ,返回执行步骤 2)。

10) 输出失效概率,方法结束。输出总计算成本,多保真结构可靠性的计算成本  $T_{MF}$  的计算方

式如下:

$$T_{MF} = T_h + cT_l \quad (8)$$

式中:  $T_h$ 、 $T_l$ 分别为高保真模型的计算成本和低保真模型的计算成本,后续将以计算次数特指高保真模型的计算次数。

## 2 数值算例验证

本节给出2个算例,证明所提方法的有效性,与高效性,每一个算例均使用本文所提ELF-BES方法与已有的较为先进的多保真Kriging模型结构可靠性方法,如AMFK-D<sup>[18]</sup>、AMK-AEFF<sup>[17]</sup>与BSC-Believer<sup>[19]</sup>以及单保真结构可靠性方法AK-EFF<sup>[4]</sup>、AK-U<sup>[5]</sup>、AK-ERF<sup>[7]</sup>、AK-RLCB<sup>[8]</sup>、AK-H<sup>[22]</sup>、AK-REIF2<sup>[6]</sup>进行计算比较。为了防止建模策略对结果造成影响,以更好地说明本文主动学习方法的高效性,本文中所有的多保真Kriging模型建模方法均采用文献[19]中的方法。为降低采样随机性的影响,所有方法均重复计算30次,记录统计结果以进行对比分析。取MCS计算结果作为标准值进行误差计算,误差计算公式为

$$\epsilon_{p_i} = \left| \hat{P}_i - P_i^{MC} \right| / P_i^{MC} \quad (9)$$

### 2.1 算例1: Multimodal 函数

本算例中, Multimodal原函数视为高保真模型,即

$$g_h(x_1, x_2) = \sin \frac{5x_1}{2} - \frac{(x_1^2 + 4)(x_2 - 1)}{20} + 2 \quad (10)$$

低保真模型的表达式<sup>[20]</sup>为

$$g_l(x_1, x_2) = g_h(x_1, x_2) - \sin \left( \frac{5x_1}{11} + \frac{5x_2}{22} + \frac{35}{11} \right) \quad (11)$$

$$x_1 \sim N(1.5, 1) \quad x_2 \sim N(2.5, 1)$$

不同保真度模型的LSF如图3所示。假设高/低保真模型计算成本比  $c=5$ 。在此示例中,所选择的初始的高保真样本点数量为6,初始低保真样本点数量为  $2 \times 10$ ,初始样本池  $\theta$  规模为  $1 \times 10^5$ 。

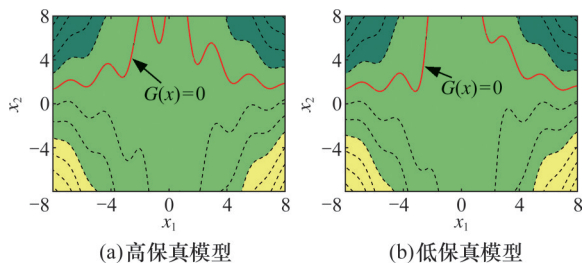


图3 不同保真度模型的LSF示意图

Fig.3 Schematic representation of LSF for different fidelity models

首先为了直观地说明ELF-BES的主动学习的过程,图4所示为该在某次求解过程中的迭代情况。图4a~图4d分别展示了开始迭代、第

6次迭代、第12次迭代及第18次迭代的采样分布。可以看出,开始迭代时,多保真Kriging模型对LSF的拟合效果较差,随着迭代的进行,ELF-BES方法会交替地选择高保真样本点和低保真样本点来更新多保真Kriging模型,最后收敛时,有效地实现了对LSF的拟合,共添加了6个高保真样本点和12个低保真样本点,更新的低保真样本点多于高保真样本点(注:  $I$ 为迭代次数,  $N_{HF}$ 表示高保真样本点数,  $N_{LF}$ 表示低保真样本点数)。

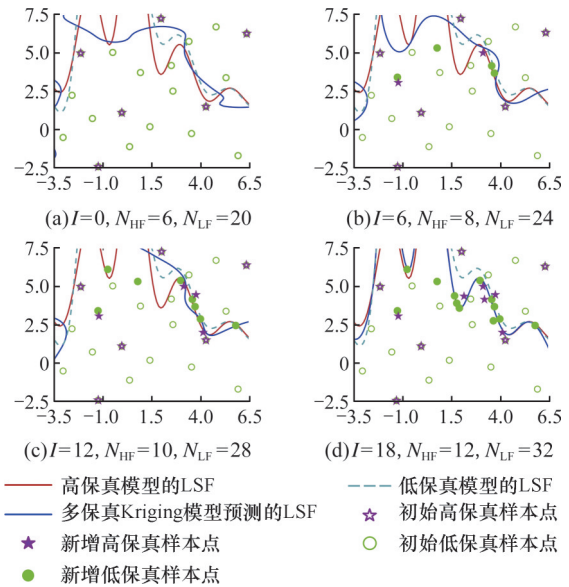


图4 ELF-BES方法更新过程

Fig.4 Updating process of ELF-BES

表1和图5所示分别为各方法30次重复运行的平均结果和30次计算次数及相对误差分布。以MCS计算值为参考。可以看出,在本算例中,与单保真结构可靠性分析方法相比,多保真结构可靠性分析方法的计算效率得到了大幅提升,且

表1 算例1各方法计算结果对比

Tab.1 Calculation results for each method in example 1

计算模型	方法	计算次数 $T_{MF}$	$\hat{P}_i / 10^{-2}$	$\epsilon_{p_i} / \%$
高保真模型	MCS	$1 \times 10^6$	3.12	
	AK-EFF	48.7	3.14	2.22
	AK-U	40.5	3.13	2.02
	AK-ERF	44.4	3.13	2.01
	AK-RLCB	33.9	3.12	1.77
	AK-H	52.3	3.13	2.50
	AK-REIF2	30.4	3.14	1.58
多保真模型	AMFK-D	27.5 (15.6+59.5×0.2)	3.16	1.43
	AMK-AEFF	23.8 (13.8+50.1×0.2)	3.13	0.92
	BSC-Believer	19.6 (12.6+35.0×0.2)	3.12	0.46
	ELF-BES	19.7 (12.4+36.4×0.2)	3.12	0.83

精度更高,这主要是由于本算例中模型的保真度较高,能较好地提供高保真模型的局部变化趋势,且成本更低。在多保真Kriging模型结构可靠性分析方法中,ELF-BES方法优于AMK-AEFF和AMFK-D方法,其计算效率与BSC-Believer方法相近。但综合来看,BSC-Believer方法的精度和效率最佳,主要原因是ELF-BES方法通过不断“试错”低保真样本点来更新多保真模型,在处理低非线性且极限状态函数为显式的简单问题时,在计算效率上优势并不明显。

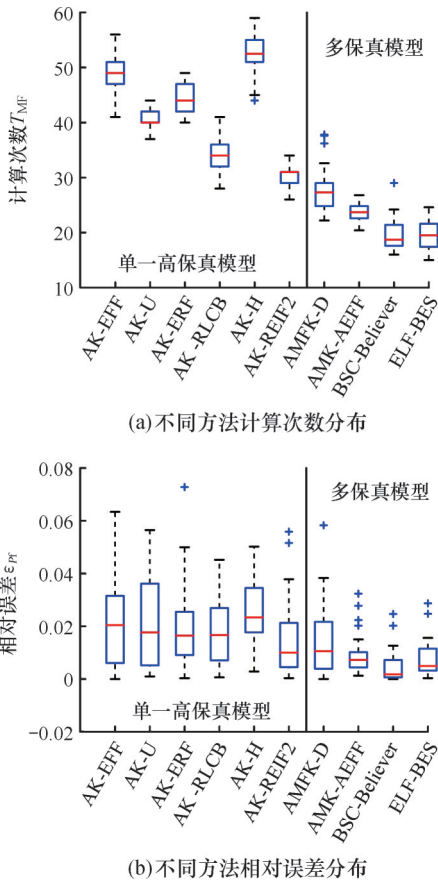


图5 算例1各方法30次求解的情况

Fig.5 The case of 30 solutions for each method of calculation example 1

由图5可看出,ELF-BES方法的求解结果的稳健性较好,相对误差较小,与BSC-Believer方法接近且优于其他方法,这主要是由于本节采用集成学习函数,在每一次迭代时均充分利用了每一种学习函数的性能。而AMK-AEFF、AMFK-D等方法依赖于某一种单独的学习函数,其中,AMK-AEFF的稳健性优于AMFK-D,说明在此算例中,EFF学习函数的适用性优于D函数。

## 2.2 算例2:带工程背景的Non-linear Oscillator问题

Non-linear Oscillator问题为一强非线性的6

维问题,结构示意图见图6,其高保真模型和低保真模型分别为

$$g_h = 3R - \left| \frac{2F_1}{M\omega^2} \sin \frac{\omega t_1}{2} \right| \quad (12)$$

$$g_l = 3R - \left| \frac{2F_1}{M\omega^2} \sin \left( \frac{\omega t_1}{2} - 0.2 \right) \right| - \frac{2}{15} \sin \frac{\omega t_1}{2} \quad (13)$$

$$\omega = \sqrt{(c_1 + c_2)/M}$$

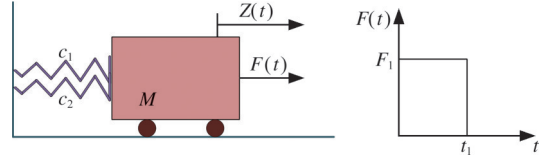


图6 Non-linear Oscillator问题示意图

Fig.6 Schematic diagram of the Non-linear Oscillator problem

随机变量分布见表2。

表2 随机变量分布信息

Tab.2 Information on the distribution of random variables

变量	分布类型	均值	标准差
$c_1$	正态分布	1	0.1
$c_2$	正态分布	0.1	0.01
$M$	正态分布	1	0.05
$R$	正态分布	0.5	0.05
$t_1$	正态分布	1	0.2
$F_1$	正态分布	1	0.2

在此示例中,所选择的初始的高精度样本点数量为6,初始的低精度样本点数量为 $6 \times 10$ ,初始样本池 $\Theta$ 规模为 $1 \times 10^5$ 。各方法30次求解的平均结果见表3,可以看出,ELF-BES方法的计算效率最高,仅需计算开展28.6次高保真模型计

表3 算例2各方法计算结果

Tab.3 Calculation results for each method in example 2

计算模型	方法	计算次数 $T_{MF}$	$\hat{P}_f / 10^{-2}$	$\epsilon_{P_f} / \%$
高保真模型	MCS	$1 \times 10^5$	2.87	-
	AK-EFF	116.5	2.85	1.82
	AK-U	132.3	2.85	2.23
	AK-ERF	118.0	2.86	1.70
	AK-RLCB	48.0	2.91	3.26
	AK-H	146.0	2.87	2.69
	AK-REIF2	140.8	2.88	2.25
多保真模型	AMFK-D	157.2(147.8+94.2 $\times$ 0.1)	2.84	3.43
	AMK-AEFF	151.8(140.6+111.4 $\times$ 0.1)	2.83	2.59
	BSC-Believer	36.6(24.7+119.3 $\times$ 0.1) Failed:4 30	2.54	11.27
	ELF-BES	40.0(28.6+113.5 $\times$ 0.1)	2.86	1.59

算和113.5次低保真模型计算即可获得结果,精度和效率均优于目前较为先进的AMFK-D、AMK-AEFF及BSC-Believer方法。其中,BSC-Believer方法甚至出现了4次计算失败的情况,而AMFK-D、AMK-AEFF方法计算效率较差。

图7所示为AMK-AEFF方法、BSC-Believer方法及ELF-BES方法30次求解情况的具体分布,结合图7a可看出,AMK-AEFF方法在每一次计算结束时,对高保真模型的计算次数均大于对低保真模型的计算次数,且高保真模型的计算次数均较高。说明AMK-AEFF方法在本算例中并不能很好地利用低保真模型所提供的数据趋势信息实现对多保真Kriging模型的辅助建模,反而对多保真Kriging模型建模产生了“负面效果”,进而

需要额外计算高保真模型来弥补由低保真模型带来的多保真Kriging模型的“负面影响”,AMFK-D方法同理。

结合图7b可看出,BSC-Believer方法大部分计算情况较好,但在第11、13、19和22次出现了计算失败的情况。这是因为BSC-Believer方法出现了一直选择低保真样本点的情况,最后导致多保真Kriging模型中,高/低保真模型样本点数量的差异过大,使得协方差矩阵奇异。而ELF-BES方法每一次的计算完成,均使用了较少的高保真样本点和较多的低保真样本点,采用高保真样本点的数量也少于其他基于单保真结构可靠性方法的数量,说明该方法能较好地实现利用低保真样本点对多保真Kriging模型的辅助建模,符合使用多保真模型开展结构可靠性分析的规律,证明了BSC-Believer在处理复杂问题时,虽然当计算成功时精度与效率较高,但容易出现计算失败,稳健性较差,进而造成计算资源浪费,而ELF-BES则同时兼顾了计算效率、精度与方法稳健性,证明了所提方法的优越性。

### 3 模型保真度对方法性能的影响分析

为了更好地说明BSC-Believer方法的缺陷与ELF-BES方法的优势,本节通过对Multimodal函数构造不同低保真模型来论证上述观点。首先引入Pearson相关系数 $r^2$ 来量化高保真模型和低保真模型之间的相关性<sup>[28]</sup>,相关表达式如下:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^z (\hat{G}_h(x_i) - \bar{\hat{G}}_h(x)) (\hat{G}_l(x_i) - \bar{\hat{G}}_l(x))}{\sqrt{\sum_{i=1}^z (\hat{G}_h(x_i) - \bar{\hat{G}}_h(x))^2} \sqrt{\sum_{i=1}^z (\hat{G}_l(x_i) - \bar{\hat{G}}_l(x))^2}} \quad (14)$$

其中, $z$ 为高/低保真模型观测样本集数量,本节取 $10^4$ ;  $\hat{G}_h(x_i)$ 、 $\hat{G}_l(x_i)$ 分别为高/低保真模型的实际响应值;  $\bar{\hat{G}}_h(x)$ 、 $\bar{\hat{G}}_l(x)$ 分别为观测样本集的高保真均值和低保真均值。可知, $r^2$ 越大,低保真模型的保真度越高,高/低保真模型的相关性越强。

为了构造不同保真度的Multimodal函数,需要对算例1进行改写以得到不同相关性下的低保真模型,改写后的低保真模型如下:

$$g_i^c(x_1, x_2) = \sin \frac{5x_1 - 2C}{2} - \frac{[(x_1 - 4C)^2 + 4](x_2 - 1 - C)}{20} + 2 - \sin \left( \frac{5x_1}{11} + \frac{5x_2}{22} + \frac{35}{11} \right) \quad (15)$$

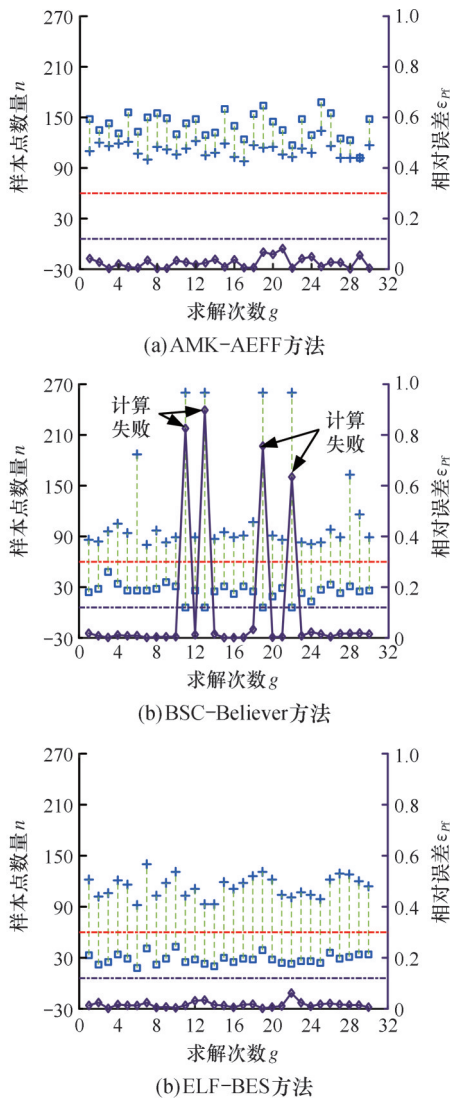


图7 基于多保真模型的结构可靠性方法的30次求解情况  
Fig.7 Demonstration of 30 solutions of the structural reliability method based on multi-fidelity modeling

式中： $C$ 为用来调节模型保真度的系数，即通过调整 $C$ ，便能获取不同相关性的低保真模型。

图8所示为不同 $C$ 条件下低保真模型的LSF值以及与高保真模型的相关性变化。由图8a可以看出，随着 $C$ 的增大，相关性系数 $r^2$ 逐渐变小，结合图8b可知，随着 $C$ 的增大，高保真模型的LSF值的变化趋势与低保真模型的LSF值的趋势匹配程度逐渐偏离。

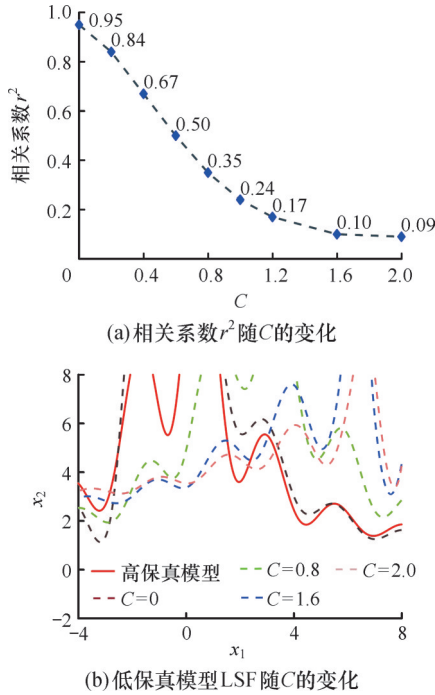


图8 低保真Multimodal函数相关系数 $r^2$ 及低保真LSF值随 $C$ 的变化

Fig.8 Correlation coefficient of low-fidelity multimodal function and variation of low-fidelity LSF with  $C$

BSC-Believer方法 ELF-BES方法在不同相关系数 $r^2$ 下30次独立运行结果中出现计算失败的次数见表4。可知，BSC-Believer方法在 $C=0.2$ 即 $r^2=0.84$ 时就出现了计算失败，而ELF-BES方法是从 $C=0.6, r^2=0.49$ 时才开始出现计算失败，整体来看，BSC-Believer方法随着相关系数 $r^2$ 的减小，计算失败的次数逐渐增加。在 $C \geq 0.8, r^2 \leq 0.35$ 时失败次数甚至大于10，相比之下，ELF-BES方法虽然也出现了计算失败的情况，但

表4 不同相关系数 $r^2$ 下不同方法30次运行中计算失败次数

Tab.4 Number of failed calculations across 30 runs for different methods under different correlation coefficients

$C$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
$r^2$	0.95	0.84	0.67	0.49	0.35	0.24	0.17	0.10	0.09
BSC-Believer	0 30	2 30	5 30	7 30	16 30	13 30	14 30	13 30	15 30
ELF-BES	0 30	0 30	0 30	1 30	0 30	2 30	0 30	1 30	3 30

失败次数较少。

为了更直观地说明ELF-BES方法相较于BSC-Believer方法的优势，两种方法在不同相关系数下30次运行结果的高/低保真点采样次数分布和总计算次数的分布情况如图9、图10所示，可

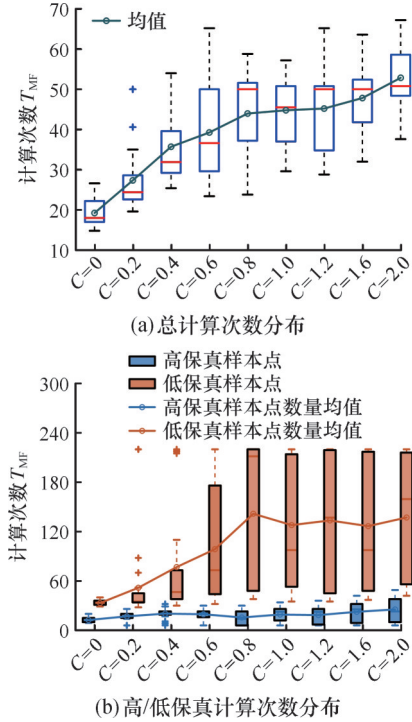


图9 BSC-Believer方法的计算次数随 $r^2$ 变化的分布  
Fig.9 Variation of the number of calculations with the correlation coefficient for the BSC-Believer method

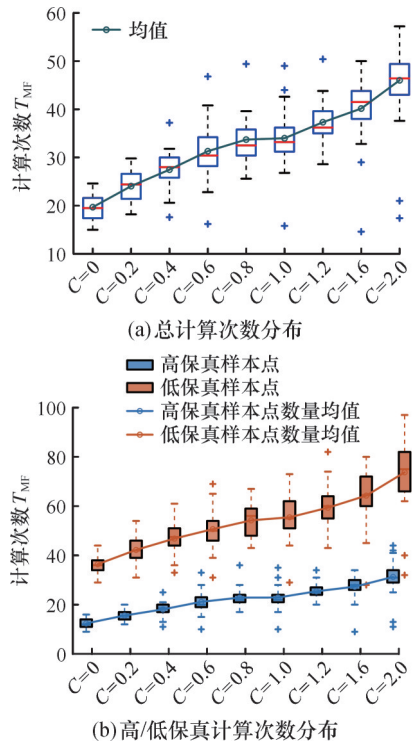


图10 ELF-BES方法的计算次数随 $r^2$ 变化的分布情况  
Fig.10 Variation of the number of calculations with the correlation coefficient for the ELF-BES method

以看出, BSC-Believer方法从  $C=0.2, r^2=0.84$  开始出现了持续选择低保真样本点的情况, 最后导致计算失败。而 ELF-BES方法即使面对  $C \geq 0.6, r^2 \leq 0.49$  等保真度较低的情况也未出现一直添加低保真样本点的情况。结合实际的计算结果可以发现, ELF-BES方法出现计算失败的原因可能是方法早熟, 提前收敛, 导致误差过大, 最终导致计算失败。为了验证上述猜想, 可通过修改 ELF-BES方法的停止准则, 取更保守的停止阈值重新计算。

表5所示为  $C \geq 0.6, r^2 \leq 0.49$  时, 调整 ELF-BES方法的停止准则阈值, 重新独立运行30次, 并统计计算失败次数。可以看出, 当 ELF-BES方法停止准则采用更严苛的停止阈值后, 虽然计算成本增加, 但未出现计算失败, 证明了表4中 ELF-BES方法出现计算失败的原因是方法早熟, 而不是类似于 BSC-Believer方法机理因失效引起的计算失败。值得一提的是, 当  $r^2$  过小时, ELF-BES方法的计算次数已经高于部分单保真结构可靠性方法, 说明此时低保真模型已经不能提供“有益信息”对多保真模型进行辅助建模, 反而由于低保真样本的存在, 需要额外的高保真样本去弥补低保真样本带来的“负面效果”。

表5 保守停止准则下 ELF-BES方法失败情况统计  
Tab.5 Failure statistics of the ELF-BES method under the conservative stopping criterion

$C$	$r^2$	方法	失败次数	计算次数 $T_{MF}$
0.6	0.49	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	35.2(23.9+56.6×0.2)
0.8	0.35	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	35.6(24.3+56.3×0.2)
1.0	0.24	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	38.6(26.5+60.5×0.2)
1.2	0.17	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	38.2(26.0+60.9×0.2)
1.6	0.10	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	43.0(30.0+66.8×0.2)
2.0	0.09	ELF-BES( $\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.01$ )	0	48.4(33.2+76.1×0.2)

#### 4 BES策略的通用性验证分析

上文给出的 ELF-BES方法中, 对“有益效果”的评价是基于失效概率置信区间缩小来进行衡量的。事实上, 由 ELF-BES方法的定义可知, 任何有利于多保真 Kriging 模型建模效果提升的评价准则均可以作为“有益效果”的衡量标准。因此, 本节给出另一种新的“有益效果”评价标准来构建一种新的 ELF-BES方法, 以此来证明所提

ELF-BES方法较好的通用性。

考虑到 BSC-Believer方法作为目前较为先进的多保真模型结构可靠性方法, 它对待添加样本点的未来的“伪有益效果”主要是基于失效概率的最大相对预测误差缩小来判断样本点的更新位置(即 BSC准则), 为了方便后续对 ELF-BES方法与 BSC-Believer方法进行比较分析, 本节同样选择 BSC准则作为新的“有益效果”评价标准, 并构建一种新的 ELF-BES方法。同时, 为了方便区分上文提出的基于估计失效概率的置信边界缩小的 ELF-BES方法, 下文基于估计失效概率的置信边界缩小的 ELF-BES方法记为 ELF-BES1方法, 将基于失效概率最大相对预测误差缩小的 ELF-BES方法记为 ELF-BES2方法。BSC准则定义详见文献[8]。

ELF-BES2算法的停止准则与 ELF-BES1算法类似, 在基于失效概率最大相对预测误差的停止准则基础上, 利用连续迭代次数后失效概率的变化来检测失效概率估计的稳定特性用以补充完善 BSC准则。具体表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{p_i} \leq \epsilon_3 \\ \max \left( \frac{|\hat{P}_i^d - \hat{P}_i^{d-1}|}{\hat{P}_i^d}, \frac{|\hat{P}_i^{d-1} - \hat{P}_i^{d-2}|}{\hat{P}_i^{d-1}}, \frac{|\hat{P}_i^{d-2} - \hat{P}_i^{d-3}|}{\hat{P}_i^{d-2}} \right) \leq \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中:  $\epsilon_{p_i}$  为基于 BSC准则所得出的失效概率最大相对预测误差, 参考 BSC-Believer方法的停止阈值, ELF-BES2算法的停止阈值取  $\epsilon_2=0.01, \epsilon_3=0.02$ 。

为了验证 ELF-BES2算法的可行性和高效性, 分别对上文三个算例进行求解并与较为先进的 BSC-Believer算法进行比较, 各个算例的基本参数设置与上文保持一致, 求解结果见表6。可以看出, ELF-BES2与 ELF-BES1算法效率与精

表6 ELF-BES2对各算例的计算结果

Tab.6 Results of the ELF-BES2 for each example

算例	计算方法	计算次数 $T_{MF}$	$\hat{P}_i/10^{-2}$	$\epsilon_{p_i}/\%$
算例1	BSC-Believer	19.6 (12.6+35.0×0.2)	3.12	0.46
	ELF-BES1	19.7 (12.4+36.4×0.2)	3.12	0.83
	ELF-BES2	21.1 (13.8+36.4×0.2)	3.11	0.94
算例2	BSC-Believer	36.6 (24.7+119.3×0.1) Failed; 4 30	2.54	11.27
	ELF-BES1	40.0 (28.6+113.5×0.1)	2.86	1.59
	ELF-BES2	42.8 (31.3+114.9×0.1)	2.86	1.23

度接近,且均未出现计算失败的情况,证明了ELF-BES算法中,BES部分可以替换为其他有益于多保真模型建模效果提升的评价指标。

为了更好地展现各算法的收敛过程,同时更好地说明BSC-Believer算法在面对算例2时可能会计算失败的原因,以更好地说明ELF-BES的优越性,图11所示为BSC-Believer、ELF-BES1和ELF-BES2在某一次求解不同算例的相对误差和停止准则收敛曲线(本节所述“停止准则收敛曲线”特指“有益效果”评价准则所对应的停止准则)。同时,为了避免随机抽样对结果产生影响,三种算法在求解每一个算例时,均使用同样的样本池。结合图11a可知,三种算法对算例1均有较好的适用性,其中,BSC-Believer、ELF-BES1的收敛速度接近,ELF-BES2速度较慢,与表6的结果契合。

另外,BSC-Believer算法、ELF-BES1和ELF-BES2的共同点均是以逼近停止准则阈值作为“有益效果”来确定待添加样本点的更新位置,但由图11b可知,由于ELF-BES1和ELF-BES2算法是通过当前迭代步和上一迭代步的真实“有益效果”来确定下一迭代步样本点的更新位置,故这两种算法的停止准则收敛曲线整体上没有出现停止准则取值连续增大的情况(远离停止准则阈值,即出现“负有益效果”)。这是因为当出现“负有益效果”时,ELF-BES1和ELF-BES2算法在下一迭代步会选择高保真样本点,而由于高保真模型对多保真建模总是有益的,故下一迭代步会继续逼近停止准则阈值。BSC-Believer算法由于采取的是“伪有益效果”,当判断错误时,会连续出现“负有益效果”。如图11b中计算次数为15~19,停止准则取值出现了连续远离阈值的情况。

对于算例2,由图11c、图11d可知,由于算例2的低保真模型的保真度低于算例1,故BSC-Believer对样本点带来的“有益效果”更容易出现误判的情况,即相对误差在部分区间内计算收敛较慢,出现了局部聚集的情况,如图11c红色箭头所示,证明此处选择更新低保真样本点并不会对多保真Kriging模型建模产生较好的辅助效果,甚至可能造成建模失败,这也解释了BSC-Believer在算例2中出现计算失败的原因。

综合来看,对于算例1,ELF-BES1算法的收敛速度快于ELF-BES2算法,说明ELF-BES1算法相较于ELF-BES2算法更适用。而对于算例2,说明ELF-BES2算法相较于ELF-BES1算法

更适用,但整体上均优于先进的BSC-Believer算法。

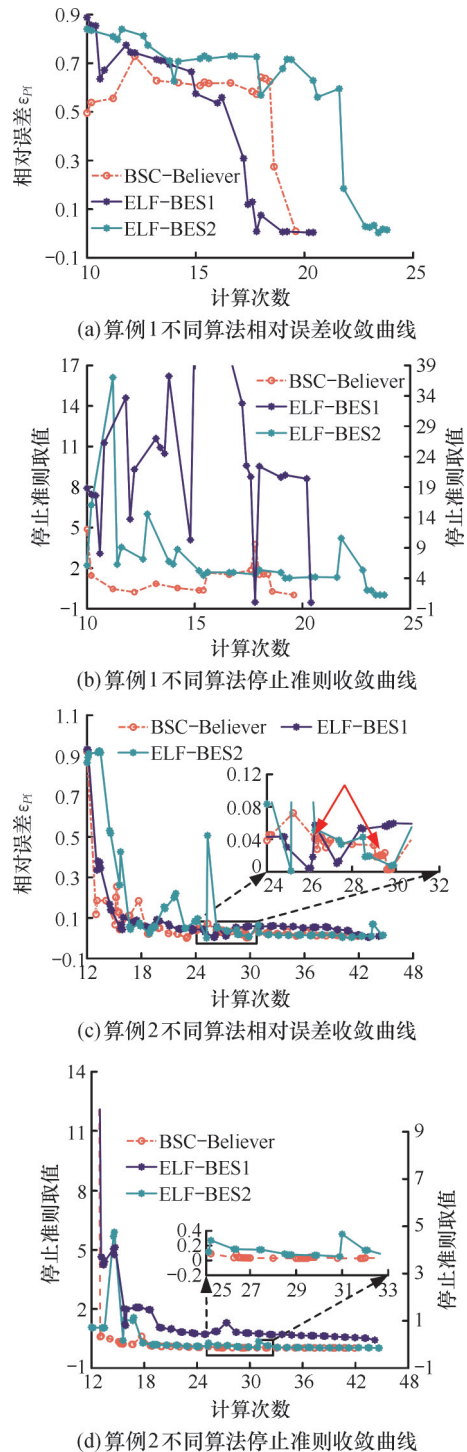


图11 不同算例下不同方法的相对误差和停止准则收敛曲线

Fig.11 Convergence curves of relative error and stopping criterion for different methods under different examples

## 5 工程实例验证

本节以某深水半潜式生产储油平台的浮筒板架结构为例,验证所提方法的工程应用价值。该

生产储油平台的船体部分由4个立柱和4个浮筒部分组成,其结构示意图见图12。其中,板架结构作为下部浮筒的主要组成结构形式,其结构可靠性在很大程度上也代表了平台整体结构的可靠性,因此,本节从浮筒板架结构单元出发,探讨随机不确定性对板架结构强度可靠性的影响。

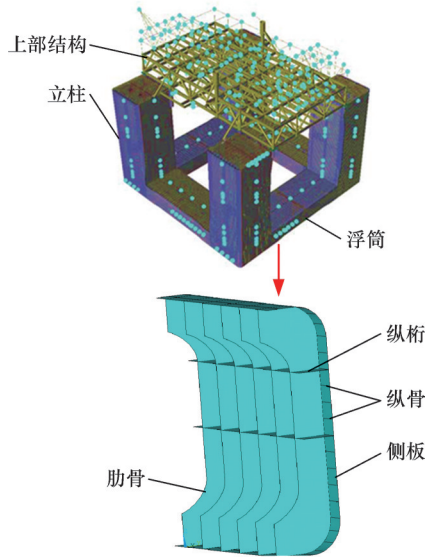


图12 某半潜式生产储油平台结构示意图  
Fig.12 Schematic structure of a semi-submersible production and storage platform

为节省计算资源,本节选取浮筒板架结构的一个单元来进行验证计算,有限元求解结果见图13,建立的三维模型如图13a所示。同时,由于浮筒一般位于水下,故下部浮筒的板架结构承受的主要载荷为静水压力与外部附属结构的反作用力(如立管悬挂系统)。本节取平台的设计水深为60 m,基于网格敏感性分析,对肋骨、纵桁、侧板按网格尺寸 $8 \times t$ ( $t$ 为厚度)进行划分,纵骨等间距划分12份。计算结果如图13b所示,可以看出该结构的最大应力发生在肋骨的倒角处,确定性条件最大应力 $\sigma_{eq} = 160.3 \text{ MPa}$ ,根据CCS发布的有关《海上移动平台入级规范》,板架结构的屈服校核应该满足 $\sigma_{eq} \leq \sigma_s / 1.43 = 251.7 \text{ MPa}$ ( $\sigma_s$ 为材料的屈服极限),因此,该结构在确定性条件下符合规定要求,见表7。

在本算例中,首先通过控制网格质量,构建了两种低保真计算模型,所建立的低保真模型如图13c、图13d所示,可以看出,低保真模型1的应力分布云图与计算结果与高保真模型图相近,其对应的相关系数 $r^2 = 0.97$ ,但低保真模型2的计算精度较差,应力云图也更加粗糙,其对应的相关系数 $r^2 = 0.92$ 。

本节基于板架结构的屈服校核,给出所研究

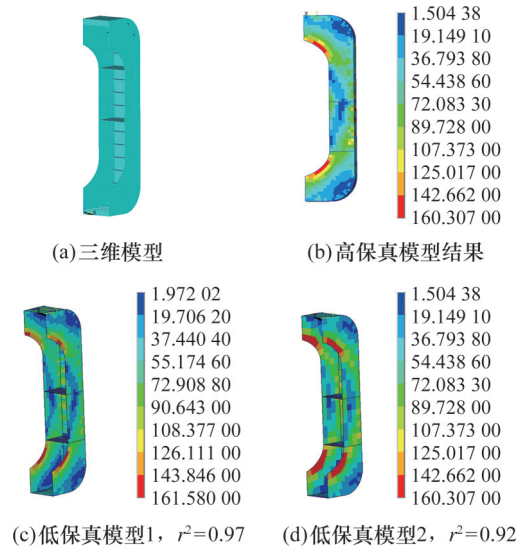


图13 有限元求解结果

Fig.13 Finite element solution results

表7 板架结构设计参数

Tab.7 Plate rack structure design parameters

参数类型	参数名称	参数取值
结构参数	纵骨间距 $l_1$ /mm	600
	肋骨间距 $l_2$ /mm	1460
	纵桁间距 $l_3$ /mm	2400
	倒角半径 $R$ /mm	1200
	侧板厚度 $t$ /mm	25
	纵桁厚度 $t_1$ /mm	20
	肋骨厚度 $t_2$ /mm	25
	纵骨长边尺寸/mm	260
	纵骨短边尺寸/mm	55
材料参数	泊松比	0.3
	弹性模量 $E$ /MPa	$2.06 \times 10^5$
	材料密度 $\rho$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$7.85 \times 10^4$
	屈服极限 $\sigma_s$ /MPa	360

结构的极限状态函数:

$$G(x) = 1 - \frac{1.43\sigma_{eq}}{R_{eH}} \quad (17)$$

其中,当 $\sigma_{eq} > \sigma_s / 1.43$ 时,则认为此时板架发生屈服,易产生塑性变形,被认为是不可靠的; $x$ 为服从正态分布的随机变量。

各随机变量的信息见表8。为了验证基于代理模型的结构可靠性分析方法的准确性,首先需要基于MCS获取较为准确的失效概率,本节抽取 $1 \times 10^5$ 个样本点用以MCS计算,计算结果为0.0413,此时变异系数为1.52%,小于5%,说明此时样本规模已足够,MCS计算结果可视为准确值。

在此示例中,基于不同计算模型的运行时间,本文近似假设 $c(h)/c(l_1) = 4$ , $c(h)/c(l_2) = 6$ ,所

表8 随机变量分布

Tab.8 Distribution of random variables

变量	分布类型	均值	标准差	截断区间
纵骨间距 $l_1/\text{mm}$	正态分布	600	20	[580, 620]
倒角半径 $R/\text{mm}$	正态分布	1200	60	[1150, 1250]
肋骨间距 $l_2/\text{mm}$	正态分布	1460	50	[1440, 1480]
侧板厚度 $t/\text{mm}$	正态分布	25	2	[22, 28]
肋骨厚度 $t_2/\text{mm}$	正态分布	25	2	[22, 28]
纵桁厚度 $t_1/\text{mm}$	正态分布	20	2	[18, 22]
弹性模量 $E/\text{MPa}$	正态分布	$2.06 \times 10^5$	$8.24 \times 10^3$	—

选择的初始高精度样本点为6, 初始低精度样本点为40/60个, 共计16个等效高保真样本点, 初始样本池  $\Theta$  规模为  $1 \times 10^5$ 。所有方法均计算30次并取其平均值作为最终结果。

图14和表9所示分别为各方法30次求解情

况的具体分布和30次求解的平均结果, 整体上看, 与单保真模型结构可靠性方法相比, ELF-BES与BSC-Believer方法(不包含计算失败情况)的计算效率较高, 其计算成本显著优于基于单保真Kriging模型的结构可靠性方法, 且精度较为接近, 同时, AMK-AEFF方法出现了计算失败, 主要表现为不能收敛且计算稳定后的失效概率相对误差大于50%, 说明基于高/低保真模型自相关函数的主动学习方法适用性较差。

具体而言, 在低保真模型1中, BSC-Believer方法出现了一次计算失败, 主要表现为未能正确识别低保真样本点对建模效果的提升效果, 导致一直添加低保真样本点, 但除计算失败的情况外, BSC-Believer方法整体的计算表现也较为优秀。

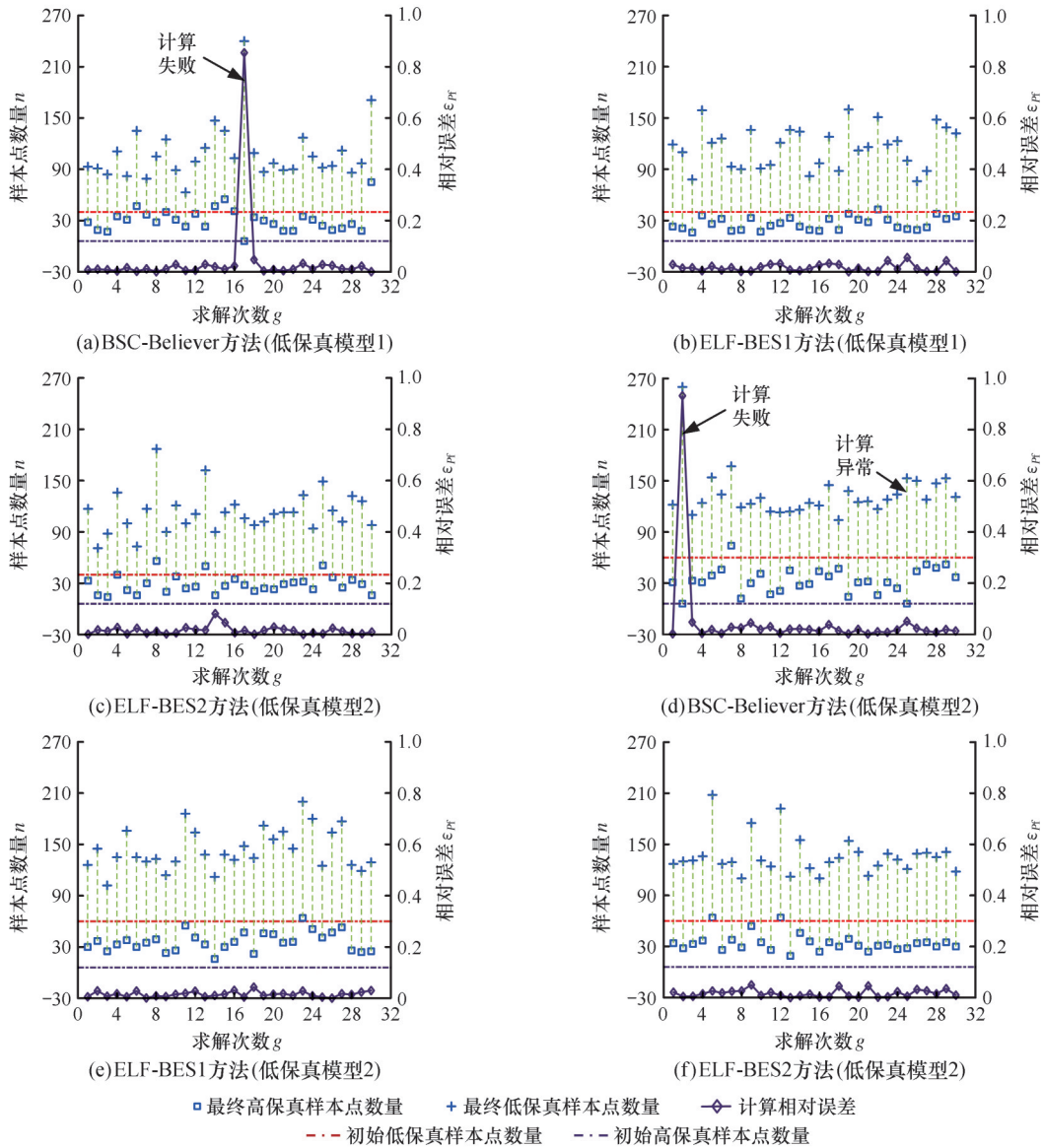


图14 不同方法30次计算结果

Fig.14 Results of 30 calculations with different methods

表9 多保真模型下各方法计算结果对比

Tab.9 Comparison of the calculation results of each method under the multi-fidelity model

	方法	计算次数 $T_{MF}$	$\hat{P}_f/10^{-2}$	$\epsilon_{P_f}/\%$
	MCS	100 000	4.13	-
	AK-U	16+417.8	4.12	0.98
	AK-EFF	16+91.3	4.12	1.13
	AK-RLCB	16+78.8	4.11	1.61
	AK-ERF	16+134.3	4.13	1.61
低保真模型1	AMK-AEFF	Failed(不收敛)	-	-
	BSC-Believer	57.8(30.7+108.4/4) Failed:1 30	4.01	4.22
	ELF-BES1	55.4(26.5+115.6/4)	4.10	1.62
	ELF-BES2	57.1(28.9+113/4)	4.13	1.60
低保真模型2	AMK-AEFF	Failed(不收敛)	-	-
	BSC-Believer	55.6(33.3+134.1/6) Failed:1 30	4.21	4.92
	ELF-BES1	60.3(36.3+144.2/6)	4.14	1.56
	ELF-BES2	57.1(34.5+136/6)	4.12	1.68

在低保真模型2中,BSC-Believer方法同样出现了一次计算失败,同时,需要注意的是,该方法在第25次出现了一次计算异常,即一直添加低保真样本点,虽然此次计算的误差相对较小,但是此类计算情况被认为是“不健康”的,容易造成计算失败。同时,在ELF-BES方法中,添加高保真样本点的数量高于低保真模型1中计算结果,这主要是由于低保真模型2的保真度低于低保真模型1,所能提供的辅助建模效果也更差,此时更需要添加高保真样本点完成建模。

## 6 结论

1)通过数值算例与目前先进的单保真Kriging模型结构可靠性分析方法和多保真Kriging模型方法相比较,计算结果表明,所提ELF-BES方法对不同复杂度的结构可靠性问题具有较好的适用性,能够有效地降低计算成本,其计算效率优于较为先进的AMK-AEFF方法等,与BSC-Believer方法接近,但BSC-Believer方法容易受到模型保真度的影响,尤其对于复杂问题,容易出现计算失败。

2)为了进一步探究模型保真度对计算结果的影响,证明ELF-BES方法的稳健性,通过对不同低保真度模型进行比较计算,计算结果表明,BSC-Believer方法受模型保真度影响较大,易出现计算失败,而ELF-BES方法受模型保真度的影响较小,即使对于较低保真度的模型,ELF-BES方法仍可通过调整停止准则阈值来提高计算成功率和结果的准确性。

3)以某深水半潜式生产储油平台的浮筒板架结构为例,验证所提方法的工程应用价值,通过构造不同网格质量下板架结构有限元计算模型作为多保真模型进行验证计算。计算结果表明,所提方法能够实现对实际工程问题的高效求解,与较为先进的基于高保真Kriging模型的结构可靠性分析方法计算结果相比,能节约计算次数约30次。与AMK-AEFF、BSC-Believer等方法相比,未出现计算失败,而AMK-AEFF方法计算的适用性较差,无法对该问题实现高效求解,BSC-Believer方法虽然整体的计算效果较好,计算精度与效率与所提ELF-BES方法相近,但出现了计算失败的情况,结合两个算例和工程实例计算结果,在实际应用时,ELF-BES方法相比已有方法优势更为明显,能够同时兼顾计算效率、计算精度与计算结果的稳健性。

## 参考文献:

- [1] 宋海征,周长聪,李磊,等.一种基于AK-MCS-K的失效概率函数估计方法[J].中国机械工程,2024,35(5):784-791.  
SONG Haizheng, ZHOU Changcong, LI Lei, et al. An Estimation Method of Failure Probability Function Based on AK-MCS-K[J]. China Mechanical Engineering, 2024, 35(5): 784-791.
- [2] 杨旭峰,程鑫,刘泽清.一种融合交叉熵自适应抽样与ALK模型的可靠性分析方法[J].机械工程学报,2024,60(16):73-82.  
YANG Xufeng, CHENG Xin, LIU Zeqing. Reliability Analysis Method Combining Cross-entropy Adaptive Sampling and ALK Model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(16): 73-82.
- [3] CHEN Zequan, HE Jialong, LI Guofa, et al. Fast Convergence Strategy for Adaptive Structural Reliability Analysis Based on Kriging Believer Criterion and Importance Sampling[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 242: 109730.
- [4] BICHON B J, ELDRED M S, SWILER L P, et al. Efficient Global Reliability Analysis for Nonlinear Implicit Performance Functions[J]. AIAA Journal, 2008, 46(10): 2459-2468.
- [5] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an Active Learning Reliability Method Combining Kriging and Monte Carlo Simulation[J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154.
- [6] ZHANG Xufang, WANG Lei, SØRENSEN J D. REIF: a Novel Active-learning Function Toward Adaptive Kriging Surrogate Models for Structural Reliability Analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 185: 440-454.
- [7] YANG Xufeng, LIU Yongshou, ZHANG Yishang, et al. Probability and Convex Set Hybrid Reliability Analysis Based on Active Learning Kriging Model[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(14): 3954-3971.
- [8] YI Jiexiang, ZHOU Qi, CHENG Yuansheng, et al. Efficient Adaptive Kriging-based Reliability Analysis Combining New Learning Function and Error-based Stopping Crite-

- rion [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(5): 2517-2536.
- [9] LU Ning, LI Yanfeng, HUANG Hongzhong, et al. AGP-MCS+D: an Active Learning Reliability Analysis Method Combining Dependent Gaussian Process and Monte Carlo Simulation [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 240: 109541.
- [10] MENG Yuan, ZHANG Dequan, SHI Baojun, et al. An Active Learning Kriging Model with Approximating Parallel Strategy for Structural Reliability Analysis [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, 247: 110098.
- [11] HONG Linxiong, SHANG Bin, LI Shizheng, et al. Portfolio Allocation Strategy for Active Learning Kriging-based Structural Reliability Analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 412: 116066.
- [12] SHANG Xiaobing, SU Li, FANG Hai, et al. An Efficient Multi-fidelity Kriging Surrogate Model-based Method for Global Sensitivity Analysis [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 229: 108858.
- [13] WU Xiaojing, ZUO Zijun, MA Long, et al. Multi-fidelity Neural Network-based Aerodynamic Optimization Framework for Propeller Design in Electric Aircraft [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2024, 146: 108963.
- [14] GENG Xin, LIU Peiqing, HU Tianxiang, et al. Multi-fidelity Optimization of a Quiet Propeller Based on Deep Deterministic Policy Gradient and Transfer Learning [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2023, 137: 108288.
- [15] LI Zhihui, MONTOMOLI F. Aleatory Uncertainty Quantification Based on Multi-fidelity Deep Neural Networks [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, 245: 109975.
- [16] DESAI A S, N N, ADHIKARI S, et al. Enhanced Multi-fidelity Modeling for Digital Twin and Uncertainty Quantification [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, 74: 103525.
- [17] YI Jiexiang, WU Fangliang, ZHOU Qi, et al. An Active-learning Method Based on Multi-fidelity Kriging Model for Structural Reliability Analysis [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(1): 173-195.
- [18] LU Ning, LI Yanfeng, MI Jinhua, et al. AMFGP: an Active Learning Reliability Analysis Method Based on Multi-fidelity Gaussian Process Surrogate Model [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, 246: 110020.
- [19] YI Jiexiang, CHENG Yuansheng, LIU Jun. A Novel Fidelity Selection Strategy-guided Multifidelity Kriging Algorithm for Structural Reliability Analysis [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2022, 219(C): 108247. 1-108247. 14.
- [20] ZHANG Chi, SONG Chaolin, SHAFIEEZADEH A. Adaptive Reliability Analysis for Multi-fidelity Models Using a Collective Learning Strategy [J]. *Structural Safety*, 2022, 94: 102141.
- [21] WANG Jinsheng, XU Guoji, YUAN Peng, et al. An Efficient and Versatile Kriging-based Active Learning Method for Structural Reliability Analysis [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, 241: 109670.
- [22] LV Zhaoyan, LU Zhenzhou, WANG Pan. A New Learning Function for Kriging and Its Applications to Solve Reliability Problems in Engineering [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2015, 70(5): 1182-1197.
- [23] ZHANG Chi, WANG Zeyu, SHAFIEEZADEH A. Error Quantification and Control for Adaptive Kriging-based Reliability Updating with Equality Information [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 207: 107323.
- [24] GISELLE FERNÁNDEZ-GODINO M, PARK C, KIM N H, et al. Issues in Deciding Whether to Use Multifidelity Surrogates [J]. *AIAA Journal*, 2019, 57(5): 2039-2054.
- [25] MARELLI S, SUDRET B. An Active-learning Algorithm that Combines Sparse Polynomial Chaos Expansions and Bootstrap for Structural Reliability Analysis [J]. *Structural Safety*, 2018, 75: 67-74.
- [26] 高进, 崔海冰, 樊涛, 等. 一种基于自适应 Kriging 集成模型的结构可靠性分析方法 [J]. *中国机械工程*, 2024, 35(1): 83-92.
- GAO Jin, CUI Haibing, FAN Tao, et al. A Structural Reliability Analysis Method Based on Adaptive Kriging Integrated Model [J]. *China Mechanical Engineering*, 2024, 35(1): 83-92.
- [27] WANG Yanjin, PAN Hao, SHI Yina, et al. A New Active-learning Estimation Method for the Failure Probability of Structural Reliability Based on Kriging Model and Simple Penalty Function [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 410: 116035.
- [28] TOAL D J J. Some Considerations Regarding the Use of Multi-fidelity Kriging in the Construction of Surrogate Models [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(6): 1223-1245.

(编辑 陈勇)

作者简介: 杜尊峰\*(通信作者),男,1984年生,教授、博士研究生导师。研究方向为结构可靠性分析、结构损伤评估。E-mail: dzf@tju.edu.cn。

#### 本文引用格式:

杜尊峰,樊涛,姜登耀. 一种面向多保真 Kriging 模型结构可靠性分析的主动学习方法 [J]. *中国机械工程*, 2026, 37(2): 428-441.

DU Zunfeng, FAN Tao, JIANG Dengyao. A New Active Learning Method for Structural Reliability Analysis of Multi-fidelity Kriging Models [J]. *China Mechanical Engineering*, 2026, 37(2): 428-441.