

# 避免局部自由度求解的多模式机构抖动判定方法研究

谢宇航<sup>1</sup> 杭鲁滨<sup>1\*</sup> 康开东<sup>1</sup> 黄晓波<sup>1</sup> 迟永琳<sup>2</sup>

1.上海工程技术大学机械与汽车工程学院,上海,201620

2.上海平衡木科技有限公司,上海,201900

**摘要:**机构抖动发生在不同自由度运动分支相交的过渡构形处,是导致机构可控性和运动稳定性差的关键因素,其判定至关重要。提出机构运动奇异抖动判定条件:当运动学方程组约束理想为根理想,或约束理想素分解的实维数与复维数不同时,如果方程组存在高阶切锥且高阶切锥不同维切空间交点存在实数解,则机构为运动奇异抖动机构。结合运动不奇异抖动条件梳理了机构抖动类型,以多项式理想结合微分切锥理论,提出避免局部自由度求解的机构抖动统一通用判定方法和算法。算法判定了多模式7R机构为运动奇异抖动机构,对机构两驱动电机进行使能及失能操作,使机构运动模式切换平稳,避免机构抖动影响;将满足尺度约束类型的7R机构嵌入汽车门锁,机构模式切换实现了电动吸合、辅助开启功能。

**关键词:**机构抖动;高阶切锥;运动奇异抖动;多模式机构;汽车门锁

**中图分类号:**TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.03.006

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Research on Judgment Methods for Multi-mode Mechanism Shakiness to Avoid Local Degrees of Freedom Solution

XIE Yuhang<sup>1</sup> HANG Lubin<sup>1\*</sup> KANG Kaidong<sup>1</sup> HUANG Xiaobo<sup>1</sup> CHI Yonglin<sup>2</sup>

1.School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai, 201620

2.Shanghai Balance Wood Technology Co., Ltd., Shanghai, 201900

**Abstract:** Mechanism shakiness occurred in the transition configuration where the motion branches of different degrees of freedom intersect, which was the key factor causing the poor controllability and motion stability of the mechanisms, and the judgment was crucial. The conditions for determining the kinematic singular shakiness of the mechanisms were presented. When the constraint ideal of the kinematic loop equations of the mechanisms was radical ideal or the real dimension of solution was different from the complex dimension after the decomposition of the constraint ideal, if there were higher-order tangent cones and the intersection of the different dimensional tangent spaces of the higher-order tangent cones existed real solutions, the mechanism was a kinematic singular shakiness mechanism. Combined with the kinematic non-singular shakiness conditions, shakiness types of the mechanisms were summarized. Based on the polynomial ideal and differential tangent cone theory, a unified and general judgment method and algorithm for mechanism shakiness were proposed to avoid local degrees of freedom solution. According to the algorithm, the multi-mode 7R mechanisms were judged to be kinematic singular shakiness mechanisms. The two actuation motors of the mechanisms were enabled and disabled to make the mechanism motion mode switch smoothly and avoid the influences of mechanism shakiness. The 7R mechanism satisfying the scale constraint type was embedded into vehicle latch, and realized electric cinch and auxiliary opening function by mode switching.

**Key words:** mechanism shakiness; high-order tangent cone; kinematic singular shakiness; multi-mode mechanism; vehicle latch

### 0 引言

机构抖动可能导致机构运动突变、稳定性和可控性差,抖动构型为多运动模式机构(简称多模

式机构)不同自由度运动分支的过渡构形处。

多模式机构广泛应用于交通领域,可实现狭窄空间内多功能多工况需求,其免装配运动模式切换主要有两种类型:一种是通过奇异位形进行机构模式切换;另一种是围绕尖点,避开奇异位形的机构运动路径,实现模式切换。KONG等<sup>[1]</sup>研究了变自由度多模式机构,通过过渡构形实现免

收稿日期:2025-03-18

基金项目:国家自然科学基金(51475050);上海汽车工业科技发展基金(1617)

装配运动模式切换,各模式构形自由度有可能不同。WENGER等<sup>[2-3]</sup>、SALUNKHE等<sup>[4]</sup>提出尖点为机构运动学方程组特征多项式三重根,证明了串、并联机器人尖点存在条件,并根据机构关节空间及关节空间切片,给出不经过奇异位形进行构形切换的运动路径规划;ZEIN等<sup>[5]</sup>研究了一类3-RPR并联机器人环绕尖点无需经历奇异位形实现装配模式切换问题。

对于机构在模式切换过渡构形处变自由度的抖动现象,相关研究主要分两类方法:一类基于机构变拓扑、变尺度特征,另一类基于运动学微分切锥。WOHLHART<sup>[6]</sup>讨论了机构变拓扑、变尺度特征时变自由度机构,而机构模式切换的过渡构形有些存在变拓扑、变尺度特征抖动。WHITNEY<sup>[7]</sup>研究了代数簇的解析切空间并给出了切锥定义。LERBET<sup>[8]</sup>提出机构的构形空间由代数簇表示,首次在机构学中使用李代数结合切锥理论研究机构运动分支及构形。MÜLLER<sup>[9-11]</sup>给出了连杆低副机构的螺旋表示的高阶运动学统一分析方法,以李括号运算给出了高阶微分递推公式及其简洁形式,研究了 $K$ 阶速度偏微分切锥约束方程及 $K$ 阶切锥交点。MÜLLER<sup>[12]</sup>基于运动学构形空间高阶切锥,结合高阶切锥微分自由度和局部自由度关系,提出了机构抖动定义及较系统的判定方法。当机构运动学方程组存在高阶切锥且微分自由度大于局部自由度时,机构为运动奇异抖动机构。但有时局部自由度难以求解,导致机构抖动难以判定。当机构不可动时,Müller通过运动学方程组存在高阶切锥且运动学构形空间复数解维数大于实数解维数的条件,判定机构为运动不奇异抖动机构<sup>[13]</sup>,在判定时仍需局部自由度求解进行验证。LI等<sup>[14]</sup>提出无需局部自由度求解的运动非奇异抖动判定方法,将含冗余变量的排除增根方程嵌入机构运动学方程组,给出了机构不奇异抖动判定条件:当方程组消去冗余变量得到约束理想不为根理想且方程组的实数解维数等于复数解维数时,则为运动不奇异抖动。

如何避免局部自由度求解,给出机构抖动更普遍的判定方法,更精准地发现多模式机构可能出现的抖动值得研究。

多模式机构的应用推动了高端汽车门锁吸合机构的多工况多功能实现。钟传磊<sup>[15]</sup>通过V形槽协同切换电动吸合和辅助开启支链运动,吸合电机带动自适应推杆作用在棘轮产生吸合力矩,辅助开启支链串联V形槽,推杆在V形槽内运动实现辅助开启优先功能。殷传硕等<sup>[16]</sup>提出双凸轮

轮廓型面设计,实现电动吸合与开启支链协同操作。所构造的双凸轮单摆杆柔顺组合机构,结合弹簧构件实现与摆动推杆运动兼容,具有柔顺滚滑、刚性拨动、避让复位多种运动模式。钟传磊等<sup>[17]</sup>基于新型柔顺副构造了用于汽车门锁的多模式空间柔顺机构,以李雅普诺夫指数作为机构动力学系统稳定性指标,采用Wolf法求解最大李雅普诺夫指数,从而确定最优柔顺副刚度,保证了机构在锁内运动稳定性,方法主要聚焦于整周稳定性研究。目前尚未发现从机构抖动引起运动不可控的视角研究多模式机构实际应用中的抖动现象及避免措施的文献报道。

本文根据多项式理想和微分切锥理论梳理了抖动类型,提出了避免局部自由度计算的机构抖动统一判定方法和算法。以具有1和2自由度两种运动模式的7R机构为例,通过对偶四元数建立运动学回路方程组,嵌入排除增根方程,消去冗余变元得到约束理想,判定约束理想为根理想;利用李括号运算求解高阶切锥,其二阶切锥一维和二维切空间的约束解交点求解存在实数解;判定机构运动奇异抖动发生在1自由度与2自由度运动分支相交的过渡构形处。为消除抖动对机构运动的影响,驱动两个关节可实现模式切换可控。将该机构嵌入锁内实现电动吸合和辅助开启功能。

## 1 机构运动不奇异抖动和运动奇异抖动判定

机构抖动主要有两类:运动奇异抖动和运动不奇异抖动。其判定方法一种是对偶四元数建立运动学回路方程组,经过嵌入排除增根方程,消去冗余变元得到约束理想,通过约束理想不为根理想以求解实复维数来进行判定;另一种是通过速度约束方程,经过李括号计算求解高阶切锥进行判定。

### 1.1 基于对偶四元数约束理想的运动不奇异抖动判定

对偶四元数为四元数和对偶数的组合,其形式如下:

$$h = e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k + \epsilon(g_0 + g_1 i + g_2 j + g_3 k) \quad (1)$$

$n$ 个转动关节构成的单回路机构对应 $n$ 个表示绕旋转轴刚体变换的对偶四元数。单回路机构回路方程为

$$F = (1 - t_1 h_1)(1 - t_2 h_2) \cdots (1 - t_i h_i) \cdots (1 - t_n h_n) \quad (2)$$

式中: $t_i$ 为关节转角参数, $t_i = \tan(\theta_i/2)$ 。

将式(2)展开表示为对偶四元数形式,由方程两边对偶四元数8项系数对应相等可得

$$\left. \begin{aligned} e_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 1 & \quad e_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ e_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad e_3(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ g_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad g_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ g_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad g_3(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为排除方程组增根  $t_i = \pm i$  ( $i$ 为虚数单位), 将等式  $(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1) \dots (t_n^2 + 1)v - 1 = 0$  嵌入式(3)。另外对偶四元数为单位对偶四元数时, 根据 Study 条件<sup>[18-19]</sup>, 方程  $g_0$  是冗余的, 方程组可改写为排除增根的约束方程组:

$$\left. \begin{aligned} e_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad e_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ e_3(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad g_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ g_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 & \quad g_3(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ (t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1) \dots (t_n^2 + 1)v - 1 = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

运动不奇异抖动可由式(4)通过以下步骤进行判定:

1) 排除增根<sup>[20]</sup>。以过渡构形处轴线方位建立具有排除增根方程的约束方程组(式(4)), 对该方程组进行参变量  $v$  消元求 Groebner 基, 得到无增根的多项式理想, 称为约束理想。可使用数学计算软件 Maple 中的 EliminationIdeal 命令, 对式(4)消去参变元  $v$  得到该约束理想。

2) 消除根重数的影响<sup>[20]</sup>。方程组的根具有重数时, 将增加 Groebner 基求解过程中 S-多项式约化的复杂度, 可能引发系统爆炸。根理想通过取根运算消去幂次, 排除了根重数影响, 可使用 Maple 软件 isRadical 命令判断约束理想是否为根理想。

3) 运动不奇异抖动判断。若约束理想不是根理想, 则使用 Maple 软件 decomposition 命令对约束理想进行素分解, 进一步, 如果约束理想素分解后实解维数与复解维数相同, 则可判断为运动不奇异抖动。

### 1.2 基于高阶切锥和切空间约束交点实数解的运动奇异抖动判定

当机构运动学回路方程组的约束理想为根理想或约束理想分解后实维数与复维数不同时, 进行机构过渡构形处求解速度约束, 李括号运算求解高阶微分约束, 联立高阶微分求解高阶切锥及高阶切锥切空间实交点等, 避免局部自由度求解, 进行运动奇异抖动判定。

#### 1.2.1 速度约束和李括号运算

机构过渡构形第  $i$  个关节轴的 Plücker 坐标为

$$S_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{e}_i + h_i \boldsymbol{e}_i \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{e}_i$  为沿第  $i$  个关节轴的单位向量;  $\boldsymbol{p}_i$  为到该轴上一点的位置向量。

由 Plücker 坐标与关节速度得到速度约束方程:

$$\dot{q}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} + \dot{q}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_2(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} + \dots + \dot{q}_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_n(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

式中:  $\boldsymbol{q}$  为关节变向量,  $\dot{\boldsymbol{q}}$  为关节变向量对时间求导的向量,  $\dot{q}_i, \dot{q}_j$  为  $\dot{\boldsymbol{q}}$  的分量。

将速度约束方程简写为

$$S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{i=1}^n S_i(\boldsymbol{q}) \dot{q}_i = 0 \quad (7)$$

对速度约束求导:

$$S_n^{(2)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{d}{dt} S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{i=1}^n S_i(\boldsymbol{q}) \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\partial S_i}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (8)$$

式(8)等号右边第二项对瞬时旋转轴的偏导数由李括号运算, 表示为<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_j} = [S_j(\boldsymbol{q}), S_i(\boldsymbol{q})] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_j \times \boldsymbol{w}_i \\ \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{w}_j \times \boldsymbol{v}_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

第  $m$  阶微分约束表示为<sup>[9]</sup>

$$S_n^{(m)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dots, \boldsymbol{q}^{(m)}) = \frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}} S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (10)$$

高阶微分约束以式(9)进行李括号运算迭代求解。

#### 1.2.2 高阶切锥计算

对于给定构形, 高阶约束为瞬时旋转轴对时间  $t$  的高阶导多项式集合, 各阶约束表示如下:

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ H^{(2)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) &= \frac{d}{dt} S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ &\vdots \\ H^{(m)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dots, \boldsymbol{q}^{(i)}) &= \frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}} S_n^{(1)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当方程组存在对  $x$  的  $i$  阶  $n$  维实数导时, 机构切锥为各阶微分约束联立方程组, 求解各阶切锥,  $m$  阶切锥  $K_q^{(m)}$  表示为

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) &= 0 \\ H^{(2)}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= 0 \\ &\vdots \\ H^{(m)}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\boldsymbol{x} \in \exists \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \dots \in \mathbb{R}^n$

式中:  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \dots$  分别代表  $\boldsymbol{q}$  的一阶、二阶、三阶等各阶导数。

各阶切锥满足:

$$K_q^{(m)} \subset \dots \subset K_q^{(2)} \subset K_q^{(1)} \quad (13)$$

$m$  阶切锥  $K_q^{(m)}$  是各维切空间  $K_q^{(m,1)}, K_q^{(m,2)}, K_q^{(m,2)}, \dots, K_q^{(m,u_m)}$  约束解的集合;  $m$  阶切锥  $K_q^{(m)}$  各维切空间约束解中, 如满足其中两切空间约束解存在实公共解, 则存在实交点, 即

$$K_q^{(i,u_i)} = K_q^{(j,u_j)}, \quad u_i \neq u_j \quad (14)$$

若不同维切空间约束中两个分支存在实交

点,则表明多模式机构在模式过渡构形处存在可切换的不同运动分支<sup>[21]</sup>;切空间约束解不同维数对应机构不同自由度运动模式,在过渡构形处存在变自由度切换的运动奇异抖动现象。

**1.3 机构抖动判定条件和流程**

根据上文可知,如何避免局部自由度求解是给出机构抖动统一通用判定方法的关键。

运动不奇异抖动机构判定条件为:当机构运动学回路方程组的约束理想不为根理想且素分解后多项式理想解的实解维数等于复数解维数时,那么机构为运动不奇异抖动机构。其内在特征是在不可动机构分支的孤立零点解处发生运动不奇异抖动,避免了求解局部自由度判断。

借鉴文献[14]求解方程组解空间来避免局部自由度求解,本文运动奇异抖动的判定条件为:当机构运动学回路方程组的约束理想为根理想或约束理想分解后实维数与复维数不同时,如果存在高阶切锥(阶数不小于2)且高阶切锥不同维切空间交点存在实数解(即实交点),那么机构为运动奇异抖动机构。

本文基于多项式理想和高阶微分切锥方法提出了运动奇异抖动判定条件,结合运动不奇异抖动判定条件提出了无需局部自由度求解、统一通用的机构抖动判定方法和条件,其判定方法框图和算法步骤如图1所示。

判定方法和求解步骤的内在特征是无需局部自由度求解的依据,分析如下:当存在阶数大于等于2的高阶切锥时,机构高阶切锥存在不同维切空间约束解,当不同维切空间约束解存在实交点时即存在可切换运动分支的过渡构形,切空间约束解不同维数对应机构运动模式不同自由度,因此,运动奇异抖动无需求解局部自由度进行判定。

**2 多模式7R机构抖动分析**

以多模式7R机构为例,基于对偶四元数得到运动学方程组,排除增根得到约束理想,由机构过渡构形处各轴Plücker坐标给出多模式7R机构速度约束方程,进一步计算高阶切锥并对该机构进行抖动分析。

**2.1 多模式7R机构运动学约束理想求解**

多模式7R机构各关节位置如图2所示。

过渡构形处各关节轴的Plücker坐标为

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (0, 0, 1; 110, 0, 0)^T & S_2 &= (0, 0, 1; 110, -40, 0)^T \\
 S_3 &= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}; 30\sqrt{3}, -20\sqrt{3}, 30\right)^T \\
 S_4 &= (0, 0, 1; 0, -40, 0)^T & S_5 &= (0, 0, 1; -10, 5, 0)^T \\
 S_6 &= (0, 0, 1; 25, 0, 0)^T & S_7 &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}; 30\sqrt{3}, 0, 30\right)^T
 \end{aligned}$$

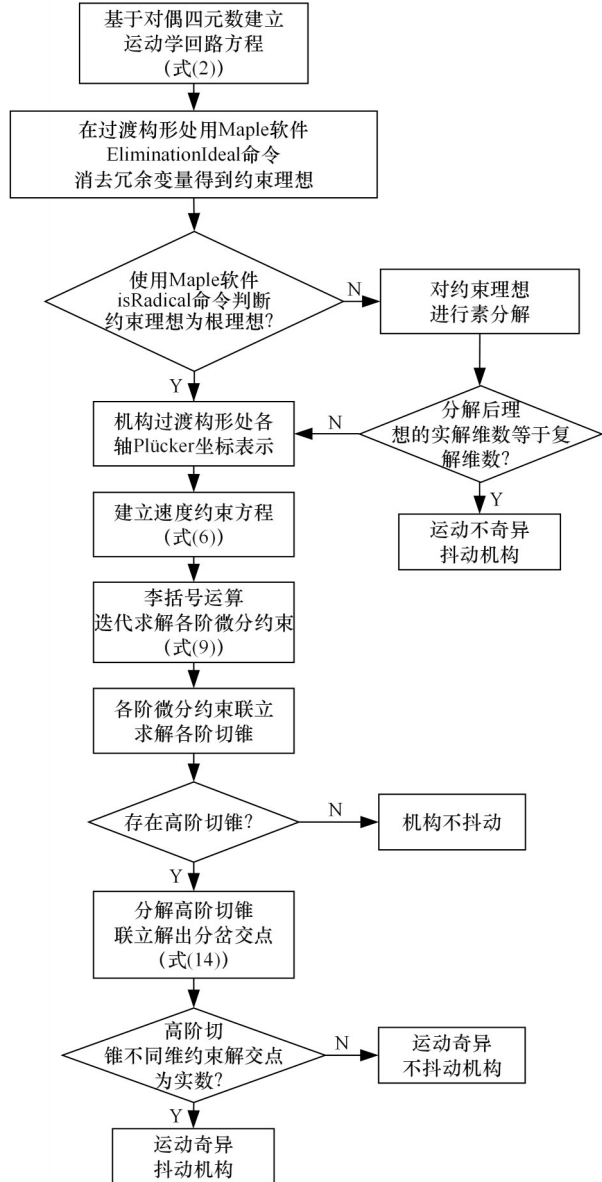


图1 机构抖动判定方法流程图

Fig.1 Flow chart of mechanism shakiness judgment method

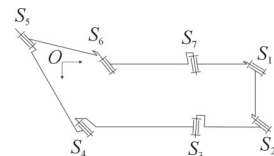


图2 多模式7R机构各关节位置

Fig.2 Joint position of multi-mode 7R mechanism

当对偶四元数原始部实部等于0时,将各关节轴Plücker坐标映射到对偶四元数:

$$h = s_{i1}i + s_{i2}j + s_{i3}k + \epsilon(s_{i4}i + s_{i5}j + s_{i6}k)$$

式中:  $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{i6}$  为Plücker坐标。

多模式7R机构由Plücker坐标映射到对偶四元数表示的刚体变换为

$$\begin{aligned}
 h_1 &= k + \epsilon 110i & h_2 &= k + \epsilon(110i - 40j) \\
 h_3 &= -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}k + \epsilon(30\sqrt{3}i - 20\sqrt{3}j + 30k)
 \end{aligned}$$

$$h_4 = k - 40\epsilon j \quad h_5 = k + \epsilon(-10i + 5j)$$

$$h_6 = k + \epsilon 25i \quad h_7 = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}k + \epsilon(30\sqrt{3}i + 30k)$$

对偶四元数运动学回路方程组等式两边各项系数对应相等,结合排除增根方程,根据式(4)求得由7个方程组成的方程组:

$$a_{1,1}t_1t_2t_7 + a_{1,2}t_1t_4t_7 + \dots + a_{1,40}t_3t_4t_5t_6t_7 = 0$$

$$a_{2,1}t_1t_3 + a_{2,2}t_2t_3 + \dots + a_{2,40}t_1t_2t_4t_5t_6t_7 = 0$$

$$a_{3,1}t_1t_6t_7 + a_{3,2}t_2t_4t_7 + \dots + a_{3,64}t_2t_4t_5t_6t_7 = 0$$

$$a_{4,1}t_1t_2t_3 + a_{4,2}t_1t_6t_7 + \dots + a_{4,118}t_1t_2t_3t_4t_5t_7 = 0$$

$$a_{5,1}t_4t_6t_7 + a_{5,2}t_4t_5t_7 + \dots + a_{5,116}t_1t_2t_3t_4t_5t_7 = 0$$

$$a_{6,1}t_3t_4t_5 + a_{6,2}t_3t_4t_7 + \dots + a_{6,80}t_1t_2t_3t_4t_6t_7 = 0$$

$$(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)(t_3^2 + 1)(t_4^2 + 1)(t_5^2 + 1) \cdot (t_6^2 + 1)(t_7^2 + 1)v - 1 = 0$$

式中:  $a_{i,j}$  为约束方程组各项系数。

使用数学计算软件 Maple 中的 Elimination-Ideal 命令对约束方程组消去参变元  $v$  得到含 58 个多项式的多模式 7R 机构约束理想  $I_{\text{deal}} = \langle f_1, f_2, \dots, f_{58} \rangle$ , 其计算结果为

$$I_{\text{deal}} = \langle t_3^2 + t_7^2, -t_3t_1 + t_7t_1 - t_3t_2 + t_7t_2, 3t_1t_3^2 - 17t_1t_3 - 17t_2t_3 + 2t_3 + 2t_7 + 3t_2t_3^2, 6t_1^2t_2t_3 + 6t_1t_2^2t_3 - 17t_1^2t_3 - 34t_1t_2t_3 - 17t_2^2t_3 - 2t_1t_3 - 2t_2t_3, -3t_1^2t_3 + 3t_1^2t_7 - 6t_1t_2t_3 + 17t_1t_3 + 17t_2t_3 + t_3 + t_7, 18t_1^2t_3^2 - 102t_1^2t_3 - 102t_1t_2t_3 + 289t_1t_3 + 24t_1t_7 + 289t_2t_3 + 6t_3^2 - 34t_3 - 34t_7, \dots \rangle$$

使用 Maple 软件的 isRadical 命令判断约束理想  $I_{\text{deal}}$  是否为根理想,其输出结果为 true, 得出该多模式 7R 机构的约束理想为根理想,需进一步切锥计算来判定是否运动奇异抖动。

### 2.2 多模式 7R 机构运动奇异抖动分析

由式(7)得到一阶速度约束方程:

$$S_1(q)\dot{q}_1 + S_2(q)\dot{q}_2 + S_3(q)\dot{q}_3 + S_4(q)\dot{q}_4 + S_5(q)\dot{q}_5 + S_6(q)\dot{q}_6 + S_7(q)\dot{q}_7 = 0$$

由式(9)根据李括号运算对上式求解二阶导出:

$$\sum_{i=1}^7 S_i(q)\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j>i}^7 [S_i, S_j]\dot{q}_i\dot{q}_j = 0$$

为方便运算直观简洁,用变量  $x$  替代变量  $\dot{q}$ , 变量  $y$  替代变量  $\ddot{q}$ 。经李括号运算由式(12)求解切锥  $K_0^{(1)}$ 、 $K_0^{(2)}$ , 其结果如下:

一阶切锥  $K_0^{(1)}$  的解为

$$x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_7 = 0$$

$$22x_1 + 22x_2 + 6\sqrt{3}x_3 - 2x_5 + 5x_6 + 6\sqrt{3}x_7 = 0$$

$$8x_2 + 4\sqrt{3}x_3 + 8x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 + x_7 = 0$$

二阶切锥  $K_0^{(2)}$  的解为

$$y_3 + y_7 = 0$$

$$-x_1x_3 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 - x_4x_7 - x_5x_7 - x_6x_7 = 0$$

$$y_1 + y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_7 = 0$$

$$22y_1 + 22y_2 + 6\sqrt{3}y_3 - 2y_5 + 5y_6 + 6\sqrt{3}y_7 + 4\sqrt{3}x_1x_3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}x_3x_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_5x_7 - 4\sqrt{3}x_3x_6 + 8x_1x_4 - x_1x_5 - 8x_4x_6 - 9x_4x_5 + x_5x_6 - 4\sqrt{3}x_2x_7 - 4\sqrt{3}x_4x_7 - 9x_2x_5 - 6x_3x_7 - 8x_2x_6 + 8x_1x_2 = 0$$

$$-8y_2 - 4\sqrt{3}y_3 - 9y_4 + y_5 - 5\sqrt{3}x_1x_3 - 7\sqrt{3}x_3x_5 - 6\sqrt{3}x_3x_4 - 7\sqrt{3}x_5x_7 + \frac{7\sqrt{3}}{2}x_6x_7 - \frac{7\sqrt{3}}{2}x_3x_6 - 22x_1x_4 - 24x_1x_5 + 5x_4x_6 - 2x_4x_5 + 7x_5x_6 - 17x_1x_6 - 5\sqrt{3}x_2x_7 - 5\sqrt{3}x_1x_7 + 6\sqrt{3}x_4x_7 - 5\sqrt{3}x_2x_3 - 22x_2x_4 - 24x_2x_5 - 17x_2x_6 = 0$$

$$6y_3 + 6y_7 - 0.5x_3x_5 + 4x_3x_4 + 0.5x_5x_7 - 4x_2x_7 - 4x_4x_7 - 4x_2x_3 - 2\sqrt{3}x_3x_7 = 0$$

消去变量  $y$ , 将二阶切锥分解为两个不同维切空间约束:  $K_0^{(2)} = K_0^{(2,1)} \cup K_0^{(2,2)}$

二阶切锥  $K_0^{(2)}$  一维切空间约束  $K_0^{(2,1)}$  的解为

$$40x_2 + 61x_5 = 0 \quad 5x_4 + 7x_5 = 0$$

$$40x_1 - 61x_5 = 0 \quad -2x_5 + 5x_6 = 0$$

$$30x_3 - 61\sqrt{3}x_5 = 0 \quad 61\sqrt{3}x_5 + 30x_7 = 0$$

二阶切锥  $K_0^{(2)}$  二维切空间约束  $K_0^{(2,2)}$  的解为

$$136x_1 + 176x_2 - 61x_5 = 0 \quad -88x_2 + 107x_5 + 68x_6 = 0$$

$$8x_2 + 8x_4 - x_5 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_7 = 0$$

由上述切锥计算分析得出该机构切锥满足  $K_0^{(2)} \subset K_0^{(1)}$ , 即存在高阶切锥; 切锥  $K_0^{(2,1)}$  切空间约束有一个自变量维数为 1, 切锥  $K_0^{(2,2)}$  切空间约束有两个自变量维数为 2。由式(14)联立求解切锥  $K_0^{(2,1)}$ 、 $K_0^{(2,2)}$  两切空间约束解公共解, 交点存在实数解; 根据抖动判定条件, 多模式 7R 机构在过渡构形处发生运动奇异抖动。

该多模式 7R 机构有 1、2 自由度两种运动模式, 运动模式及过渡构形如图 3 所示。

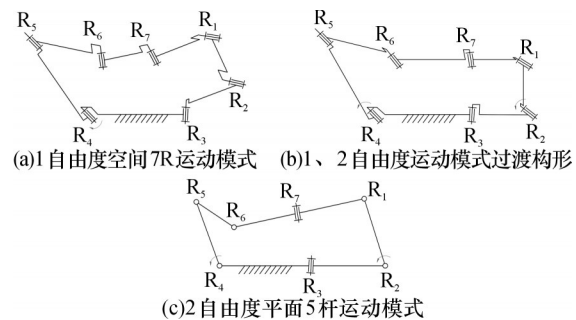


图3 单回路 7R 机构运动模式及过渡构形

Fig.3 Motion mode and transition configuration of single-loop 7R mechanism

单回路多模式 7R 机构可应用于多功能多工况狭小空间的场合, 应用时需避免机构抖动影响。

### 3 多模式 7R 机构锁内实现吸合辅助开启及防抖动措施

在保证多模式 7R 机构过渡构形尺度约束类

型的基础上,为机构选择适合于车门锁的尺度结构参数,将机构嵌入汽车门锁多支链中,实现吸合、辅助开启功能,其模式切换过渡构形处可能发生抖动。高端汽车侧门锁多支链及功能逻辑实现如图4a所示,多模式7R机构嵌入汽车门锁棘轮棘爪执行机构如图4b所示。

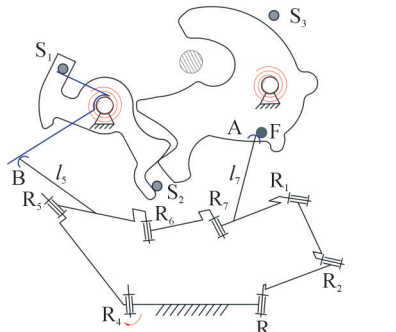
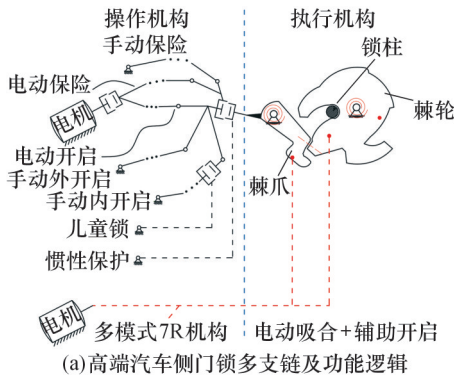


图4 多支链及多模式7R机构嵌入棘轮棘爪  
Fig.4 Multi-branch chain and multi-mode 7R mechanism embedded ratchet pawl

表1 多模式7R机构运动模式与多功能汽车门锁对应工况

Tab.1 The corresponding working conditions of multi-mode 7R mechanism motion mode and multi-function vehicle side-door latch

运动工况	7R机构运动模式、自由度	功能实现及机构运动过程	考虑汽车门锁棘轮棘爪的机构方案示意图
电动吸合	<p>运动模式:空间7R运动模式; 驱动关节:关节<math>R_4</math>顺时针转动; 机构自由度数目:1。</p>	驱动关节 $R_4$ 顺时针转动,带动电动吸合执行杆 $I_5$ 运动,使吸合连杆末端凸轮型面A拨动半锁状态的棘轮型面F逆时针转动,如左图所示;棘轮拨动棘爪顺时针转动运动至全锁位置,如右图所示。	<p>电动吸合开始阶段      电动吸合完成阶段</p>
异物夹持	<p>运动模式:空间7R运动模式; 驱动关节:关节<math>R_4</math>驱动切换关节<math>R_2</math>驱动; 机构自由度数目:1。</p>	电动吸合过程遇到夹持异物的情况,感知夹持异物,控制系统停止关节 $R_4$ 电机驱动,切换到关节 $R_2$ 驱动吸合执行杆末端凸轮型面A与棘轮F型面脱离,实现停止吸合过程,棘轮回到半锁状态,继续驱动 $R_2$ 直到过渡构形。	<p>电动吸合过程夹持到异物,车门锁棘轮、棘爪处于半锁和全锁之间      凸轮型面A脱离棘轮F型面</p>

图5a中,7R机构连杆5、7上分别装有凸轮型面A、B,凸轮型面A可拨动棘轮实现电动吸合,凸轮型面B可拨动棘爪实现辅助开启。图5b为该机构装入含锁壳的汽车门锁体三维模型示意图。

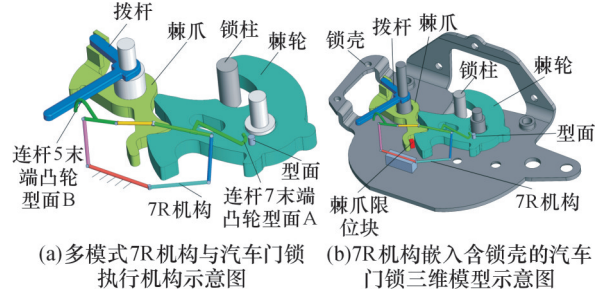


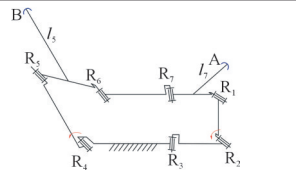
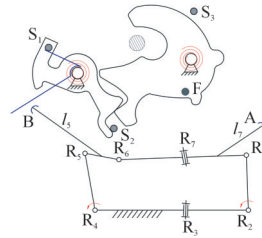
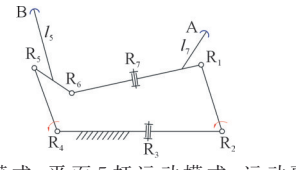
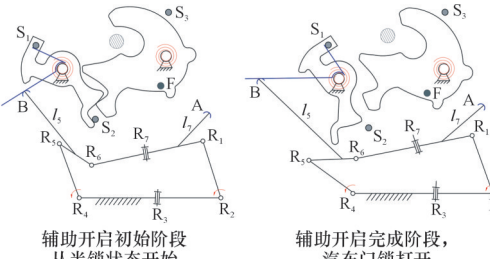
图5 7R机构和棘轮棘爪执行机构在多功能汽车门锁内布置示意图

Fig.5 Layout diagram of 7R mechanism and ratchet pawl actuator in multi-function vehicle latch

在汽车门锁内,多模式7R机构实现了半锁到全锁的电动吸合功能;遇到夹持物时,停止吸合,实现了辅助开启功能。对应汽车门锁功能实现、运动工况,多模式7R机构自由度、模式变换和运动过程等的详细描述如表1所示。

在汽车门锁吸合过程中,遇到夹持物时切换为辅助开启功能,机构由1自由度向2自由度须经过渡构形进行模式切换,该多模式7R机构在过渡构形可能发生抖动。在汽车门锁功能切换时需采取驱动 $R_2$ 、 $R_4$ 两关节的措施,使机构运动模式切换平稳,避免机构抖动影响。

续表

运动工况	7R机构运动模式、自由度	功能实现及机构运动过程	考虑汽车门锁棘轮棘爪的机构方案示意图
模式过渡	 <p>机构运动至过渡模式, <math>R_1, R_2, R_4, R_5, R_6</math> 形成平面5杆机构, <math>R_3, R_7</math> 为消极运动副; 驱动关节: 电机驱动关节 <math>R_2</math> 及关节 <math>R_4</math>; 机构自由度数目: 机构从1自由转为2自由度, 发生抖动。</p>	<p>过渡构形为7R机构和5R机构的共同构形, 而空间7R运动模式只有1个自由度, 在过渡构形处5R运动模式为2自由度, 从7R到5R运动过程中, 采取同时驱动关节 <math>R_2</math> 和 <math>R_4</math> 措施, 消除抖动影响, 使得运动可控稳定。</p>	 <p>机构处于模式切换过渡构形</p>
辅助开启	 <p>运动模式: 平面5杆运动模式, 运动副 <math>R_3, R_7</math> 为消极运动副; 驱动关节: 电机驱动关节 <math>R_4</math> 逆时针旋转; 机构自由度数目: 2。</p>	<p>驱动关节 <math>R_4</math> 逆时针转动带动执行杆 <math>I_5</math> 运动, 型面B拨动棘爪顺时针转动, 棘轮在扭簧力的作用下复位实现辅助开启功能, 准备下一次吸合。</p>	 <p>辅助开启初始阶段 从半锁状态开始</p> <p>辅助开启完成阶段, 汽车门锁打开</p>

#### 4 结论

1)通过高阶切锥不同维切空间约束实交点求解,提出了机构运动奇异抖动判定方法,当机构运动学回路方程组的约束理想为根理想或约束理想分解后实维数与复维数不同时,如果存在高阶切锥且高阶切锥不同维切空间交点存在实数解,则机构为运动奇异抖动机构。

2)结合运动不奇异抖动条件,梳理了机构抖动类型,提出了机构抖动统一通用判定方法和算法,避免了局部自由度求解,根据该算法判定多模式7R机构为运动奇异抖动机构。

3)基于过渡构形处尺度约束类型为多模式7R机构选择合适尺度参数,将多模式7R机构嵌入汽车门锁内,实现电动吸合和辅助开启功能,在过渡构形处同时驱动两个关节实现运动可控,使机构运动模式切换平稳,避免机构抖动影响。

#### 参考文献:

[1] KONG Xianwen, PFURNER M. Type Synthesis and Re-configuration Analysis of a Class of Variable-DOF Single-loop Mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 85:116-128.

[2] WENGER P, CHABLAT D. A Review of Cuspidal Serial and Parallel Manipulators[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2023, 15(4):040801.

[3] WENGER P. Cuspidal and Noncuspidal Robot Manipulators[J]. Robotica, 2007, 25(6):677-689.

[4] SALUNKHE D H, SPARTALIS C, CAPCO J, et al. Necessary and Sufficient Condition for a Generic 3R Serial Manipulator to Be Cuspidal[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 171:104729.

[5] ZEIN M, WENGER P, CHABLAT D. Singular Curves and Cusp Points in the Joint Space of 3-RPR Parallel Ma-

nipulators[J]. Robotica, 2007, 25(6):717-724.

[6] WOHLHART K. Kinematotropic Linkages[M]//Recent Advances in Robot Kinematics. Dordrecht: Springer Netherlands, 1996:359-368.

[7] WHITNEY H. Tangents to an Analytic Variety[M]//Hasler Whitney Collected Papers. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1992:537-590.

[8] LERBET J. Analytic Geometry and Singularities of Mechanisms[J]. ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1998, 78(10):687-694.

[9] MÜLLER A. An Overview of Formulae for the Higher-order Kinematics of Lower-pair Chains with Applications in Robotics and Mechanism Theory[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 142:103594.

[10] MÜLLER A. Recursive Higher-order Constraints for Linkages with Lower Kinematic Pairs[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 100:33-43.

[11] MÜLLER A. Local Analysis of Singular Configurations of Open and Closed Loop Manipulators[J]. Multibody System Dynamics, 2002, 8(3):297-326.

[12] MÜLLER A. Local Kinematic Analysis of Closed-loop Linkages—Mobility, Singularities, and Shakiness[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(4):041013.

[13] MÜLLER A, LI Zijia. Identification of Real and Complex Solution Varieties and Their Singularities Defined by Loop Constraints of Linkages Using the Kinematic Tangent Cone[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2024, 16(11):111003.

[14] LI Zijia, MÜLLER A. Mechanism Singularities and Shakiness from an Algebraic Viewpoint[J]. Mechanism and Machine Theory, 2024, 191:105510.

[15] 钟传磊. 汽车侧门锁电动开启与吸合的空间柔顺机构及运动稳定性研究[D]. 上海:上海工程技术大学, 2022.

ZHONG Chuanlei. Study on Spatial Compliant Mechanism and Motion Stability of Power Release and Electric Cinch in Vehicle Side Door Latch[D]. Shanghai: Shanghai University of Engineering Science, 2022.

[16] 殷传硕, 杭鲁滨, 钟传磊, 等. 面向车门锁电动吸合开启优先功能的凸轮摆杆柔顺连杆组合机构[J]. 机械传动, 2024, 48(4):138-147.

(下转第585页)