

# 含间隙空间并联机构刚柔耦合动力学分析与试验

陈修龙 孙垂军 邓 昱\*

山东科技大学机械电子工程学院, 青岛, 266590

**摘要:**为了精确预测空间并联机构在运动副间隙与构件弹性共同作用下的动力学特性,以3-RRPaR空间并联机构为研究对象,建立了含间隙机构刚柔耦合动力学模型,并采用四阶龙格-库塔法和广义 $\alpha$ 算法对动力学模型进行求解;对比分析了含间隙刚体动力学模型与含间隙刚柔耦合动力学模型的动平台位移、速度和加速度等动态输出响应,并搭建试验平台验证了动力学分析结果的正确性。研究表明,构件的弹性变形会加剧机构的速度和加速度波动,间隙值的增大会导致动态输出响应的波动增大。

**关键词:**空间并联机构;运动副间隙;刚柔耦合;动力学特性

**中图分类号:**TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.03.008

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Rigid-Flexible Coupling Dynamics Analyses and Experiments of Spatial Parallel Mechanisms with Clearances

CHEN Xiulong SUN Chuijun DENG Yu\*

School of Mechatronics Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, 266590

**Abstract:** In order to accurately predict the dynamics characteristics of the spatial parallel mechanisms under the combined action of joint clearances and component elasticity, a 3-RRPaR spatial parallel mechanism was taken as the research object, and rigid-flexible coupling dynamics model of the mechanisms was established with clearances. The fourth-order Runge-Kutta method and the generalized  $\alpha$  algorithm were used to solve the dynamics model. The dynamic output responses such as displacement, velocity and acceleration of the moving platform of rigid body dynamics model with clearances and the rigid-flexible coupling dynamics model with clearances were compared and analyzed. An experimental platform was built to verify the correctness of the dynamics analysis results. The results show that the elastic deformations of the components may aggravate the velocity and acceleration fluctuation of the mechanisms, and the increase of the clearance values may lead to the increase of fluctuation of dynamic output response.

**Key words:** spatial parallel mechanism; motion pair clearance; rigid-flexible coupling; dynamics characteristics

### 0 引言

相较于传统的串联机构平台,空间并联机构因其结构紧凑、刚度和稳定性高、动态响应灵敏等特点<sup>[1-2]</sup>被广泛应用于各个领域当中,伴随着技术的不断进步,人们对其精度的要求也越来越高。空间并联机构是典型的并联多体系统,通过运动副实现运动与动力的多向传递。然而,运动副间隙在装配以及制造中是不可避免的,运动过程当中运动副间隙会引发构件之间的碰撞、摩擦等现象<sup>[3-4]</sup>。同时,运动和力在传递的过程中伴随着构件的弹性变形,会进一步影响机构动力学特

性<sup>[5-6]</sup>。因此,对含运动副间隙刚柔耦合动力学模型的动力学响应展开分析,对预测机构的动力学特性具有重要的意义。

运动副间隙和构件弹性变形是影响机构动态特性的重要因素,目前国内外大多数动力学研究侧重于独立分析运动副间隙或柔性构件对平面机构以及空间串联机构动力学特性的影响,对空间并联机构的研究较少,而同时考虑两者对空间并联机构动力学特性的研究则更为稀少。JAVAN-FAR等<sup>[7]</sup>以平面四连杆机构为研究对象,建立了含间隙的动力学模型,研究了摩擦模型对表面碰撞时的影响。BAI等<sup>[8]</sup>以平面曲柄滑块机构为研究对象,研究了混合间隙对平面机械系统动力学响应的影响。CHEN等<sup>[9]</sup>建立了一种平面九连杆机构的含间隙刚柔耦合动力学模型并分析了各个

收稿日期:2025-03-19

基金项目:国家自然科学基金(52275115);山东省自然科学基金(ZR2022ME040)

参数对动力学特性的影响。JING等<sup>[10]</sup>以一种含球铰的空间四杆机构为研究对象,研究了间隙数量对机构动力学特性的影响。陈国强等<sup>[11]</sup>采用3种不同的关节摩擦模型,基于牛顿-欧拉法建立了3-PRS并联机构动力学模型。WANG等<sup>[12]</sup>基于绝对节点坐标法与拉格朗日乘法建立了空间曲柄滑块机构的刚柔耦合动力学模型,并分析了弹性模量对运动精度的影响。刘凉等<sup>[13]</sup>基于自然坐标法与绝对节点坐标法建立了刚柔耦合动力学模型,分析了动平台变形状态及其对系统动力学特性的影响。GUO等<sup>[14]</sup>建立了考虑间隙的一种五自由度机器人刚柔耦合动力学模型,分析了运动副间隙与构件弹性对机构动力学特性的影响。

综上所述,国内外学者对间隙以及构件弹性的研究大都侧重于以平面机构或简单的空间机构为研究对象,研究间隙或者构件弹性单独对机构动力学特性的影响,同时考虑两者对复杂空间机构动力学特性影响的研究较少。本文以3-RRPaR空间并联机构为研究对象,建立了同时考虑运动副间隙与构件弹性的含间隙刚柔耦合动力学模型,通过数值求解与试验验证相结合的方法,分析并验证了运动副间隙与构件弹性共同作用下动平台的动力学响应特性。

## 1 含间隙3-RRPaR空间并联机构刚柔耦合动力学建模

### 1.1 干摩擦转动副间隙建模

干摩擦间隙简化模型如图1所示。 $O_s$ 、 $O_t$ 和 $R_s$ 、 $R_t$ 分别为轴承与轴的中心和半径, $E$ 为偏心矢量,可表示为

$$E = r_s - r_t \quad (1)$$

式中: $r_s$ 为轴套的中心在全局坐标下的位置矢量; $r_t$ 为轴的中心在全局坐标下的位置矢量。

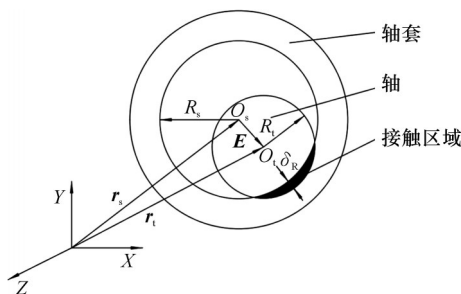


图1 干摩擦间隙模型

Fig.1 Model of dry clearance

$\delta_R$ 表示径向嵌入深度,表达式为

$$\delta_R = E - c_k \quad (2)$$

式中: $c_k$ 为间隙值。

利用Lancarani-Nikravesh模型<sup>[15]</sup>建立法向碰

撞力模型,该模型能更准确地模拟间隙接触中的碰撞-分离过程及速度相关恢复行为,考虑了由碰撞产生的能量损耗、局部变形等情况,可表示为

$$F_N = \begin{cases} \frac{4\delta_R^n}{3(\sigma_s + \sigma_t)} \left[ 1 + \frac{3(1 - c_e^2)\dot{\delta}_R}{4\dot{\delta}_{R_0}} \right] \left( \sqrt{\frac{R_s R_t}{R_s - R_t}} \right) & \delta_R \geq 0 \\ 0 & \delta_R < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_k = \frac{1 - \nu_k}{E_k} \quad k = s, t \quad (4)$$

式中: $\dot{\delta}_{R_0}$ 为初始碰撞速度; $\dot{\delta}_R$ 为碰撞速度; $c_e$ 、 $n$ 为恢复系数和修正系数; $E_k$ 为弹性模量; $\nu_k$ 为泊松比。

采用修正的Coulomb摩擦力模型<sup>[16]</sup>建立切向摩擦力模型,该模型引入动态修正系数,解决数值积分不稳定的问题,可表示为

$$F_T = \begin{cases} 0 & |v_t| < v_s \\ -\text{sgn}(v_t) c_t \frac{|v_t| - v_s}{v_D - v_s} F_N & v_s \leq |v_t| \leq v_D \\ -\text{sgn}(v_t) c_t F_N & |v_t| > v_D \end{cases} \quad (5)$$

式中: $c_t$ 、 $c_D$ 分别为摩擦因数和动态修正系数; $v_D$ 、 $v_s$ 分别为动摩擦和静摩擦速度极限值。

干摩擦间隙对轴套产生的接触力为

$$F = F_N b + F_T t \quad (6)$$

式中: $b$ 为沿接触面法向方向的单位方向向量; $t$ 为与相对滑动方向相反的单位方向向量。

### 1.2 空间梁单元模型

采用基于ANCF方法<sup>[17-18]</sup>的三维二节点梁单元对柔性构件进行离散化处理。节点 $Q$ 和 $H$ 分别位于梁单元的两个端面中心,分别在两个节点处建立方向矢量,并保证两两垂直, $r_H$ 和 $r_Q$ 分别表示节点 $H$ 和节点 $Q$ 在定坐标系下的位置矢量,三维二节点梁单元模型如图2所示。

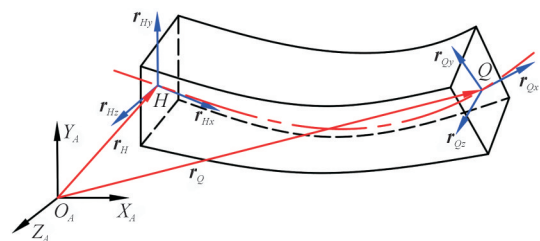


图2 三维二节点梁单元模型

Fig.2 Three-dimensional two-node beam element model

任意的节点均采用12个广义坐标表示,因此一个梁单元共有24个广义坐标,坐标表示为

$$\psi = (r_H, r_{Hx}, r_{Hy}, r_{Hz}, r_Q, r_{Qx}, r_{Qy}, r_{Qz})^T \quad (7)$$

式中: $r_{Hx}$ 为 $r_H$ 在 $x$ 方向上的偏导数矢量;其余向量定义相同,不再赘述。

形函数表达式为

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8] \otimes I_3 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 1 - 3\omega^2 + 2\omega^3 & \sigma_2 &= l_s(\omega - 2\omega^2 + \omega^3) \\ \sigma_3 &= l_s(\xi - \omega\xi) & \sigma_4 &= l_s(\zeta - \omega\zeta) & \sigma_5 &= 3\omega^2 - 2\omega^3 \\ \sigma_6 &= l_s(-\omega^2 + \omega^3) & \sigma_7 &= l_s\omega\xi & \sigma_8 &= l_s\omega\zeta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中：“ $\otimes$ ”表示克罗内克积； $I_3$ 为三阶单位矩阵； $\omega = x/l_s$ ， $\xi = y/l_s$ ， $\zeta = z/l_s$ ， $l_s$ 为梁单元变形前的长度。

综上所述，三维二节点梁单元的位移场为

$$w_r = [X \ Y \ Z]^T = \sigma\psi \quad (10)$$

将三维二节点梁单元的位移场矩阵对时间求一阶导数：

$$v_r = \sigma\psi' \quad (11)$$

式中： $\psi'$ 为梁单元广义坐标对时间求一阶导数。

梁单元模型的动能表达式为

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_r} v_r \rho v_r^T v_r dV_r = \frac{1}{2} \int_{V_r} v_r \rho (\psi')^T \sigma^T \sigma \psi' dV_r = \frac{1}{2} (\psi')^T M_r \psi' \quad (12)$$

式中： $\rho$ 为梁的密度； $V_r$ 为梁的体积。

梁单元的质量矩阵 $M_r$ 可以表示为

$$M_r = \rho \int_{V_r} \sigma^T \sigma dV_r \quad (13)$$

由虚功原理可以得到系统的广义外力表达式为

$$Q^r = \sigma^T F_w \quad (14)$$

式中： $F_w$ 为梁单元上任意一点 $w$ 所受的力。

梁单元受到的重力为

$$Q_z = \rho V_r g (0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{l_s}{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{l_s}{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (15)$$

式中： $g$ 为重力加速度。

基于连续介质力学，拉格朗日应变张量如下：

$$\epsilon_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi^T \sigma_1 \psi - 1 & \psi^T \sigma_4 \psi & \psi^T \sigma_5 \psi \\ \psi^T \sigma_4 \psi & \psi^T \sigma_2 \psi - 1 & \psi^T \sigma_6 \psi \\ \psi^T \sigma_5 \psi & \psi^T \sigma_6 \psi & \psi^T \sigma_3 \psi - 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中： $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )的取值为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,x}^T \sigma_{a,x} & \sigma_2 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,y}^T \sigma_{a,y} \\ \sigma_3 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,z}^T \sigma_{a,z} & \sigma_4 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,x}^T \sigma_{a,y} \\ \sigma_5 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,x}^T \sigma_{a,z} & \sigma_6 &= \sum_{a=1}^3 \sigma_{a,y}^T \sigma_{a,z} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中： $\sigma_{a,x} = \partial\sigma_a/\partial x$ ，其余变量描述定义相同，不再赘述； $\sigma_a$ 为形函数矩阵 $\sigma$ 的第 $a$ 行。

进一步求得梁单元的弹性力表达式：

$$F^r = - \left[ \frac{\lambda + 2G}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{V_r} (\sigma_{i,i}^T \sigma_i \psi \psi^T \sigma_{i,i}^T \sigma_i - \sigma_{i,i}^T \sigma_i) dV_r + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{V_r} (\sigma_{i,i}^T \sigma_i \psi \psi^T \sigma_{j,j}^T \sigma_j - \sigma_{i,i}^T \sigma_i) dV_r + G \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{V_r} (\sigma_{i,i}^T \sigma_i e e^T \sigma_{j,j}^T \sigma_j) dV_r \right] \psi \quad (18)$$

式中： $\sigma_{1,1} = \partial\sigma/\partial x$ ， $\sigma_{2,2} = \partial\sigma/\partial y$ ， $\sigma_{3,3} = \partial\sigma/\partial z$ ； $\lambda, G$ 为 Lamé 常数。

### 1.3 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型

3-RRPaR 空间并联机构结构见图3。3-RRPaR 并联机构由3条构造相同的运动支链和末端执行器组成，末端执行器可以完成X、Y、Z三个方向的平动，可用于高速分拣、组装等领域。

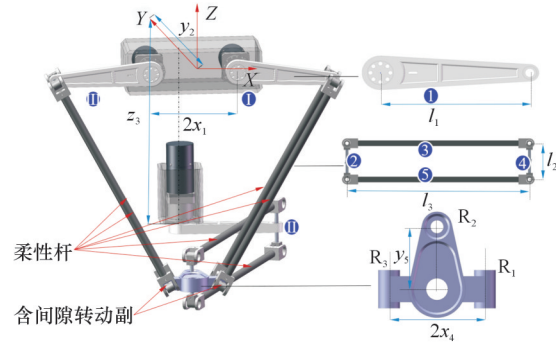


图3 3-RRPaR 空间并联机构结构图

Fig.3 Structure diagram of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

考虑3条平行四边形支链的6条长杆的构件弹性与动平台 $R_1$ 与 $R_3$ 处的径向转动副间隙，建立含间隙3-RRPaR空间并联机构刚柔耦合动力学模型。

#### 1.3.1 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚体动力学建模

采用笛卡儿坐标系对构件位姿进行描述，因此系统广义坐标可以表示为

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{16}]^T \quad (19)$$

式中： $q_i = [x_i \ y_i \ z_i \ \alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i]$ ， $[x_i \ y_i \ z_i]^T$ 表示位置坐标， $[\alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i]^T$ 表示活动构件相对于定坐标系的位姿。

3-RRPaR空间并联机构中的运动副均为转动副，转动副仅能围绕轴线转动，仅具有一个自由度，该并联机构中第 $i$ 个转动副约束方程可以表示为

$$\Phi_R^i(q) = \begin{bmatrix} r_{Ox} + A_j r'_{Oj} - r_{Oy} - A_b r'_{Ob} \\ b_y^T j_x \\ b_z^T j_x \end{bmatrix} = 0_{5 \times 1} \quad (20)$$

式中： $r_{Ox}$ 、 $r_{Oy}$ 分别为轴和轴套所在构件质心在定坐标系下的位置向量； $r'_{Oj}$ 、 $r'_{Ob}$ 分别为轴线中点在轴和轴套所在构件局部坐标系中的位置向量；矢量 $j_x$ 与旋转轴线重合，且垂直于矢量 $b_y$ 和 $b_z$ ； $A_j$ 、 $A_b$ 分别为轴和轴套所在构件质心坐标系相对于全局坐标系的转换矩阵。

径向间隙的存在使得运动副的径向几何约束失效，仅受到力的相互作用，因此，间隙处的径向约束方程应该去除。机构的约束方程可表示为

$$\Phi(q, t) = [\Phi_R^1 \ \dots \ \Phi_R^{15} \ \Phi_R^{D1} \ \Phi_R^{D2} \ \Phi_R^{D3}] = 0_{92 \times 1} \quad (21)$$

式中： $\Phi_R^i$ 为各个转动副处的约束方程； $\Phi_R^{Dj}$ 为主动臂的驱动约束方程。

将式(21)对时间求一阶偏导,得到3-RRPaR并联机构速度约束方程:

$$\Phi_q \dot{q} = -\dot{\Phi} \equiv v_{92 \times 1} \quad (22)$$

式中: $\Phi_q$ 为刚体约束方程的雅可比矩阵; $\dot{q}$ 为广义速度矢量; $\dot{\Phi}$ 为约束方程对时间的偏导。

3-RRPaR并联机构加速度约束方程如下:

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_{qq})_q \dot{q} - 2\dot{\Phi}_q \dot{q} - \ddot{\Phi} \equiv \eta \quad (23)$$

式中: $\ddot{q}$ 为广义加速度矢量; $\ddot{\Phi}_q$ 为刚体约束方程的雅可比矩阵对时间的偏导; $\ddot{\Phi}$ 为约束方程对时间的二次偏导; $\eta$ 为加速度约束方程。

则质心坐标下构件*i*对应的质量矩阵为

$$M_i = \text{diag}(m_i, m_i, m_i, I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}) \quad (24)$$

式中: $m_i$ 为构件*i*的质量; $I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}$ 为构件各个轴上的转动惯量。

则系统整体质量矩阵为

$$M = \text{diag}(M_1^R, M_2^R, \dots, M_{16}^R) \quad (25)$$

仅考虑系统重力的广义力矢量 $Q$ 可以表示为

$$Q = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_{16}]^T \quad (26)$$

$$Q_i = [m_i g \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

考虑转动副间隙的3-RRPaR空间并联机构广义力矢量 $Q$ 可表示为

$$Q = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 + Q_{5r} \ \dots \ Q_{16} + Q_{16r}]^T \quad (27)$$

$$Q_{ir} = [(F_i)^T (M_i)^T]^T$$

式中: $F_i$ 为转动副间隙对于构件的接触力; $M_i$ 为转动副间隙对构件质心的转矩。

采用Baumgarte违约参数对动力学方程进行修正:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \eta - 2\alpha \dot{\Phi} - \beta^2 \Phi \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中: $\lambda$ 为拉格朗日乘子; $\alpha, \beta$ 为违约参数。

### 1.3.2 含间隙3-RRPaR空间并联机构刚柔耦合动力学建模

对机构驱动臂选用质心坐标法描述,其余刚性构件使用自然坐标法(NCF)对其进行描述,柔性构件使用绝对节点坐标法(ANCF)进行描述,系统的广义坐标为

$$q^r = [(q_1^r)^T (q_2^r)^T \dots (q_{16}^r)^T]^T \quad (29)$$

对于采用NCF法描述的刚性构件,其广义坐标为 $q_i^r = [r_{wi}^T \ r_{di}^T]^T$  ( $i=2, 5, 7, 10, 12, 15$ ),其中 $r_{wi}$ 和 $r_{di}$ 分别表示杆件两端的位置矢量。对于三角形动平台,其广义坐标为 $q_{16}^r = (r_{a16}^T, r_{b16}^T, r_{c16}^T)^T$ ,其中 $r_{a16}^T, r_{b16}^T, r_{c16}^T$ 分别表示三角板3个顶点在定坐标系中的位置矢量。

以支链1为例介绍含间隙刚柔耦合系统的约束方程建立过程,支链1结构如图4所示。

驱动臂的约束方程为

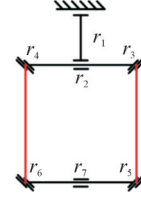


图4 支链1刚柔耦合结构示意图

Fig.4 Branch chain 1 rigid-flexible coupling structure diagram

$$\phi_{r1}^r = \begin{bmatrix} r_1 + R_1(-\frac{l_{11}}{2}, 0, 0)^T - (a, 0, 0)^T \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = 0_{5 \times 1} \quad (30)$$

式中: $r_1$ 为驱动臂质心在定坐标系下的位置矢量; $R_1$ 为驱动臂1的转换矩阵; $\alpha_1, \gamma_1$ 分别为驱动臂1相对定坐标系X轴和Y轴的转角。

平行四边形支链的约束方程为

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^r &= r_1 + R_1(\frac{l_{11}}{2}, 0, 0)^T + (0, -\frac{l_{sh}}{2}, 0)^T - r_3 = 0_{3 \times 1} \\ \phi_4^r &= r_3 - r_{3'} = 0_{3 \times 1} \quad \phi_5^r = r_4 - r_{4'} = 0_{3 \times 1} \\ \phi_6^r &= r_5 - r_{5'} = 0_{3 \times 1} \quad \phi_7^r = r_6 - r_{6'} = 0_{3 \times 1} \\ \phi_8^r &= (r_4 - r_3)^T \cdot (R^{1\phi} \cdot (0, 1, 0)^T) = 0 \\ \phi_9^r &= r_5 - (r_7 + (0, -\frac{l_{sh}}{2}, 0)^T) = 0_{3 \times 1} \\ \phi_{10}^r &= r_6 - (r_7 + (0, \frac{l_{sh}}{2}, 0)^T) = 0_{3 \times 1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中: $R^{1\phi}$ 为支链1柔性杆上节点处关节坐标系的转换矩阵; $l_{ii}$ 为第*i*条支链主动臂的杆长; $l_{sh}$ 为平行四边形支链短杆的杆长; $r_i, r_{i'} (i=3, 4, 5, 6)$ 分别为转动副处轴套与轴中心的在定坐标系下的位置矢量。

对动平台与1、3号铰链连接的平台 $R_1, R_3$ 处考虑径向转动副间隙,故引入转动副间隙处碰撞产生的偏心矢量 $E$ ,动平台约束方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{31}^r &= r_7 - E_1 + (-2x_4, 0, 0)^T - r_{7r} + E_3 = 0_{3 \times 1} \\ \phi_{32}^r &= r_7 - E_1 + (-x_4, y_5, 0)^T - r_{7r} = 0_{3 \times 1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式中: $E_i$ 为*R<sub>i</sub>*处转动副间隙的偏心矢量; $r_7, r_{7r}, r_{7r'}$ 分别为动平台与1、2、3号支链转动副处,转动轴的中心在定坐标系下的位置矢量。

机构逆运动学模型采用闭环矢量法进行构建,驱动臂的驱动角度曲线 $f_{\theta_i}(t)$  ( $i=1, 2, 3$ )可以通过逆运动学求得,则机构的驱动约束方程为

$$\phi_{qd}^r = \begin{bmatrix} \beta_1 - f_{\theta 1}(t) \\ \gamma_6 - f_{\theta 2}(t) \\ \beta_{11} - f_{\theta 3}(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (33)$$

式中: $\beta_1$ 为驱动臂1相对于Y轴的角位移; $\gamma_6$ 为驱动臂2相对于Z轴的角位移; $\beta_{11}$ 为驱动臂3相对于Z轴的角位移; $f_{\theta_i}(t)$ 为关于时间的驱动函数。

得到含间隙刚柔耦合并联机构约束方程:

$$\Phi^r = [(\phi_1^r)^T (\phi_2^r)^T \dots (\phi_{31}^r)^T (\phi_{32}^r)^T (\phi_{qd}^r)^T]^T = 0_{99 \times 1} \quad (34)$$

基于拉格朗日乘子法建立含间隙并联机构刚柔耦合动力学模型:

$$\begin{cases} M^r \ddot{q} + (\Phi_q^r)^T \lambda = Q^r \\ \Phi^r = 0 \end{cases} \quad (35)$$

式中:  $M^r$  为机构的质量矩阵;  $\Phi_q^r$  为约束方程的雅可比矩阵;  $\ddot{q}$  为广义加速度矩阵;  $\lambda$  为拉格朗日乘子项;  $Q^r$  为机构系统的广义力矢量。

## 2 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学分析

### 2.1 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学求解

1) 导入初始位移  $q_i$  和初始速度  $\dot{q}_i$ 。

2) 在干摩擦间隙刚柔耦合动力学模型中, 判断轴体和轴套之间的相对位置关系, 进一步通过间隙力模型计算转动副间隙处的接触力。

3) 基于四阶龙格-库塔法求解对含有转动副间隙的并联机构的刚体动力学模型进行计算。进一步得到各个转动副间隙处的偏心矢量  $E_i$  与接触力  $F_{xi}$ 。

4) 将步骤 3) 中的相关变量代入刚柔耦合动力学模型中。用广义  $\alpha$  算法进行求解。

5) 更新时间变量, 将求解后的相关变量引入干摩擦间隙刚体动力学模型中, 重复步骤 1)~步骤 4)。

在对含间隙刚柔耦合动力学模型进行求解的过程中用到了广义  $\alpha$  算法和四阶龙格-库塔算法。在 MATLAB 求解程序当中, 刚柔耦合动力学程序作为主程序, 含间隙刚体动力学程序作为子程序。

### 2.2 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学响应分析

含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型结构参数如表 1 所示。含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型间隙参数如表 2 所示。含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型柔性构件参数如表 3 所示。

表 1 3-RRPaR 空间并联机构结构参数

Tab.1 Structural parameters of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

构件	参数	值
主动臂	$l_{11}$ 长度/mm	255
Pa 支链短杆	$l_{sh}$ 长度/mm	105
末端执行器	$x_4$ 距离/mm	60
	$y_5$ 距离/mm	80
Pa 支链长杆	$l_c$ 长度/mm	640
机架	$x_1$ 距离/mm	100
	$y_2$ 距离/mm	720
	$z_3$ 距离/mm	600

表 2 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构间隙参数

Tab.2 Gap parameters of 3-RRPaR spatial parallel mechanism with clearance

参数	数值	参数	数值
修正系数 $\alpha, \beta$	5	泊松比 $\nu_k$	0.3
恢复系数 $c_e$	0.9	滑动摩擦系数 $c_f$	0.05
轴体半径 $R_i$ /m	0.014	轴套半径 $R_o$ /m	0.015
弹性模量 $E_k$ /GPa	207	极限速度 $v_s, v_D / (m \cdot s^{-1})$	0.0001, 0.000 001

表 3 含间隙 3-RRPaR 空间并联机构柔性构件参数

Tab.3 Flexible component parameters of 3-RRPaR spatial parallel mechanism with clearance

参数	数值	参数	数值
从动臂长杆横截面积 $S/\text{mm}^2$	16×16	从动臂长杆弹性模量 $E/\text{GPa}$	116
从动臂长杆密度 $\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1700	谱半径 $p$	0.7
允许误差 $tol$	$10^{-7}$	步长 $s$	0.001

为了更好地验证运动副间隙对于机构动力学特性的影响, 选取圆形轨迹对此机构进行计算分析, 角速度  $\omega$  设置为  $3\pi \text{ rad/s}$ , 末端执行器轨迹如下:

$$\begin{cases} X = -0.2 + 0.05\cos\omega t \\ Y = 0.08 - 0.05\sin\omega t \\ Z = -0.54 \end{cases} \quad (36)$$

为深入研究转动副间隙和刚柔耦合对机构动力学响应的影响, 分别建立第 1、3 号铰链连接处引入径向转动副间隙 0.5 mm、轴向间隙为 0 的刚体动力学模型以及刚柔耦合动力学模型进行对比分析。

如图 5 所示, 考虑径向转动副 0.5 mm 间隙的刚体动力学模型下, 动平台的位移曲线均与理想值具有较好的吻合度; 动平台在开始的前 0.1 s 内速度具有较多的波动, 在 X 方向速度的最大误差出现在 0.05 s, 约为 0.06 m/s, 在 Y 方向速度的最大误差出现在 0.05 s, 约为 0.07 m/s; 动平台加速度在 0.1 s 之后加速度误差呈周期性, 在 X 方向的加速度误差最大值出现在 0.62 s, 约为 0.9 m/s<sup>2</sup>, 在 Y 方向的加速度误差最大值出现在 0.62 s, 约为 1.25 m/s<sup>2</sup>, 其加速度误差曲线呈周期性的上下振荡。

如图 5 所示, 在含 0.5 mm 径向转动副间隙刚柔耦合动力学模型下, 动平台的位移曲线均与理想值具有较好的吻合度; 动平台速度在 X 方向与 Y 方向的最大误差均出现在开始时, 约为 0.2 m/s, 0.75 m/s; 动平台加速度在 0.4 s 之后加速度变化趋于稳定, 稳定后, 它在 X 方向的加速度与误差最大值出现在 0.42 s, 为 1.8 m/s<sup>2</sup>, 它在 Y 方向的加速度误差最大值出现在 0.42 s, 为 2 m/s<sup>2</sup>。

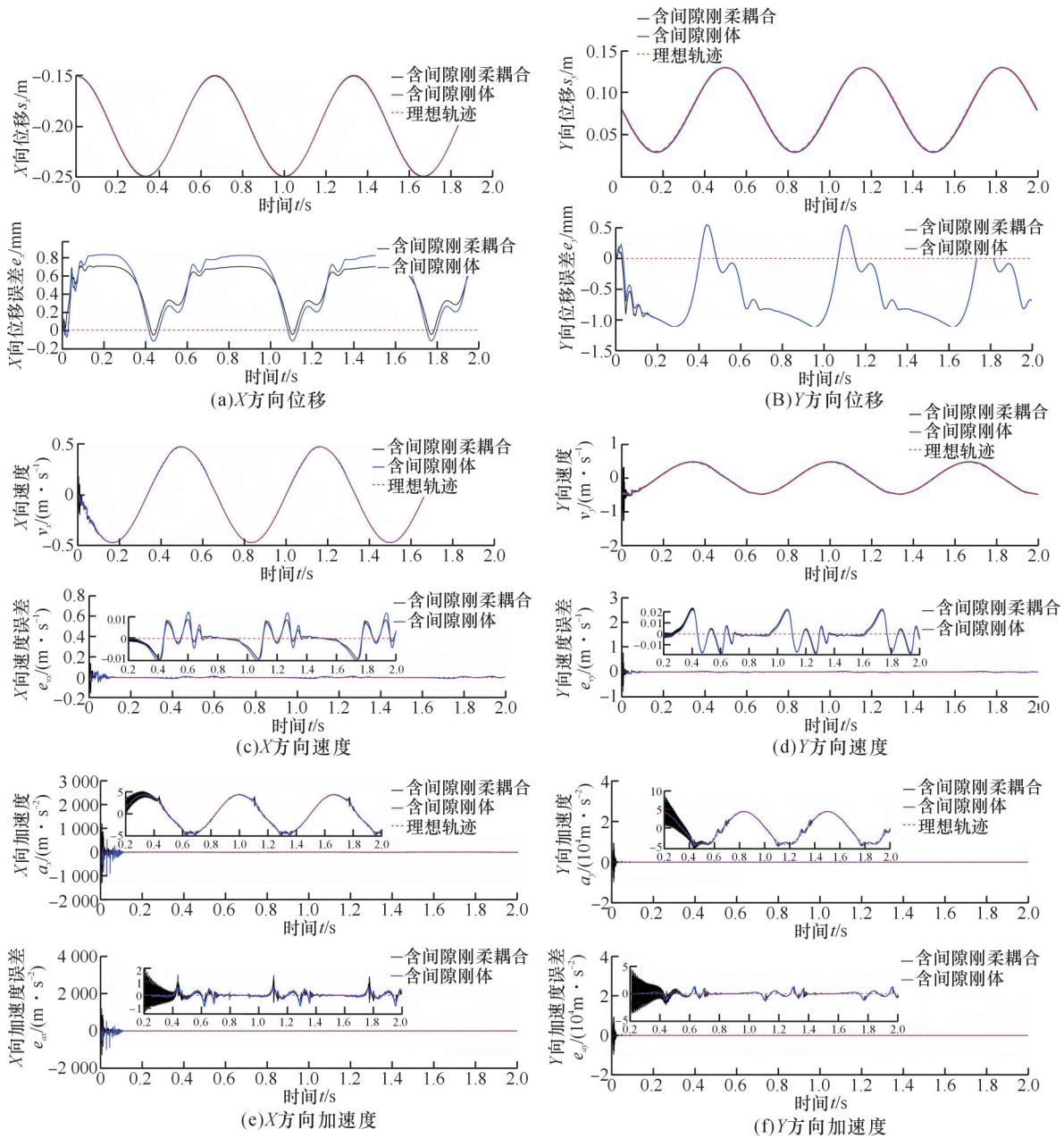


图5 含间隙刚体与含间隙刚柔耦合动力学模型动力响应对比图( $c=0.5\text{ mm}$ )

Fig.5 Comparison of dynamic response of rigid body with clearances and rigid-flexible coupling dynamic model with clearances ( $c=0.5\text{ mm}$ )

通过对比两种动力学模型的分析结果可以得出,间隙所引起的碰撞和摩擦与构件弹性变形的协同作用会加剧运动过程中的振动现象。

构建含间隙刚柔耦合动力学模型,以研究考虑构件弹性时不同间隙值对机构动力学响应的影响,分别求解 $0.5\text{ mm}$ 与 $0.1\text{ mm}$ 间隙值的刚柔耦合动力学模型,其动平台动力学输出响应如图6所示,可知, $0.1\text{ mm}$ 间隙下的位移、速度、加速度曲线更理想。 $X$ 方向位移最大误差出现在 $0.2\text{ s}$ ,约为 $0.2\text{ mm}$ , $Y$ 方向位移最大误差出现在 $0.3\text{ s}$ ,约为 $0.28\text{ mm}$ ;在前 $0.1\text{ s}$ 内, $X$ 、 $Y$ 方向速度均有较大波动,最大误差值出现在开始时刻,分别为 $0.25, 0.75\text{ m/s}$ ;  $0.6\text{ s}$ 时,加速度趋于稳定状态,稳

定后的加速度曲线在 $X$ 、 $Y$ 方向误差的最大值均出现在 $1.07\text{ s}$ ,最大值分别为 $0.11, 0.26\text{ m/s}^2$ 。相较于 $0.5\text{ mm}$ 间隙下的刚柔耦合动力学模型, $0.1\text{ mm}$ 间隙下动平台的动力学输出响应的位移、速度和加速度曲线表现更为平稳。间隙值减小时,构件弹性变形对机构动力学特性的影响愈加显著。

### 2.3 含间隙3-RRPaR空间并联机构刚柔耦合动力学试验验证

含间隙3-RRPaR并联机构刚柔耦合动力学响应的试验平台主要由3-RRPaR空间并联机构机械系统、运动控制系统与数据采集与分析系统组成(图7)。运动控制系统中由LabVIEW编写,

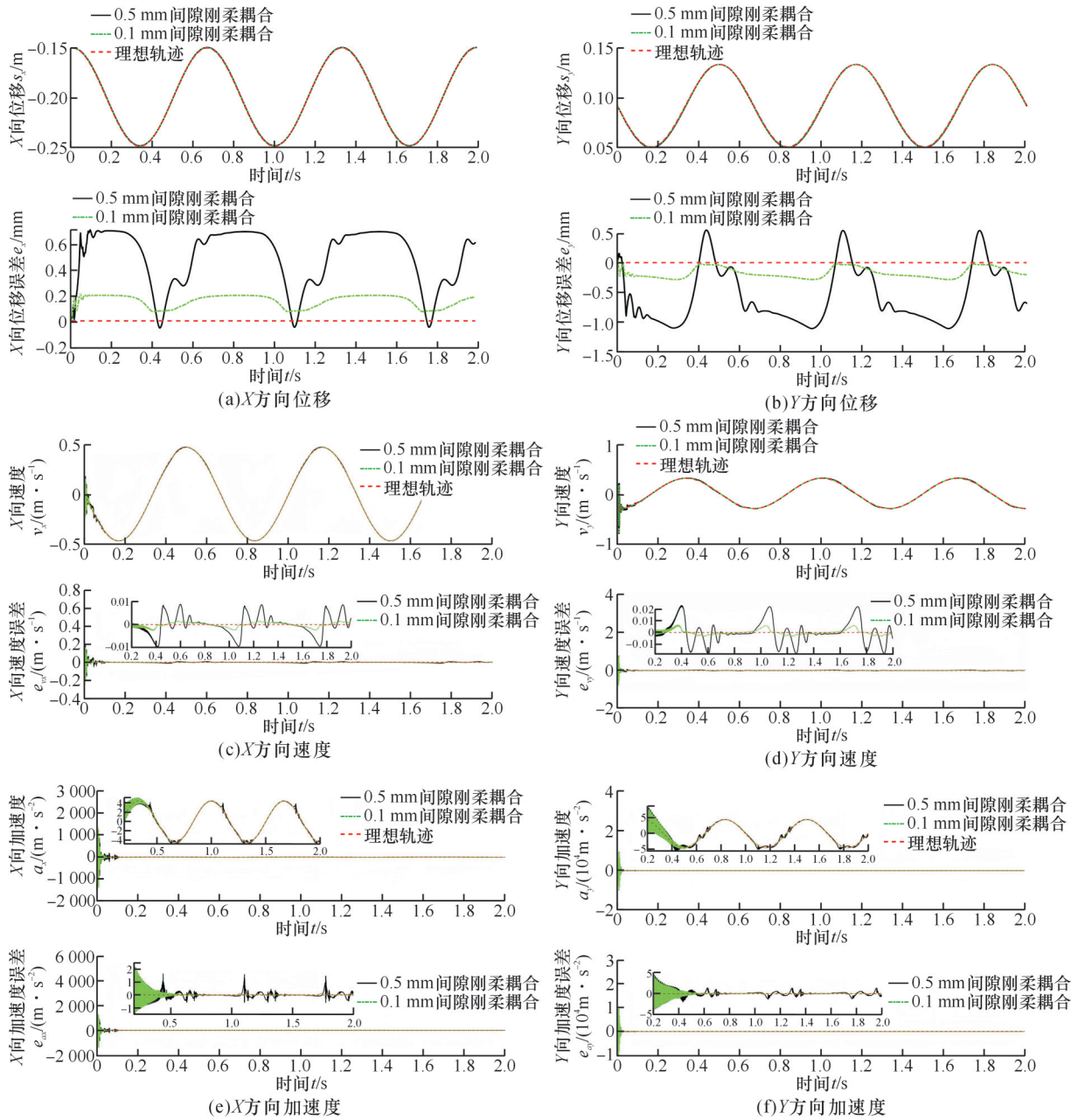


图6 不同间隙下刚柔耦合动力学模型动力响应对比图 ( $c_1=0.5\text{ mm}$ ,  $c_2=0.1\text{ mm}$ )

Fig.6 Comparison of dynamic response of rigid-flexible coupling dynamic model under different clearances

( $c_1=0.5\text{ mm}$ ,  $c_2=0.1\text{ mm}$ )

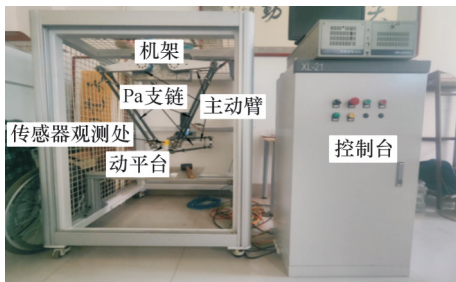


图7 3-RRPaR空间并联机构试验台

Fig.7 3-RRPaR spatial parallel mechanism experimental bench

配合下位机设备实现对机械系统的实时控制。

将末端执行器与平行四边形(Pa)支链之间

的转动副  $R_1$  与  $R_3$  设计为含间隙的转动副,间隙转动副的参数如表4所示。

表4 含间隙转动副参数

Tab.4 Parameters of revolute joint with clearance

运动副元素	内径/mm	外径/mm	长度/mm	材料
轴套	15	24	50	铝合金
间隙轴销		14/14.8	98	钢

通过试验研究不同间隙值与不同运动轨迹下端执行机构的加速度响应。为验证不同间隙值、不同轨迹下动力学模型计算结果的正确性,分别选取轨迹 I 与轨迹 II 进行试验,轨迹 I 试验验证选取 0.5 mm 间隙值,轨迹 II 试验验证选取

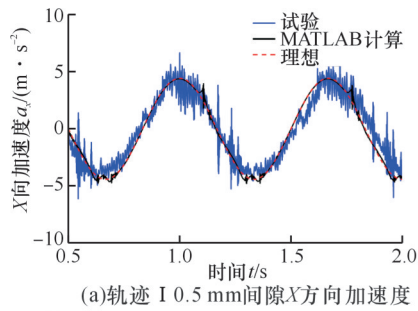
0.1 mm 间隙值。所选取的末端执行机构的运动轨迹如表 5 所示。

由于试验平台与动力学模型的加速度在开始时数值不稳定,故选取 0.5 s 后的周期进行对比分析。

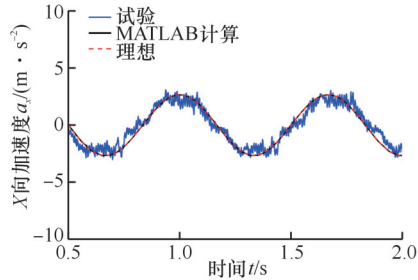
表 5 3-RRPaR 空间并联机构试验运动轨迹

Tab.5 The test trajectory of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

轨迹 I /m	轨迹 II /m
$X = -0.2 + 0.05\cos(3\pi t)$	$X = -0.18 + 0.03\cos(3\pi t)$
$Y = 0.08 - 0.05\sin(3\pi t)$	$Y = 0.08 - 0.03\sin(3\pi t)$
$Z = -0.54$	$Z = -0.54$

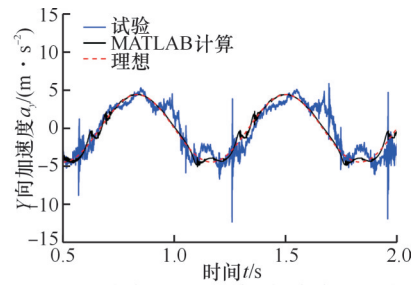


(a) 轨迹 I 0.5 mm 间隙 X 方向加速度

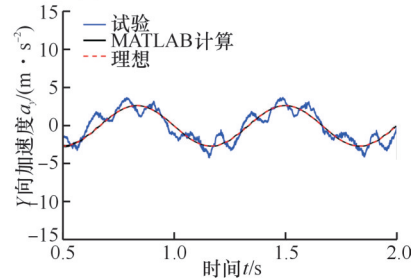


(c) 轨迹 II 0.1 mm 间隙 X 方向加速度

图 8 给出了试验结果与动力学模型的动平台加速度响应对比曲线。由图 8 可知,在轨迹 I 的 0.5 mm 间隙下, X 方向加速度试验与计算结果的最大值分别为  $7 \text{ m/s}^2$ 、 $4.5 \text{ m/s}^2$ , 最小值分别为  $-6 \text{ m/s}^2$ 、 $-5 \text{ m/s}^2$ , Y 方向加速度试验与计算结果的最大值分别为  $5.8 \text{ m/s}^2$ 、 $4.4 \text{ m/s}^2$ , 最小值分别为  $-12 \text{ m/s}^2$ 、 $-5 \text{ m/s}^2$ ; 在轨迹 II 的 0.1 mm 间隙下, X 方向加速度试验与计算结果的最大值分别为  $3 \text{ m/s}^2$ 、 $2.6 \text{ m/s}^2$ , 最小值分别为  $-3 \text{ m/s}^2$ 、 $-2.6 \text{ m/s}^2$ , Y 方向加速度试验与计算结果的最大值分别为  $3.6 \text{ m/s}^2$ 、 $2.6 \text{ m/s}^2$ , 最小值分别为  $-4.2 \text{ m/s}^2$ 、 $-2.6 \text{ m/s}^2$ 。



(b) 轨迹 I 0.5 mm 间隙 Y 方向加速度



(d) 轨迹 II 0.1 mm 间隙 Y 方向加速度

图 8 末端执行器加速度响应的试验结果与动力学模型计算结果对比 ( $c_1=0.5 \text{ mm}$ ,  $c_2=0.1 \text{ mm}$ )

Fig.8 Comparison of the experimental results of the acceleration response of the end effector with the calculation results of the dynamic model ( $c_1=0.5 \text{ mm}$ ,  $c_2=0.1 \text{ mm}$ )

动力学模型计算结果与试验结果在加速度曲线的主要波动位置和趋势上具有较高的吻合度,在不同的轨迹与间隙下的试验结果与动力学模型计算结果均具有较好的一致性。通过动力学模型计算结果与试验结果的对比,进一步验证了转动副间隙与构件的弹性变形对于机构动力学响应稳定性的影响。试验值与动力学模型计算结果具有一定的偏差,造成偏差的主要原因为电机运行过程中的平台振动,此外,试验平台在加工、装配过程中的误差与传感器的灵敏度误差也对试验结果造成一定影响。

### 3 结论

本文建立了含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型,利用广义- $\alpha$ 算法和四阶龙格-库塔算法对动力学模型进行求解,分析了运动副间隙与构件弹性对机构位移、速度、加速度特性

的影响,搭建试验平台验证了计算结果与分析的正确性。

1)建立了转动副干摩擦间隙模型和空间梁单元模型,以 3-RRPaR 空间并联机构为研究对象,基于转动副干摩擦间隙模型与空间梁单元模型建立了含间隙 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学模型。

2)基于四阶龙格-库塔法和广义- $\alpha$ 算法求解了动力学模型,根据动力学模型计算结果对比分析了含间隙理想刚体下动平台的动力学输出响应与含间隙构件弹性下的动平台动力学输出响应,考虑了构件弹性不同间隙下的动平台的动力学输出响应。

3)动力学模型计算结果与试验结果在加速度曲线的主要波动位置、波动幅值和趋势上具有较高的吻合度,在不同的轨迹与间隙下的试验结果与动力学模型计算结果均具有较好的一致性。试

验证了动力学模型计算与分析结果的正确性。

#### 参考文献:

- [1] 杜中秋, 沈惠平, 孟庆梅, 等. 运动解耦且正解符号化的8R两平移空间并联机构的设计与性能分析[J]. 中国机械工程, 2023, 34(12): 1425-1435.  
DU Zhongqiu, SHEN Huiping, MENG Qingmei, et al. Design and Performance Analysis of 8R Two-translational Spatial Parallel Mechanism with Motion Decoupling and Symbolic Positive Solutions[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(12): 1425-1435.
- [2] 黄宁宇, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种运动可解耦的Stewart型并联机构的正运动学及奇异性[J]. 中国机械工程, 2025, 36(9): 1951-1960.  
HUANG Ningning, YOU Jingjing, YE Pengda, et al. Forward Kinematics and Singularity of Kinematically Decoupled Stewart-type Parallel Mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(9): 1951-1960.
- [3] MARQUES F, ROUPA I, SILVA M T, et al. Examination and Comparison of Different Methods to Model Closed Loop Kinematic Chains Using Lagrangian Formulation with Cut Joint, Clearance Joint Constraint and Elastic Joint Approaches [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 160: 104294.
- [4] FLORES P, AMBRÓSIO J, LANKARANI H M. Contact-impact Events with Friction in Multibody Dynamics: Back to Basics[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 184: 105305.
- [5] 商德勇, 黄云山, 黄欣怡, 等. 基于奇异摄动的刚柔耦合Delta机器人非线性混合控制[J]. 机械工程学报, 2024, 60(5): 95-106.  
SHANG Deyong, HUANG Yunshan, HUANG Xinyi, et al. Nonlinear Hybrid Control of Rigid Flexible Coupling Delta Robot Based on Singular Perturbation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(5): 95-106.
- [6] 商德勇, 黄欣怡, 黄云山, 等. 基于Kane方程的Delta并联机器人刚柔耦合动力学研究[J]. 机械工程学报, 2024, 60(7): 124-133.  
SHANG Deyong, HUANG Xinyi, HUANG Yunshan, et al. Research on Rigid-Flexible Coupling Dynamics of Delta Parallel Robot Based on Kane Equation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(7): 124-133.
- [7] JAVANFAR A, BAMDAD M. Effect of Novel Continuous Friction Model on Nonlinear Dynamics of the Mechanisms with Clearance Joint[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2022, 236(11): 6040-6052.
- [8] BAI Zhengfeng, LIU Tianxi, LI Jinyu, et al. Numerical and Experimental Study on Dynamic Characteristics of Planar Mechanism with Mixed Clearances [J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2023, 51(11): 6142-6165.
- [9] CHEN Xiulong, WANG Tao. Dynamic Behavior Analysis of Rigid-Flexible Coupling Planar Mechanism Considering Dry Clearances and Lubrication Clearances[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2023, 37(4): 1585-1600.
- [10] JING Qian, LIU Hongzhao. Dynamics and Wear Prediction of Mechanisms Considering Multiple Clearances and Coatings[J]. Lubricants, 2023, 11(7): 310.
- [11] 陈国强, 周红鹏, 黄俊杰, 等. 考虑关节摩擦的3-PRS并联机构动力学建模研究[J]. 农业机械学报, 2021, 52(8): 416-426.  
CHEN Guoqiang, ZHOU Hongpeng, HUANG Junjie, et al. Dynamic Modeling with Joint Friction of 3-PRS Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(8): 416-426.
- [12] WANG Xiaoyu, WANG Haofeng, ZHAO Jingchao, et al. Rigid-Flexible Coupling Dynamics Modeling of Spatial Crank-Slider Mechanism Based on Absolute Node Coordinate Formulation[J]. Mathematics, 2022, 10(6): 881.
- [13] 刘凉, 汪博深, 冯建峰, 等. 含柔性动平台并联机器人动力学建模方法研究[J]. 农业机械学报, 2023, 54(12): 417-430.  
LIU Liang, WANG Boshen, FENG Jianfeng, et al. Dynamic Modeling Method of Parallel Robot with Flexible Moving Platform[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(12): 417-430.
- [14] GUO Feng, CHENG Gang, WANG Shilin, et al. Rigid-Flexible Coupling Dynamics Analysis with Joint Clearance for a 5-DOF Hybrid Polishing Robot[J]. Robotica, 2022, 40(7): 2168-2188.
- [15] 金国光, 王志敏, 畅博彦, 等. 含间隙变胞机构动力学建模与平稳性分析[J]. 机械工程学报, 2024, 60(21): 144-155.  
JIN Guoguang, WANG Zhimin, CHANG Boyan, et al. Dynamic Modeling and Stationarity Analysis of Metamorphic Mechanism with Clearance Joint[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(21): 144-155.
- [16] WU Xuze, SUN Yu, WANG Yu, et al. Correlation Dimension and Bifurcation Analysis for the Planar Slider-crank Mechanism with Multiple Clearance Joints[J]. Multi-body System Dynamics, 2021, 52(1): 95-116.
- [17] 吴懋琦, 谭述君, 高飞雄. 基于绝对节点坐标法的平面梁有限变形下变形重构[J]. 力学学报, 2021, 53(10): 2776-2789.  
WU Maoqi, TAN Shujun, GAO Feixiong. Shape Reconstruction of Plane Beam with Finite Deformation Based on Absolute Nodal Coordinate Formulation[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(10): 2776-2789.
- [18] XING Yu, LIU Lei, LIU Chao, et al. Mechanical Deformation Analysis of a Flexible Finger in Terms of an Improved ANCF Plate Element[J]. Machines, 2022, 10(7): 518.

(编辑 王曼玥)

作者简介: 陈修龙, 男, 1976年生, 教授、博士研究生导师。研究方向为机械系统动力学、机器人机构学理论与应用。E-mail: cxdy99@163.com。邓昱\*(通信作者), 女, 1977年生, 实验师。研究方向为机构学理论。E-mail: dengyuwork@126.com。

#### 本文引用格式:

陈修龙, 孙垂军, 邓昱. 含间隙空间并联机构刚柔耦合动力学分析与试验[J]. 中国机械工程, 2026, 37(3): 586-594.

CHEN Xiulong, SUN Chuijun, DENG Yu. Rigid-Flexible Coupling Dynamics Analyses and Experiments of Spatial Parallel Mechanisms with Clearances[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(3): 586-594.