

# 负半径滚子直动推杆盘形凸轮机构运动保真及其解域研究

胡志超<sup>1</sup> 常勇<sup>1\*</sup> 杨富富<sup>2</sup> 温圣兴<sup>1</sup>

1.集美大学海洋装备与机械工程学院,厦门,361021

2.福州大学机械工程及自动化学院,福州,350108

**摘要:**负半径滚子机构运动失真问题极易发生、非常突出。通过揭示凸轮理论轮廓、工作轮廓为异向等距曲线,获得了基于凸轮理论轮廓的运动保真新判据。以基圆半径和偏距构造二维坐标系,采取离散-遍历方法,发现必失真/或失真取值域,提出非滚子型/滚子型失真的新概念。讨论了行程、往程/返程运动角以及运动规律对必失真区域的影响。以滚子半径建立垂直数轴,分析了两类滚子半径取值分布特征。基于上述坐标系和数轴构建三维坐标系,获得了运动保真的解域和非解域,深入剖析了两类非解域内的“燕尾交叉Ⅰ型/Ⅱ型”两类凸轮轮廓形貌特征。运动保真解域直观阐释满足运动保真条件的凸轮基本参数取值域、机构最小尺寸解等。通过设计案例验证了所提出理论与方法的正确性和有效性。

**关键词:**负半径滚子机构;异向等距曲线;必失真/或失真取值域;运动保真解域

**中图分类号:**TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.03.010

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Study on No-undercutting and Its Solution Spaces of Cam Mechanisms with Negative Radius Roller Follower

HU Zhichao<sup>1</sup> CHANG Yong<sup>1\*</sup> YANG Fufu<sup>2</sup> WEN Shengxing<sup>1</sup>

1.School of Marine Equipment and Mechanical Engineering, Jimei University, Xiamen, Fujian, 361021

2.School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou, 350108

**Abstract:** The issue of “undercutting” in mechanisms with negative radius follower was highly prone to occur and was very prominent. By discovering the offset curve with opposite direction relationship between the cam pitch curve and cam profile, a new criterion was proposed for no-undercutting based on cam pitch curve. Based on this new criterion, the issue of undercutting was conducted in-depth research. Firstly, a coordinate system was established based on the base circle radius and eccentric offset, and the discrete-traversal method was employed. The inevitable /possible undercutting regions were discovered. The new concepts of non-roller-type/roller-type undercutting were proposed. And the impact of stroke, rise/return phase motion angle, and motion law on inevitable undercutting regions were discussed. Secondly, a vertical numerical axis was established based on roller radius to analyze the distribution characteristics of two types of roller radius values. Then, based on the three-dimensional coordinate system established with the base circle radius, eccentric offset, and roller radius, the solution space and two types of non-solution spaces were obtained for ensuring no-undercutting. Two types of cam profile morphological characteristics, specifically the “swallowtail-shaped- type I /type II” corresponding to the two types of non-solution spaces were analyzed. This solution space expresses the range of values for the base circle radius, eccentric offset, and roller radius that satisfied the no-undercutting conditions, as well as the minimum size of the cam profile, etc. Finally, the correctness and effectiveness of the proposed theory and method were verified through design cases.

**Key words:** mechanism with negative radius roller; offset curve with opposite direction; inevitable / possible undercutting region; solution space of no-undercutting

### 0 引言

盘形凸轮机构结构简单,工作可靠,对函数、位置和轨迹等复杂多样的机构综合问题具有良好

适应性,在轻工、纺织、医药、印刷和包装等众多行业领域中获得了广泛的应用。近年,盘形凸轮机构的研究、应用已发展演进至浮动正半径滚子/平底推杆盘形凸轮机构的层面和阶段,作者对其尺寸综合问题进行了一系列研究<sup>[1-2]</sup>。

收稿日期:2025-04-01

基金项目:国家自然科学基金(51175224, 51475209)

1997年,CARRA等<sup>[3]</sup>创造性地提出“负半径

滚子直动推杆盘形凸轮机构”(简称“负半径滚子机构”)新构型,指出其在承受大载荷方面的应用潜力。2004年,CARRA等<sup>[4]</sup>在70 t重型压力印刷机改造升级中采用了负半径滚子机构的新方案,验证了在空间受限、大载荷等服役环境工况下具有适应性、优越性和广阔工程应用前景,他们还给出了运动保真判据以及满足保真条件下合适的参数组合(基圆半径、滚子半径等)的行程角下限值。2009年,WU等<sup>[5]</sup>继贾延龄等<sup>[6-7]</sup>、李延平<sup>[8]</sup>之后提出一种“凹弧底直动推杆盘形凸轮机构”并给出凸轮轮廓的求解分析方法,该机构可视为将负半径滚子的局部自由度去除得到的情况。2012年,LIN等<sup>[9]</sup>提出负半径滚子机构运动保真和保持接触条件,分析了不同参数对接触力和接触应力的影响。同年,LIN等<sup>[10]</sup>针对负半径滚子机构,提出将压力角和效率积分作为评价指标,并据此求解出最优偏距值。2014年,QU等<sup>[11]</sup>研究了力锁合、形锁负半径滚子共轭凸轮机构,采用“定比例分点法”求解负半径滚子凸轮的理论轮廓和实际轮廓问题。2014年,HIDALGO-MARTINEZ等<sup>[12]</sup>采用Bézier曲线求解设计负半径滚子的半径,强调了新构型对空间受限、大载荷工况的适应性,在满足运动保真及许用压力角条件下,提出了一种基于Bézier曲线的凸轮轮廓优化设计数值方法。2016年,SANMIGUEL-ROJAS等<sup>[13]</sup>将基于Bézier曲线的优化凸轮轮廓的方法推广到负半径滚子等宽凸轮机构。HSIEH等<sup>[14-15]</sup>先后推导出负半径滚子机构运动学模型,以及压力角、主曲率和滚子角速度、角加速度解析表达式。吴秋平等<sup>[16]</sup>针对正置式负半径滚子机构,基于工作轮廓讨论了滚子半径 $R$ 、基圆半径 $r_0$ 耦合关系及运动保真问题。2016、2017年,笔者团队提出包含运动保真条件在内的四项约束条件,给出了正置、偏置式负半径滚子机构的通用有效尺寸综合方法<sup>[17-18]</sup>,通过比较尺寸综合结果,得到大载荷下,相较于正半径滚子机构,负半径滚子机构具有“跨数量级”尺寸紧凑性的重要结论。2023、2024年,YAN等<sup>[19-20]</sup>在比较了传统电子制动器(electronic mechanical brake, EMB)螺杆机构、曲柄滑块机构、正弦机构等夹紧机构与负半径滚子机构优缺点基础上,设计了基于负半径滚子机构的新型EMB,解决了现有EMB体积大、承载能力和效率低等问题,验证了相较于传统导螺杆机构的EMB,该新型EMB在性能上有显著优势,仅需要40.52%的电机功率和65.65%的间隙消除时间。

综上所述,负半径滚子机构作为一种新型凸轮机构,挑战和颠覆了人们对凸轮机构仅适用于中低载荷的传统认知,它在大载荷和空间受限等特殊工况下所展现出来的独特优势受到国内外学者的关注并取得了一定的研究成果和工程应用,但其适用的特殊工况也导致研究者较少、论著有限、研究深度不够。

运动保真条件,在负半径滚子机构尺寸综合四项约束条件中位居第二<sup>[18]</sup>,是后续传动性能、接触强度条件求解的基础。负半径滚子机构“运动失真”问题极易发生,已成为其设计中的瓶颈,严重阻碍和制约了该新型机构理论研究的深入和工程应用的推广,因而受到学者们的密切关注,但仍缺乏系统深入研究。本文对此问题展开研究。

## 1 前期研究

### 1.1 对象机构和运动信息预知条件

图1是负半径滚子机构的结构图和运动简图。由盘形凸轮1、直动推杆2、负半径滚子3和机架0组成,负半径滚子取用深沟球轴承。凸轮1(输入件)等速转动,通过滚子3驱动直动推杆2(输出件)沿导路 $C_0C_m$ 方向做往复移动和近远休止等,实现预期输出运动。

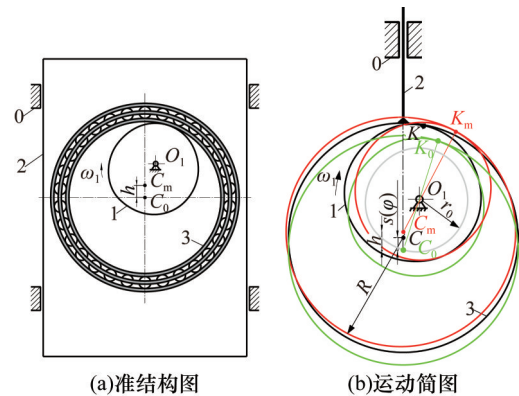


图1 负半径滚子直动推杆盘形凸轮机构

Fig.1 The cam mechanism with negative radius follower

如图1b所示, $O_1$ 为凸轮轴心, $C_0$ 、 $C_m$ 为行程始、终位置的滚子中心, $K_0$ 、 $K_m$ 为行程始、终位置滚子和凸轮切触点。 $C$ 为任意瞬时滚子中心, $K$ 为任意瞬时滚子与凸轮切触点。两点连线长度 $l_{O_1C_0} = r_0$ ,  $l_{C_0K_0} = l_{C_mK_m} = l_{CK} = R$ ,  $r_0$ 为凸轮理论轮廓基圆半径, $R$ 为滚子半径。

预知机构运动信息:推杆2行程 $h$ ,行程返程运动角 $\Phi_g$ 和 $\Phi_r$ 、位移规律 $s_g = s_g(\varphi)$ 和 $s_r = s_r(\varphi)$ ,近、远休止角 $\Phi_n$ 和 $\Phi_f$ ,凸轮顺时针转动,凸轮转角 $\varphi$ 、角速度 $\omega_1$ 。不失一般性,本文取定表1所示的预知机构运动信息。

表1 预知机构运动信息

Tab.1 Main motion information of the mechanism

$h/\text{mm}$	$\Phi_g$	$\Phi_r$	$\Phi_n$	$\Phi_f$	$s_g(\varphi)$	$s_r(\varphi)$	$\omega_1$
60	150°	160°	20°	30°	3-4-5 多项式	3-4-5 多项式	顺时针

1.2 凸轮理论轮廓及工作轮廓

如图2a所示,理论轮廓 $\Gamma$ 是滚子中心 $C$ 绕凸轮轴心 $O_1$ 的反转轨迹,工作轮廓 $\Gamma_w$ 是以 $\Gamma$ 上各点为圆心之滚子圆族的包络线。

如图2b所示,凸轮顺时针转过 $\varphi$ ,滚子中心从 $C_0$ 点移动 $s=s(\varphi)$ 至任一瞬时位置 $C$ 点。据反转法原理,滚子中心绕凸轮轴心 $O_1$ 转过 $-\varphi$ ,从 $C$ 点反转至 $C'$ 点位置。

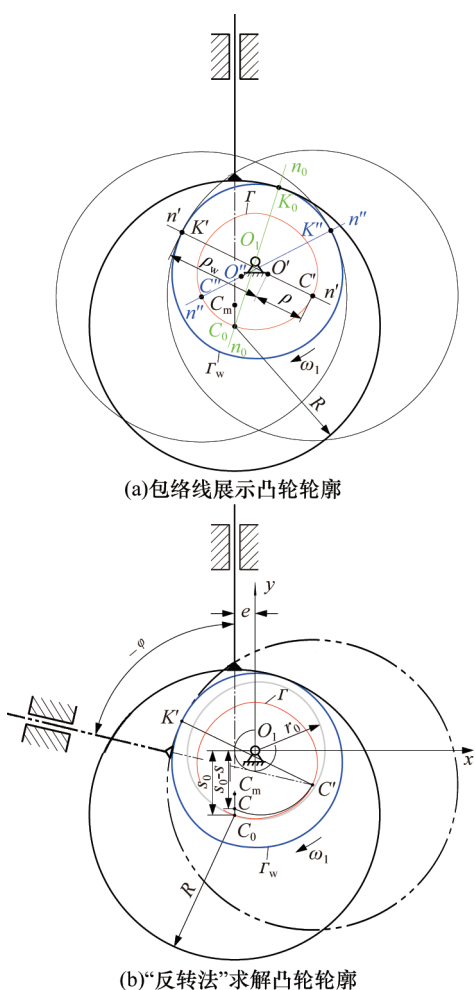


图2 理论轮廓与工作轮廓的内在关系

Fig.2 The intrinsic relationship between the cam pitch curve and cam profile

建立基于凸轮轴心 $O_1$ 的直角坐标系 $O_1xy$ (图2b),根据预知机构运动信息,据反转法原理,推得凸轮理论轮廓方程:

$$\left. \begin{aligned} x &= (s_0 - s) \sin \varphi - e \cos \varphi = x(r_0, e, s(\varphi)) \\ y &= -(s_0 - s) \cos \varphi - e \sin \varphi = y(r_0, e, s(\varphi)) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$s_0 = (r_0^2 - e^2)^{1/2}$$

据微分几何包络原理,推得凸轮工作轮廓方程:

$$\left. \begin{aligned} x_w &= x - R [y' / ((x')^2 + (y')^2)^{1/2}] = x_w(r_0, e, s(\varphi), R) \\ y_w &= y + R [x' / ((x')^2 + (y')^2)^{1/2}] = y_w(r_0, e, s(\varphi), R) \end{aligned} \right\} (2)$$

式中: $x', y'$ 分别为 $x, y$ 变量对 $\varphi$ 的一阶导数。

2 曲率半径分析及运动保真新判据

2.1 凸轮工作轮廓和理论轮廓曲率半径的定量关系

传统的正半径滚子机构,凸轮工作轮廓 $\Gamma_w$ 是理论轮廓 $\Gamma$ 的包络线,两者彼此共轭且为等距曲线。

通过深入研究分析图2a,发现 $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 之间具有如下性质:① $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 互为共轭曲线;② $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 上任意一对共轭点共曲率中心,即共渐屈线;③ $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 上任意一对共轭点法矢方向相反,即弯曲方向相反;④ $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 上任意一对共轭点曲率半径之和等于滚子半径。

如图2a所示, $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 上共轭点 $C_0$ 与 $K_0, C'$ 与 $K', C''$ 与 $K''$ ,分别共法线 $n_0, n'$ 及 $n''$ ,共曲率中心 $O_1, O'$ 及 $O''$ 点,其曲率中心介于两共轭点之间,法矢方向相反。 $C_0O_1, C'O', C''O''$ 为 $\Gamma$ 上各点曲率半径 $\rho, K_0O_1, K'O', K''O''$ 为 $\Gamma_w$ 上各点曲率半径 $\rho_w, l_{C_0K_0} = l_{C'K'} = l_{C''K''} = R$ ,则 $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 上各共轭点的曲率半径之和等于滚子半径 $R$ ,即

$$\rho + \rho_w = R \text{ 或 } \rho_w = R - \rho \quad (3)$$

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = \rho(r_0, e, s(\varphi)) \quad (4)$$

式中: $x'', y''$ 分别为 $x, y$ 变量对 $\varphi$ 的二阶导数。

据上文所述,本文定义正半径滚子机构的 $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 为同向等距曲线,负半径滚子机构的 $\Gamma$ 和 $\Gamma_w$ 为异向等距曲线。

式(3)揭示出了凸轮理论轮廓、工作轮廓之间的定量关系。

据式(1)~式(4)不难推知,凸轮理论轮廓 $\Gamma$ 及其曲率半径 $\rho$ 是基圆半径 $r_0$ 、偏距 $e$ 和 $s(\varphi)$ 的函数;凸轮工作轮廓 $\Gamma_w$ 及其曲率半径 $\rho_w$ 是基圆半径 $r_0$ 、偏距 $e, s(\varphi)$ 和滚子半径 $R$ 的函数。

2.2 运动保真的新判据

据图1可知,凸轮工作轮廓应为全凸,且与滚子始终保持内切接触才能实现预期运动。故此,现有运动保真判据

$$0 < \rho_w < R \quad (5)$$

是基于凸轮工作轮廓而提出的。

综合式(3)和式(5),得到运动保真新判据:

$$0 < \rho < R \quad (6)$$

式(6)可进一步写为

$$\rho_{\min} > 0 \quad (7)$$

$$\rho_{\max} < R \quad (8)$$

式中： $\rho_{\min}$ 、 $\rho_{\max}$ 分别为凸轮理论轮廓曲率半径 $\rho$ 的最小值和最大值。

式(7)、式(8)表明，凸轮理论轮廓是满足工作轮廓上所有点皆与滚子圆内切接触( $\rho_{\max} < R$ )的简单闭凸曲线( $\rho_{\min} > 0$ )。

设计凸轮时，先确定凸轮理论轮廓，选定滚子半径 $R$ 后，才得出凸轮工作轮廓。新判据的提出将运动保真的研究判定由工作轮廓前移至理论轮廓。

给定 $s(\varphi)$ 后，原判据式(5)取用 $\rho_w = (r_0, e, R)$ ，是理论轮廓参数 $r_0$ 、 $e$ 及滚子半径 $R$ 两类参数的三元函数，存在与 $R$ 相关或耦合问题。而新判据式(6)取用 $\rho = \rho(r_0, e)$ ，仅是理论轮廓参数 $r_0$ 、 $e$ 的二元函数，与 $R$ 无关即不存在耦合问题。

故此，新判据分别从理论轮廓参数 $r_0$ 、 $e$ 和滚子半径 $R$ 分析讨论运动保真问题，更简单清晰、更适合指导满足运动保真的设计。

### 3 理论轮廓参数的两类取值域分析

#### 3.1 理论轮廓参数的两类取值域及其分布特征

取理论轮廓参数 $r_0$ 、 $e$ 为坐标轴参数，创建 $Or_0e$ 二维尺寸坐标系。

根据运动连通约束条件：滚子中心点 $C$ 需始终位于沿推杆运动方向、凸轮轴心 $O_1$ 的同侧<sup>[17-18]</sup>，则

$$s_0 = (r_0^2 - e^2)^{1/2} \geq h \quad \text{或} \quad r_0 \geq (e^2 + h^2)^{1/2} \quad (9)$$

考虑清楚呈现 $(r_0, e)$ 有限选取区域、边界等显著重要特征，根据本文理论，通过尝试性的计算，选取区域

$$\left. \begin{aligned} r_0 &\in [0, 5h] \\ e &= [-3h, 3h] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

据式(9)、式(10)，得参数 $(r_0, e)$ 的有限可选区域，记为 $D$ ，如图3所示。分别沿 $r_0$ 和 $e$ 数轴，对 $D$ 区域进行离散-网格化处理，遍历 $D$ 区域所有网格节点，据式(1)、式(4)，得到凸轮理论轮廓族 $\{\Gamma\}$ 及其曲率半径曲线族 $\{\rho\}$ 。据式(7)，可由 $\{\rho\}$ 形貌将区域 $D$ 划分为I、II两类区域。

对应 $\rho_{\min} \leq 0$ 的 $(r_0, e)$ 取值域记为 $D_I$ ，其边界记为 $\Sigma$ (往程 $\rho_{g\min} \leq 0$ 、返程 $\rho_{r\min} \leq 0$ 对应的区域及边界分别记为 $D_{I_g}$ 、 $D_{I_r}$ 、 $\Sigma_g$ 和 $\Sigma_r$ )。对应 $\rho_{\min} > 0$ 的 $(r_0, e)$ 取值域记为 $D_{II}$ (往程 $\rho_{g\min} > 0$ 、

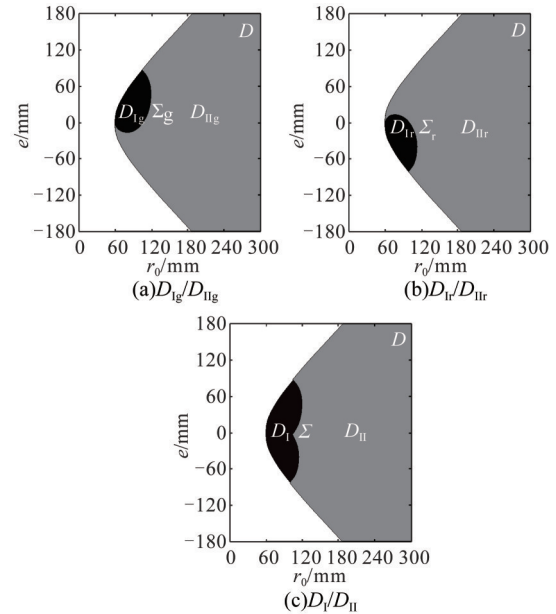


图3  $(r_0, e)$ 的两类取值域

Fig.3 Two types of regions of  $(r_0, e)$

返程 $\rho_{r\min} > 0$ 对应的区域分别记为 $D_{I_g}$ 、 $D_{I_r}$ )。图3a、图3b、图3c分别展示了往程、返程及整程的 $(r_0, e)$ 取值域的分布特征。

据图3a、图3b可知， $D_{I_g}$ 、 $D_{I_r}$ 为含坐标点 $(h, 0)$ 、以 $(h, 0)$ 为左极限点的叶片形封闭区域。其中， $D_{I_g}$ 总体偏于纵坐标轴 $e$ 正轴， $D_{I_r}$ 总体偏于纵坐标轴 $e$ 负轴。两封闭区域宽度、高度均大于行程 $h$ 。图3c中， $D_I$ 呈B形封闭区域，它是图3a、图3b中 $D_{I_g}$ 、 $D_{I_r}$ 的交集，即

$$D_I = D_{I_g} \cup D_{I_r} \quad (11)$$

$(r_0, e) \in D_I$ 时，据式(7)，无论滚子半径 $R$ 如何取值，必发生运动失真，本文称之为非滚子型失真； $(r_0, e) \in D_{II}$ 时，据式(8)，需进一步获得理论轮廓最大曲率半径 $\rho_{\max}$ ，再与所选取滚子半径 $R$ 进行比较判定是否运动保真。若不满足式(8)，则发生运动失真。因该区域是否发生运动失真取决于后续选择的滚子半径 $R$ ，故本文称之为滚子型失真。据上文所述， $D_I$ 为必失真取值域， $D_{II}$ 为或失真取值域。

#### 3.2 必失真取值域的分析讨论

1) 行程 $h$ 越大，必失真取值域 $D_I$ 越大，运动失真问题越容易发生。如图4a所示， $h$ 取45, 60, 75 mm，其余运动信息与表1相同时，对比往程必失真取值域 $D_{I_g}$ 的大小。

2) 往程、返程运动角越小，区域 $D_I$ 越大，运动失真问题越容易发生。如图4b所示，行程 $h$ 及运动规律与表1相同，对应往程运动角 $\Phi_g$ 取 $90^\circ$ ， $120^\circ$ ， $150^\circ$ ， $170^\circ$ 时，对比区域 $D_{I_g}$ 的大小。

3) 本文选用的往程、返程为3-4-5多项式运

动规律,证明了区域 $D_I$ 的存在。对于不同运动规律,该区域的存在具有普遍性。如图4c所示,行程 $h$ 及运动角 $\Phi$ 与表1相同,运动规律 $s_g(\varphi)$ 分别取3-4-5多项式、正弦、改进梯形时,对比区域 $D_{I_g}$ 形态及大小。

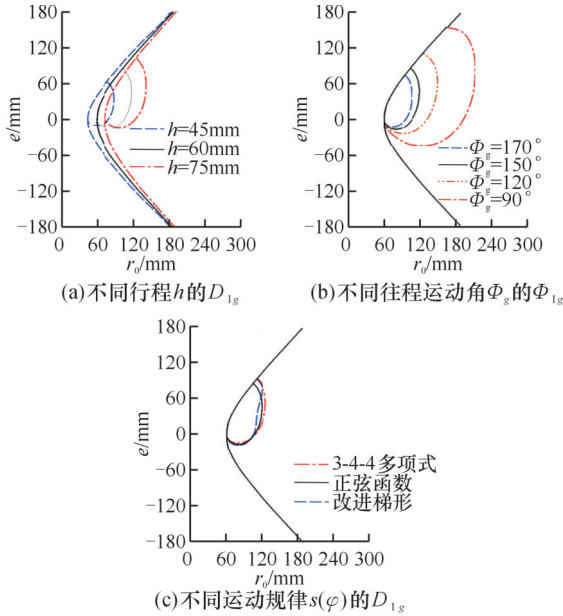


图4 不同运动信息的必失真取值域 $D_{I_g}$ 对比

Fig.4 Comparison of the inevitable undercutting regions  $D_{I_g}$  for different motion information

4) 相较于负半径滚子机构,正半径滚子机构只需要滚子半径 $R$ 选择合适(即 $R < \rho_{min}$ )皆不失真,故其只存在滚子型失真。负半径滚子机构非滚子型失真、滚子型失真皆存在,是其运动失真极易发生的根源,增加了设计的困难。

#### 4 运动保真解域、非解域

##### 4.1 滚子半径取值的分布特征分析

分析图1b可知,负半径滚子机构的滚子半径尺寸 $R$ 需满足:

$$R \geq \rho_{C_0} = r_0 \quad (12)$$

式中: $\rho_{C_0}$ 为理论轮廓 $\Gamma$ 上行程起始点 $C_0$ 的曲率半径,即基圆半径 $r_0$ 。

滚子半径的选取在理论轮廓确定之后进行,故以下是在 $(r_0, e) \in D_{II}$ 区域来讨论 $R$ 取值,这样才具有工程现实意义。

据式(8)、式(12),可将 $R$ 取值范围区分为两类。当不满足式(8),即 $R$ 取值范围属于

$$r_0 \leq R \leq \rho_{max} \quad (13)$$

则凸轮机构滚子型失真,本文称为I类 $R$ 取值域。满足式(8),凸轮机构运动保真,称为II类 $R$ 取值域。

记 $\rho_{gmax}, \rho_{rmax}$ 分别为凸轮理论轮廓行程、返程

段最大曲率半径:

$$\rho_{max} = \max(\rho_{gmax}, \rho_{rmax}) \quad (14)$$

表示取行程、返程两个最大值中的最大值,即全程最大曲率半径。

建立垂直数轴 $OR$ ,原点 $O$ ,则 $R$ 取值分布特征如图5所示。

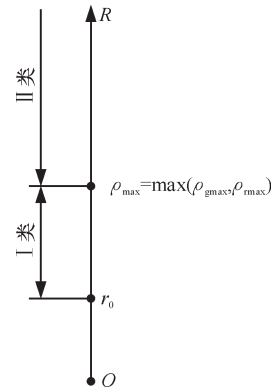


图5  $D_{II}$ 区域内 $R$ 取值分布特征

Fig.5 Distribution characteristics of  $R$  values under  $D_{II}$  area

##### 4.2 空间模型构建与分析

将垂直数轴 $OR$ 嫁接于 $Or_0e$ 二维坐标系,构建 $Or_0eR$ 三维坐标系。

据式(11)建立覆盖 $D_{II}$ 区域的 $R=r_0$ 平面 $S_{r_0}$ ,其上方空间为负半径滚子机构的滚子半径 $R$ 取值域。通过遍历曲率半径曲线族 $\{\rho\}$ ,得到各曲率半径曲线的 $\rho_{max}$ ,生成覆盖 $D_{II}$ 区域的连续曲面 $S_{\rho_{max}}$ ,如图6所示。

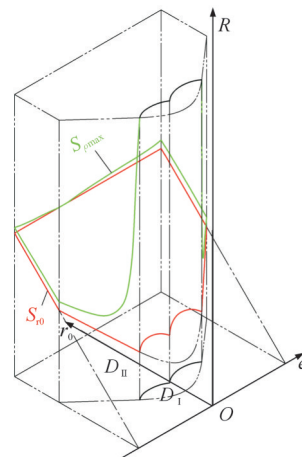


图6  $(r_0, e, R)$ 空间模型

Fig.6 Three-dimensional spatial model of  $(r_0, e, R)$

由图6可知,随着 $r_0$ 增大,靠近 $r_0$ 轴附近, $S_{\rho_{max}}$ 与 $S_{r_0}$ 趋于重合(即 $\rho_{max} = r_0$ )。为表述简单、清晰,4.1节仅讨论了 $S_{r_0}$ 与 $S_{\rho_{max}}$ 曲面不重合的一般情况(即 $\rho_{max} > r_0$ ,见图5)。

据式(7)、式(8),对应 $D_I$ 区域的 $S_{r_0}$ 上方空间

不满足运动保真条件,为非滚子型失真的 $(r_0, e, R)$ 非解域 $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$ ;对应 $D_{\parallel}$ 区域的 $S_{r_0}$ 上方与 $S_{\rho_{\text{max}}}$ 下方之间空间即 I 类 $R$ 取值域不满足运动保真条件,为滚子型失真的 $(r_0, e, R)$ 非解域 $\Omega_{\text{II}}^{\text{I}}$ ;  $S_{\rho_{\text{max}}}$ 上方空间即 II 类 $R$ 取值域为满足运动保真条件的 $(r_0, e, R)$ 解域 $\Omega^*$ 。

图 7 所示为解域 $\Omega^*$ (绿色部分)、非解域 $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$ / $\Omega_{\text{II}}^{\text{I}}$ (黑色/灰色部分)。解域 $\Omega^*$ 直观阐释了凸轮基圆半径 $r_0$ 、偏距 $e$ 及滚子半径 $R$ 的取值范围、满足运动保真条件的最小尺寸解以及凸轮轮廓的分析、设计方法等。

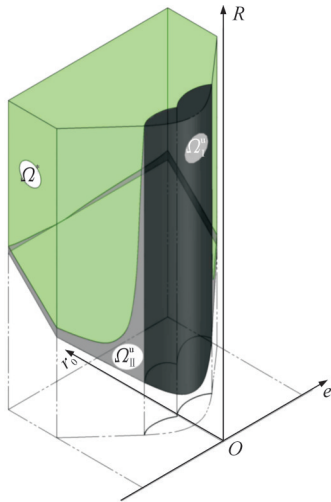


图 7 运动保真非解域 $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$ 、 $\Omega_{\text{II}}^{\text{I}}$ 和解域 $\Omega^*$

Fig.7 The solution space  $\Omega^*$  and two types of non-solution space  $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$ 、 $\Omega_{\text{II}}^{\text{I}}$  for ensuring no-undercutting

### 4.3 两类非解域内的凸轮轮廓形貌特征分析

本小节各图例中往程返程、近远休程凸轮轮廓及其曲率半径曲线分别选用绿色、红色、紫色和蓝色实线表示。凸轮理论轮廓 $\Gamma$ 及其曲率半径曲线 $\rho-\varphi$ 用细实线,凸轮工作轮廓 $\Gamma_w$ 及其曲率半径曲线 $\rho_w-\varphi$ 用粗实线表示。 $\Gamma$ 与 $\Gamma_w$ 中对应点用相同字母表示、加“/”以分别。以往程为例结合曲率半径曲线分析凸轮轮廓形貌特征。

#### 4.3.1 非滚子型失真非解域内的凸轮轮廓形貌特征分析

1) 凸轮理论轮廓 $\Gamma$ 呈现“凸-凹-凸”形貌,其曲率半径曲线 $\rho-\varphi$ 为不连续的 3 个分支,且横跨坐标横轴,如图 8 所示。图 8a 中 $g'_1g'_2$ 段为内凹段,对应图 8b 坐标横轴下方的“n”形中间分支曲线,其曲率半径小于 0。

2) 凸轮工作轮廓 $\Gamma_w$ 呈燕尾交叉,出现运动失真(即非滚子型失真)现象,如图 8a 所示。其曲率半径曲线 $\rho_w-\varphi$ 为不连续的 3 个分支,如图 8b 所示。 $\rho_w-\varphi$ 左右分支与 $\varphi$ 轴交点为 $j_1, j_2$ ,其曲率半

径为 0,对应 $\Gamma_w$ 上两交叉点。 $j_1, j_2$ 两点之间包含曲率半径小于 0 的左下分支、大于 0 的中上分支及小于 0 的右下分支 3 个部分,故 $\Gamma_w$ 上燕尾交叉处的 $j_1j_2$ 段由“内凹、外凸、内凹”(  $j_1g_1, g_1g_2, g_1j_2$  )三区段构成,称之为燕尾交叉 I 型。

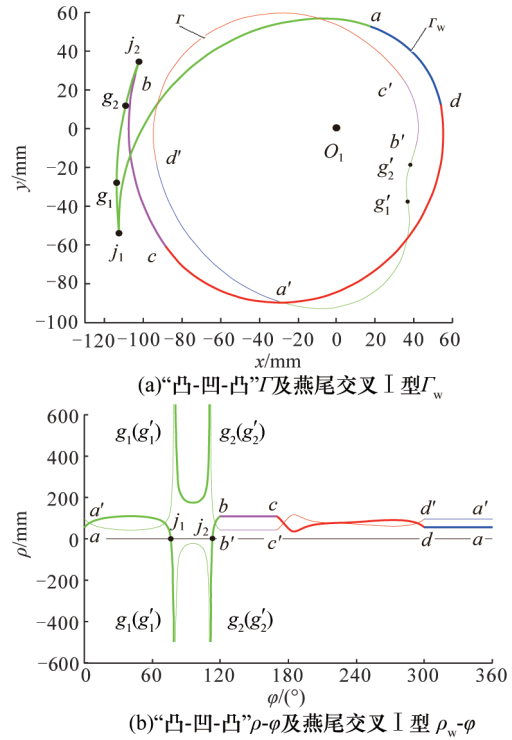


图 8 非解域 $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$ 内凸轮轮廓及曲率半径曲线

Fig.8 The cam profile and curvature radius curves under the non-solution space of  $\Omega_{\text{I}}^{\text{I}}$

#### 4.3.2 滚子型失真非解域内的凸轮轮廓形貌特征分析

1) 凸轮理论轮廓 $\Gamma$ 呈现“纯凸”形貌, $\rho-\varphi$ 曲线为连续的单支,且恒位于坐标横轴上方,如图 9 所示。

2) 此时 $R < \rho_{g_{\text{max}}}$ ,凸轮工作轮廓 $\Gamma_w$ 呈燕尾交叉,出现运动失真(即滚子型失真)现象,如图 9a 所示。 $\rho_w-\varphi$ 为连续的单支曲线,与 $\varphi$ 轴交点为 $j_1, j_2$ ,对应轮廓线上交叉点如图 9b 所示。两交点 $j_1, j_2$ 之间曲率半径小于 0,故工作轮廓燕尾交叉处 $j_1j_2$ 段为单一的内凹形貌,称之为燕尾交叉 II 型。

## 5 设计实例

机构运动信息见表 1。因结构、空间布局等限制,限取 $-15 \text{ mm} \leq e \leq 15 \text{ mm}, R \leq 500 \text{ mm}$ 。

1) 选取 $e = 15 \text{ mm}$ ,提出如下的 3 套设计方案:  
 ①  $r_0 = 100 \text{ mm}, R = 400 \text{ mm}$ ; ②  $r_0 = 150 \text{ mm}, R = 200 \text{ mm}$ ; ③  $r_0 = 200 \text{ mm}, R = 250 \text{ mm}$ 。试校核是否发生运动失真。

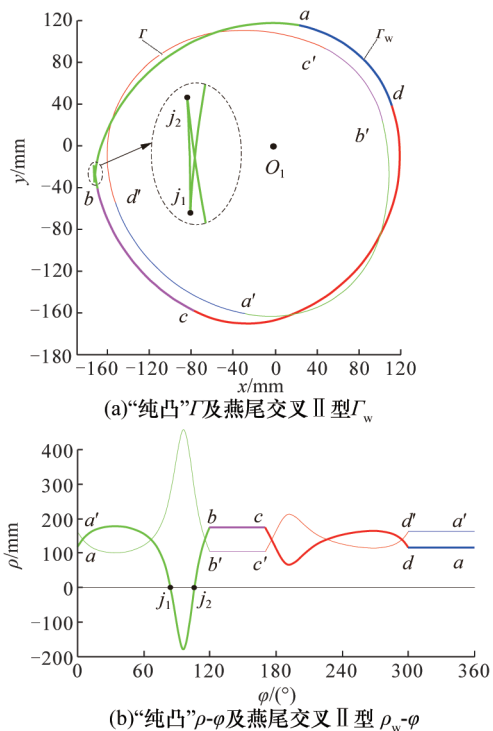


图9 非解域 $\Omega_{II}$ 的凸轮轮廓及其曲率半径曲线  
 Fig.9 The cam profile and curvature radius curves under the non-solution of  $\Omega_{II}$

2) 设计满足运动保真条件的最小尺寸解。

据4.2节方法获得运动保真解域 $\Omega^*$ ,取 $e=15\text{ mm}$ 平面截取 $\Omega^*$ ,可得图10所示 $r_0R$ 坐标系中的绿色、灰色和黑色区域。曲线 $abc$ 上方绿色区域为运动保真区域;折线 $def$ 与曲线 $abc$ 之间灰色区域为滚子型失真区域;折线 $ghed$ 围成的黑色区域为非滚子型失真区域。

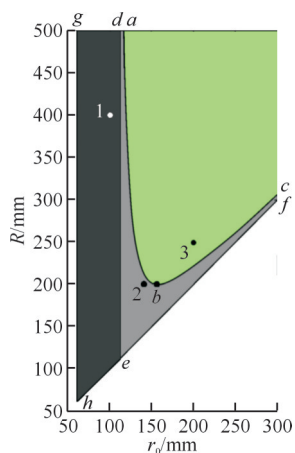


图10  $e=15\text{ mm}$ 运动失真和保真区域  
 Fig.10 The region of undercutting and no-undercutting of  $e=15\text{ mm}$

将设计方案①、②和③的尺寸数据映射到图10中,得到图10中1、2和3设计点。点1处于非滚子型失真区域,故方案①发生非滚子型运动失真;点2处于滚子型失真区域,故方案②发生滚子型运动失真;点3处于运动保真区域,故方案③运动保真。

型运动失真;点3处于运动保真区域,故方案③运动保真。

如图10所示, $e=15\text{ mm}$ 时,满足运动保真条件的最小尺寸解为点 $b(156.85, 199.84)$ 。类似地,遍历 $-15\text{ mm} \leq e \leq 15\text{ mm}$ 取值范围内各值,可得最小尺寸解的系列点 $(r_0, R_{\min})$ 。部分结果见表2。

表2  $e$ 不同取值的结果

Tab.2 The results for different  $e$  value

	$e/\text{mm}$						
	-15	-10	-5	0	5	10	15
$r_0/\text{mm}$	144.78	139.36	139.09	144.72	150.08	154.32	156.85
$R_{\min}/\text{mm}$	176.18	177.88	179.40	185.89	191.28	195.87	199.84

由表2可知,在 $e$ 取值范围内, $R_{\min}$ 值随着 $e$ 的增大而增大, $e=-15\text{ mm}$ 时, $R_{\min}=176.18\text{ mm}$ 最小,即 $e=-15\text{ mm}$ 、 $r_0=144.78\text{ mm}$ 和 $R=176.18\text{ mm}$ 为满足运动保真条件的最小尺寸解。

图11所示是依据本文方法并综合考虑传动性能和接触强度条件<sup>[18]</sup>设计制作的实物样机,验证了本文理论方法的正确性。



图11 实物样机

Fig.11 The physical prototype

## 6 结论

1) 通过对正负半径滚子机构的深入比较研究,发现揭示出后者的凸轮理论轮廓、工作轮廓是共轭的异向等距曲线,提出了基于理论轮廓的运动保真新判据。

2) 发现揭示出运动失真必发生/或发生的两类 $(r_0, e)$ 取值域,以及对应的非滚子型/滚子型失真两个新概念;给出了行程、运动角及运动规律对运动失真必发生取值域的影响规律。

3) 构建 $(r_0, e, R)$ 三维空间模型,获得了满足运动保真条件的解域和对应非滚子型/滚子型失真的两类非解域,深入剖析了两类非解域内的燕尾交叉I型/II型两类凸轮工作轮廓形貌特征。

综上所述,本文揭示了负半径滚子机构运动失真问题极易发生、非常突出的症结和根源,发展

和丰富了负半径滚子机构的设计分析理论和方  
法,将对负半径滚子机构的推广应用起到积极的  
推动和促进作用,具有一定理论价值和工程意义。

#### 参考文献:

- [1] 林梦杰,李延平,常勇. 面向避障和紧凑的浮动滚子推杆盘形凸轮机构尺寸综合问题[J]. 中国机械工程, 2018, 29(20): 2467-2473.  
LIN Mengjie, LI Yanping, CHANG Yong. Size Synthesis of Disc Cam Mechanisms with Floating Roller Pushrods Aiming at Obstacle Avoidance and Compact[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(20): 2467-2473.
- [2] 范武,林梦杰,李延平,等. 浮动滚子推杆等跨凸轮机构及其尺寸综合的正-逆映射求交方法[J]. 中国机械工程, 2018, 29(3): 286-294.  
FAN Wu, LIN Mengjie, LI Yanping, et al. Dimensional Synthesis of Equal-span Cam Mechanisms with Floating Roller Pushrods Based on Technology of Forward-inverse Mapping Intersection[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(3): 286-294.
- [3] CARRA S, GARZIERA R, PELLEGRINI M, et al. Criteri per la Progettazione di Camme Speciali (Design Criteria for Special Cams)[C]//Proceedings of XXXI AIAS Conference. Parma, 2002.
- [4] CARRA S, GARZIERA R, PELLEGRINI M. Synthesis of Cams with Negative Radius Follower and Evaluation of the Pressure Angle[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(10): 1017-1032.
- [5] WU Li, LIU C H, CHEN T W. Disc Cam Mechanisms with Concave-faced Followers[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2009, 223: 1443-1448.
- [6] 贾延龄,王栋梁,张尚盈,等. 一种新型凸轮机构——凹圆弧底从动件盘形凸轮机构的设计(一)[J]. 机械设计, 1998, 15(11): 39-41.  
JIA Yanling, WANG Dongliang, ZHANG Shangying, et al. Design for a New Type of Cam Mechanisms—Disk Cam Mechanism with Concave Arc Follower (Part 1)[J]. Journal of Machine Design, 1998, 15(11): 39-41.
- [7] 贾延龄,王栋梁,张尚盈,等. 一种新型凸轮机构——凹圆弧底从动件盘形凸轮机构的设计(二)[J]. 机械设计, 1998, 15(12): 29-30.  
JIA Yanling, WANG Dongliang, ZHANG Shangying, et al. Design for a New Type of Cam Mechanisms—Disk Cam Mechanism with Concave Arc Follower (Part 2)[J]. Journal of Machine Design, 1998, 15(12): 29-30.
- [8] 李延平. 正置式凹圆弧底直动从动件盘形凸轮机构的最小尺寸设计[J]. 机械设计, 2002, 19(8): 30-33.  
LI Yanping. Minimum Dimension Design of Disc Cam Mechanism with Upright Installed Concave Arc Bottomed Translating Follower [J]. Journal of Machine Design, 2002, 19(8): 30-33.
- [9] LIN Rongfu, CHANG Yong. Mechanical Analysis of Disc Cam Mechanisms with Negative Radius Roller Translating Follower [J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 184/185: 301-306.
- [10] LIN Rongfu, CHANG Yong. Optimization Design of Disc Cam Mechanisms with an Offset Translating Negative Radius Roller Follower[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 184/185: 774-779.
- [11] QU Chenglong, CHANG Yong. Design of the Disc Cam Profile with Negative Radius Translating Roller Follower [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 470: 412-415.
- [12] HIDALGO-MARTÍNEZ M, SANMIGUEL-ROJAS E, BURGOS M A. Design of Cams with Negative Radius Follower Using Bézier Curves [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 82: 87-96.
- [13] SANMIGUEL-ROJAS E, HIDALGO-MARTÍNEZ M. Cam Mechanisms Based on a Double Roller Translating Follower of Negative Radius[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 95: 93-101.
- [14] HSIEH J F, HSIEH W C. Design of Cam Mechanism with Negative Radius Roller-follower[J]. MATEC Web of Conferences, 2016, 71: 04003.
- [15] HSIEH J F. Design and Analysis of Cam Mechanism with Negative Radius Roller-follower[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2016, 40(1): 89-100.
- [16] 吴秋平,常勇,李延平. 负半径滚子直动推杆盘形凸轮机构的运动保真综合[J]. 机械设计与研究, 2016, 32(2): 26-30.  
WU Qiuping, CHANG Yong, LI Yanping. The Dimension Synthesis of Cam Mechanisms with Negative Radius Follower Based on Movement Fidelity[J]. Machine Design & Research, 2016, 32(2): 26-30.
- [17] CHANG Yong, WU Qiuping, LI Yanping. Size Synthesis Method for Disc Cam Mechanisms with a Negative Radius Translating Roller Follower[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(19): 3624-3634.
- [18] 常勇,吴秋平,陈续扬,等. 负半径滚子直动推杆盘形凸轮机构的可视映射尺度综合与比较优势[J]. 机械工程学报, 2017, 53(1): 36-46.  
CHANG Yong, WU Qiuping, CHEN Xuyang, et al. Dimension Synthesis of Cam Mechanisms with Negative Radius Follower Based on Technology of the Visualization-oriented Mapping and Comparative Advantage[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(1): 36-46.
- [19] YAN Zhouong, CHEN Xinbo, YAN Min, et al. Design and Optimization of a Novel Electronic Mechanical Brake Actuator Based on Cam[J]. Actuators, 2023, 12(8): 329.
- [20] YAN Zhouong, CHEN Xinbo, WANG Wei. A Novel Underactuated Cam Mechanism [C]//Advances in Mechanism and Machine Science. Cham: Springer, 2024: 826-833.

(编辑 王旻玥)

作者简介:胡志超,男,1975年生,副教授。研究方向为机构分析/综合可视化等。E-mail:layman@jmu.edu.cn。常勇(通信作者),男,1964年生,教授。主要研究方向为凸轮与连杆机构学、机构分析/综合可视化等。E-mail:changyong@jmu.edu.cn。

#### 本文引用格式:

胡志超,常勇,杨富富,等. 负半径滚子直动推杆盘形凸轮机构运动保真及其解域研究[J]. 中国机械工程, 2026, 37(3): 604-611.  
HU Zhichao, CHANG Yong, YANG Fufu, et al. Study on Non-undercutting and Its Solution Spaces of Cam Mechanisms with Negative Radius Roller Follower[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(3): 604-611.