

# 冗余机器人的笛卡儿空间螺旋线性插值轨迹规划

王志强<sup>1</sup> 韩建海<sup>1,2,3\*</sup> 李向攀<sup>1,2</sup> 郭冰菁<sup>1,2</sup> 杜敢琴<sup>4</sup>

1.河南科技大学机电工程学院,洛阳,471003

2.机器人及智能系统河南省重点实验室,洛阳,471003

3.机械装备先进制造河南省协同创新中心,洛阳,471003

4.河南科技大学第一附属医院,洛阳,471003

**摘要:**通过分析对偶四元数与刚体运动、螺旋运动之间的关系并结合指数积公式,得到基于对偶四元数的末端位姿变换算子;根据牛顿-拉夫森法,将对偶四元数用于求解冗余机器人的逆运动学数值解;根据对偶四元数的线性插值特点提出一种基于螺旋线性插值的轨迹规划方法。两种冗余机器人验证了提出的轨迹规划方法能实现笛卡儿空间平滑运动和速度可控,且在求解运动学数值解时,使用对偶四元数比齐次矩阵具有更好的稳定性和更高的解算速度。

**关键词:**对偶四元数;轨迹规划;逆运动学;指数积;冗余机器人

中图分类号:TP242

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.01.011

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Cartesian Space Screw Linear Interpolation Trajectory Planning for Redundant Robots

WANG Zhiqiang<sup>1</sup> HAN Jianhai<sup>1,2,3\*</sup> LI Xiangpan<sup>1,2</sup> GUO Bingjing<sup>1,2</sup> DU Ganqin<sup>4</sup>

1.School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang, Henan, 471003

2.Henan Provincial Key Laboratory of Robotics and Intelligent Systems, Luoyang, Henan, 471003

3.Collaborative Innovation Center of Machinery Equipment Advanced Manufacturing of Henan Province, Luoyang, Henan, 471000

4.The First Affiliated Hospital of Henan University of Science and Technology, Luoyang, Henan, 471003

**Abstract:** By analyzing the relationship between dual quaternions and rigid body motion, and the relationship between dual quaternions and screw motion, a transformation operator of the end-effector pose was obtained based on dual quaternions with the combination of PoE formula. Based on the Newton-Raphson method, the dual quaternions were applied to solve the numerical solution of the inverse kinematics of redundant robots. Based on the linear interpolation characteristics of dual quaternions, a trajectory planning method was proposed based on screw linear interpolation. Taking two types of redundant robots as examples, the proposed trajectory planning method that achieved smooth motion and controllable velocity in Cartesian space was verified. Dual quaternions have better stability and higher solving speed than homogeneous matrices in solving kinematics numerical solutions.

**Key words:** dual quaternion; trajectory planning; inverse kinematics; product of exponentials (PoE); redundant robot

### 0 引言

对偶四元数可被视为四元数的扩展,能同时表达平移和旋转,与齐次矩阵相比,它使用的参数更少,形式更简洁<sup>[1-4]</sup>。平移运动和旋转运动是研究刚体运动的基础。计算机图形学蒙皮算法中,用对偶四元数表示骨骼的刚体运动具有内存占用少、计算速度高的特点<sup>[5-6]</sup>。用对偶四元数表示航天器位姿能精确、稳定地实现运动控制<sup>[7-8]</sup>。机器

人运动学中,位姿的表达与刚体运动有关,而对偶四元数和齐次矩阵表示刚体运动是等效的,但对偶四元数计算位姿变换的效率更高<sup>[9]</sup>。

旋量理论能以简洁的形式分析机器人的结构,在机器人运动学和动力学的研究中得到深入而广泛的应用<sup>[10-13]</sup>,可用李代数表示刚体的螺旋运动,并通过指数映射将李代数  $se(3)$  转换为特殊欧氏群  $SE(3)$ 。以李代数的指数建立的运动学建模方法即指数积公式(product of exponentials, PoE)简化了建模过程,并将对偶四元数和

收稿日期:2023-11-23

基金项目:河南省科技攻关项目(212102310890,212102310249)

李代数引入机器人运动学领域。对偶四元数与旋量有紧密联系,三维空间的轴线和速度旋量可用纯对偶四元数唯一表示<sup>[14-15]</sup>。纯对偶四元数的指数对应李代数的指数运算,单位对偶四元数的对数对应特殊欧氏群的对数运算,因而指数积公式建立的运动学模型可用于对偶四元数的计算。

逆运动学是将笛卡儿空间运动轨迹映射到机器人关节空间。冗余机器人的自由度多于所在约束空间的自由度,其笛卡儿空间到关节空间的映射有无穷多个结果。使用数值法求解冗余机器人逆运动学问题是一种常用方法,而对偶四元数的应用有助于提高解算速度。数值法由牛顿-拉夫森法扩展而来,利用末端位姿的一阶偏导数——雅可比矩阵,根据梯度下降逐渐减小位姿误差,通用于各种机器人模型<sup>[16-22]</sup>。使用齐次矩阵计算末端误差时,需要将旋转和平移分离,并分别使用矩阵乘法和向量减法计算末端位姿误差。使用对偶四元数计算末端误差只需进行对偶四元数乘法运算。与齐次矩阵对数运算相比,对偶四元数对数运算具有数据量少、计算效率高的特点<sup>[23]</sup>。

轨迹规划是机器人运动学的重要组成。机器人关节的运动受加速度的约束,而轨迹规划通常还需考虑机器人运动的平滑性问题。多项式规划、梯形速度规划、S形速度规划这些常用的规划方法都能使机器人平滑运动。笛卡儿空间中,上述规划方法需要根据6个自由度的差值进行逐一规划<sup>[24-26]</sup>。螺旋线性插值(screw linear interpolation, ScLERP)是一种对偶四元数插值方法<sup>[5,27-29]</sup>,起始和终止位姿已知时,插值轨迹呈现出绕某一空间轴线螺旋运动的特点。插值轨迹是一段螺旋线且插值变量是单变量。当改变插值步长并保持插值点时间间隔相等时,机器人末端运动速度发生改变。

为实现冗余机器人笛卡儿空间轨迹的平滑运动和速度可控,本文使用对偶四元数和旋量理论的一些方法,在冗余机器人运动学建模、逆运动学求解过程中替代齐次矩阵;基于螺旋线性插值方法的特性,提出了使用五次多项式改变插值步长的方法,使规划的笛卡儿空间轨迹平滑,机器人运动无冲击和抖动,还可根据笛卡儿空间的速度约束调节插值参数。

## 1 刚体运动、螺旋运动与对偶四元数

### 1.1 刚体运动和螺旋运动的单位对偶四元数表示

刚体运动是平移和旋转的运动组合。如图1所示,参考坐标系下,刚体平移向量为  $t$ , 旋转轴通过参考坐标系原点,用单位向量  $l$  表示,旋转角

度为  $\theta$ 。对偶四元数表示的刚体运动变换算子为

$$\hat{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} l + \epsilon \left( \frac{1}{2} t \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} t \cdot l \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} t \times l \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (1)$$

式中:  $\epsilon$  为对偶算子,  $\epsilon \times 1 = \epsilon$ ,  $\epsilon \times \epsilon = 0$ 。

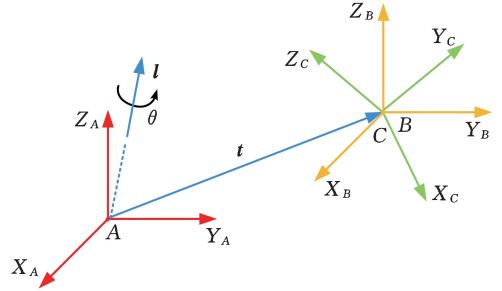


图1 刚体运动示意图

Fig.1 Schematic diagram of rigid body motion

螺旋运动和刚体运动等效,根据 Challes 定理,螺旋运动是刚体绕空间中某一轴线旋转和沿该轴线平移的复合运动。如图2所示,假设刚体绕轴线的旋转角度为  $\theta$ ,沿该轴线的平移距离为  $d$ ,其中,旋转轴用普吕克坐标  $(l; m)$  表示,向量  $m$  为轴线的矢矩。用对偶四元数表示的螺旋运动算子为

$$\hat{q} = \cos \frac{\hat{\theta}}{2} + (l + \epsilon m) \sin \frac{\hat{\theta}}{2} = \left( \cos \frac{\theta}{2} + l \sin \frac{\theta}{2} \right) + \epsilon \left( m \sin \frac{\theta}{2} - \frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2} + l \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (2)$$

$$\hat{\theta} = \theta + \epsilon d$$

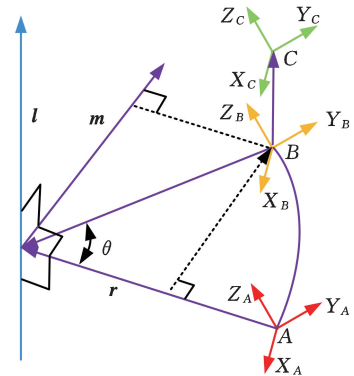


图2 螺旋运动示意图

Fig.2 Schematic diagram of screw motion

螺旋运动中的旋转角度  $\theta = 0$  时,  $\hat{q} = 1 + d\epsilon l/2$ 。螺旋运动中的平移距离  $d = 0$  时,  $\hat{q} = \cos(\theta/2) + l \sin(\theta/2) + \epsilon m \sin(\theta/2)$ ,如果螺旋运动的轴线穿过刚体坐标系原点,则旋转轴的矢矩为零,  $\hat{q} = \cos(\theta/2) + l \sin(\theta/2) + \epsilon 0$ 。

螺旋运动的变换算子与对偶四元数的指数运算相等,即

$$\hat{q} = \exp(\hat{\theta} \hat{\xi} / 2) \quad (3)$$

$$\hat{\xi} = 0 + l + \epsilon(0 + m)$$

对偶四元数存在对数运算:

$$\frac{\hat{\theta}}{2} \hat{\xi} = \ln \hat{q} \quad (4)$$

螺旋运动与刚体运动等效,两者表示的变换算子也相等。由式(1)、式(2)可知,2个对偶四元数的主部和对偶部都相等。对偶四元数主部都是单位四元数,因此式(1)、式(2)表示的旋转轴方向和旋转角度相同。式(1)、式(2)的对偶部相等,都是一个常规四元数,从而得到

$$\left. \begin{aligned} d &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{l} \\ \mathbf{m} &= (\mathbf{t} \times \mathbf{l} + (\mathbf{l} \times \mathbf{t}) \times \mathbf{l} \cot(\theta/2))/2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

表示齐次变换的对偶四元数  $\hat{q}$  直接计算得到的平移运动计算公式为

$$\hat{i} = \hat{q} \hat{q}^* = 1 + \epsilon(d\mathbf{l} + \mathbf{m} \sin \theta + (1 - \cos \theta)\mathbf{l} \times \mathbf{m})$$

平移向量为

$$\mathbf{t} = d\mathbf{l} + \mathbf{m} \sin \theta + (1 - \cos \theta)\mathbf{l} \times \mathbf{m} \quad (6)$$

其中,  $\hat{q}^*$  为单位对偶四元数的组合共轭,同时具有四元数共轭和对偶数共轭的性质。

## 1.2 旋量理论与对偶四元数

旋量理论中,李代数  $se(3)$  的伴随变换表示将李代数从一个坐标系变换到另一个坐标系:

$$Ad_g \xi = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\xi = [\mathbf{w}^\top \quad \mathbf{v}^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$$

式中:  $Ad_g$  为伴随变换算子,下标  $g \in SE(3)$  是齐次矩阵,表示两个坐标系之间的变换关系;  $\mathbf{R}$  为旋转矩阵;  $\mathbf{t}^\wedge$  为平移向量  $\mathbf{t}$  的反对称矩阵;  $\xi$  为六维向量,表示李代数  $se(3)$ ;  $\mathbf{w}$ 、 $\mathbf{v}$  都是三维向量,分别表示角速度和线速度。

用一个单位对偶四元数替代齐次矩阵,则对偶四元数形式的伴随变换为

$$Ad_{\hat{q}} \hat{\xi} = \hat{q} \hat{\xi} \hat{q}^* \quad (8)$$

式中:  $\hat{q}^*$  为  $\hat{q}$  的共轭。

使用单位对偶四元数表示的坐标变换存在逆变换,即满足  $\hat{q} \hat{q}^{-1} = \hat{q} \hat{q}^* = 1$ <sup>[30]</sup>,对  $\hat{q} \hat{q}^{-1} = \hat{q} \hat{q}^* = 1$  进行微分可得  $\dot{\hat{q}} \hat{q}^* + \hat{q} \dot{\hat{q}}^* = 0$ 。根据对偶四元数乘法和共轭性质,可得

$$\dot{\hat{q}} \hat{q}^* = -(\hat{q} \dot{\hat{q}}^*)^* \quad (9)$$

由式(9)可知,  $\hat{q} \dot{\hat{q}}^*$  是一个纯对偶四元数。

令  $\delta = \hat{q} \dot{\hat{q}}^*$ ,则  $\dot{\hat{q}} = \delta \hat{q}$ 。对  $\dot{\hat{q}} = \delta \hat{q}$  积分可得  $\hat{q} = \exp(\delta) \hat{q}_0$ ,令  $\hat{q}_0 = 1$ ,得到  $\hat{q} = \exp(\delta)$ 。由旋量理论可知,如果用单位对偶四元数表示李群,那么李代数可用纯对偶四元数表示,且李代数映射到李群同样也是指数运算。

## 2 机器人运动学与轨迹规划

### 2.1 指数积(PoE)公式的对偶四元数形式表示

指数积公式只需要建立参考坐标系和末端坐

标系,简化了建模过程,使运动变换更加直观。指数积公式利用指数运算将李代数映射为李群,最终的末端位姿仍使用齐次矩阵表示。

螺旋运动可用对偶四元数表示,通过指数积公式建立的运动学模型也可由对偶四元数表示。在参考坐标系下,使用普吕克坐标表示机器人运动关节的静态位置。如图3所示,对于旋转关节,通过关节轴线的单位方向向量  $\mathbf{l}$  和轴线上任意一点  $\mathbf{r}$  来描述该旋转轴线,得到由向量  $\mathbf{l}$  和矢矩  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{l}$  组成的普吕克坐标  $(\mathbf{l}; \mathbf{m})$ 。对于移动关节,移动方向使用单位向量  $\mathbf{l}$  描述,得到普吕克坐标  $(\mathbf{0}; \mathbf{l})$ 。旋转和平移的运动量均使用  $\theta$  表示,旋转关节中  $\theta$  为转角,平移关节中  $\theta$  为距离。

通过对运动关节的建模,并结合螺旋运动的对偶四元数表示方法,可得运动变换后的连杆与其初始位姿之间的转换关系。将普吕克坐标用纯对偶四元数  $\hat{\xi}$  表示,得到一个用纯对偶四元数表示的李代数  $\theta \hat{\xi}/2$ 。使用对偶四元数指数运算得到描述位姿变换的单位对偶四元数算子  $\hat{q} = \exp(\theta \hat{\xi}/2)$ 。

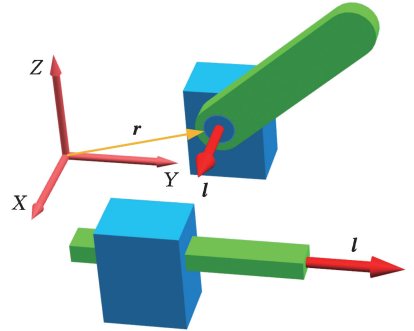


图3 旋转关节和平移关节示意图

Fig.3 Schematic diagram of rotational and translational joints

对于串联机器人,单个关节建模完成后,机器人的运动变换可看作是由末端关节到基座连接处关节依次位姿变换,则串联机器人末端位姿与初始位姿之间的变换关系为

$$\hat{q} = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_n \quad (10)$$

串联机器人末端坐标系的初始位姿与参考坐标系存在单位对偶四元数  $\hat{q}_0$  表示的固定变换关系,则机器人末端相对参考坐标系的变换关系为

$$\hat{q} = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_n \hat{q}_0 \quad (11)$$

### 2.2 机器人运动学的雅可比矩阵

由指数积公式可得串联机器人末端位姿  $\hat{q}_{\text{end}} = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_n \hat{q}_0$ ,将其微分得到

$$\dot{\hat{q}}_{\text{end}} = (\dot{\theta}_1 \hat{\xi}_1 \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_n \hat{q}_0 + \dot{\theta}_2 \hat{q}_1 \hat{\xi}_2 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_n \hat{q}_0 + \cdots + \dot{\theta}_n \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{\xi}_n \hat{q}_n \hat{q}_0)/2 \quad (12)$$

$$\hat{\xi}_i = \mathbf{l}_i + \varepsilon \mathbf{m}_i$$

式中:  $\dot{\theta}_i$  为关节  $i$  的角速度。

对机器人末端位姿求逆得到

$$\hat{q}_{\text{end}}^{-1} = \hat{q}_0^* \hat{q}_1^* \cdots \hat{q}_n^* \hat{q}_1^* \quad (13)$$

对偶四元数表示的机器人末端的空间速度为

$$\hat{\delta}_{\text{end}} = 2\dot{\hat{q}}_{\text{end}} \hat{q}_{\text{end}}^{-1} = \dot{\theta}_1 \hat{\xi}_1 + \dot{q}_1 \dot{\theta}_2 \hat{\xi}_2 \hat{q}_1^* + \cdots + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cdots \dot{q}_{n-1} \dot{\theta}_n \hat{\xi}_n \hat{q}_{n-1}^* \cdots \hat{q}_2^* \hat{q}_1^* \quad (14)$$

令

$$\hat{\theta} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \cdots \quad \dot{\theta}_n]^T$$

$$\hat{J} = [\hat{j}_1 \quad \hat{j}_2 \quad \cdots \quad \hat{j}_n]$$

$\hat{J}$  是元素为纯对偶四元数的行向量,可映射为几何雅可比矩阵,从而得到

$$\left. \begin{aligned} \hat{\delta}_{\text{end}} &= \hat{J} \hat{\theta} \\ \hat{j}_i &= (Ad_{\hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_{i-1}}) \hat{\xi}_i = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \cdots \hat{q}_{i-1} \hat{\xi}_i \hat{q}_{i-1}^* \cdots \hat{q}_2^* \hat{q}_1^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由于无法计算纯对偶四元数向量  $\hat{J}$  的逆,为表示笛卡儿空间速度与关节空间速度的映射关系,将  $\hat{J}$  中的所有元素变换成六维列向量。最终得到与文献[31]结果一致的空间雅可比矩阵:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{J}_n] \quad (16)$$

$$\mathbf{J}_i = (Ad_K) \xi_i \quad K = \exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \theta_j \xi_j^\wedge\right)$$

### 2.3 逆运动学的求解

逆运动学的数值解由迭代计算获得。机器人零位末端位姿的对偶四元数表示为  $\hat{q}_0$ , 目标末端位姿的对偶四元数表示为  $\hat{q}_d$ , 则用对偶四元数表示的位姿误差为

$$\hat{e} = \hat{q}_d \hat{q}_0^{-1} = \hat{q}_d \hat{q}_0^* \quad (17)$$

$\hat{e}$  为初始误差,使用对偶四元数对数运算得到  $\hat{e}$  对应的速度旋量即末端位姿的梯度。

雅可比矩阵存在不满秩的情况,因此矩阵的逆不一定存在。为避免矩阵奇异无法得到速度旋量,使用阻尼最小二乘法求解逆雅可比矩阵。将雅可比矩阵进行奇异值分解:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的行数  $m$  大于列数  $n$  时,  $z = n$ ; 反之,  $z = m$ 。求解逆矩阵可得

$$\mathbf{J}^{-1} = \sum_{i=1}^z \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + k^2} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \quad (19)$$

式中:  $k$  为阻尼因子。

雅可比矩阵可将关节速度映射为末端速度,位姿误差代表的末端速度可通过逆雅可比矩阵映

射为关节速度。因此更新关节位置,得到新的末端位姿对偶四元数,直至与期望位姿相等,具体步骤如下:

1) 计算末端位姿误差  $\hat{e}_i = \hat{q}_d \hat{q}_i^*$ , 根据对偶四元数对数运算,获得笛卡儿空间位姿梯度  $\hat{\lambda}_i = \ln \hat{e}_i$ 。

2) 由于  $\hat{\lambda}_i$  是纯对偶四元数,故将其转换为六维向量  $\boldsymbol{\lambda}$ 。使用阻尼最小二乘法计算空间雅可比矩阵的逆  $\mathbf{J}^{-1}(\theta_i)$ , 将笛卡儿空间位姿梯度映射到关节空间,得到关节角度梯度  $\Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\lambda}$ 。

3)  $\|\hat{\lambda}_i\|$  若小于误差  $\eta$ , 则结束迭代。否则,更新关节角度  $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i + \Delta \boldsymbol{\theta}$  和末端姿态  $\hat{q}_{i+1} = \hat{q}(\boldsymbol{\theta}_{i+1})$ , 重新执行步骤 1)。

### 2.4 轨迹规划

笛卡儿空间轨迹规划一般需要在 6 个自由度上独立规划<sup>[26-27]</sup>。尽管单独规划能保证机器人平滑运动,但不容易实现空间速度控制。螺旋线性插值具有螺旋运动特征,插值变量只有一个,改变该插值变量就会改变空间速度,从而实现对空间速度的控制。

螺旋线性插值由四元数的球面线性插值推广而来。四元数可表示旋转运动,球面线性插值保持旋转轴不变,沿着旋转轨迹进行插值,得到的圆弧轨迹是球面上两点之间的最短轨迹。对偶四元数可表示螺旋运动,螺旋线性插值的插值轨迹是螺旋运动结果。螺旋线虽然超出球面范围,但仍是螺旋运动中的最短轨迹。

螺旋线性插值公式为

$$S(\gamma; \hat{q}_A, \hat{q}_B) = \hat{q}_A (\hat{q}_A^* \hat{q}_B)^\gamma \quad (20)$$

式中:  $\gamma$  为插值步长,  $\gamma \in [0, 1]$ ;  $\hat{q}_A, \hat{q}_B$  分别为机器人末端的起始位姿和终止位姿。

螺旋线性插值轨迹由起始位姿和终止位姿决定,机器人沿插值轨迹的运动速度受插值步长影响。为使机器人能平滑运动,将插值步长设计为一个关于时间  $t$  的高阶函数或分段函数。本文选择使用五次多项式

$$\gamma = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (21)$$

进行轨迹规划。根据轨迹规划的笛卡儿空间速度和加速度约束条件确定多项式中的参数:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(0) &= 0 \\ \dot{\gamma}(0) &= 0 \\ \ddot{\gamma}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

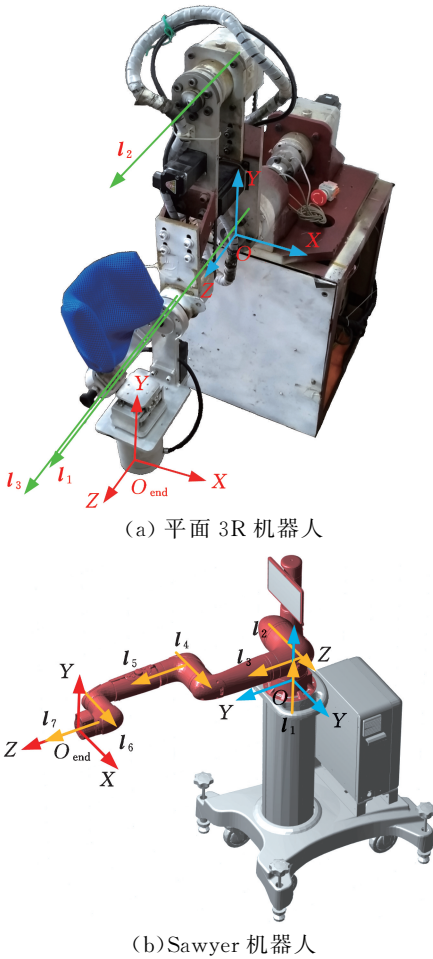
$$\left. \begin{aligned} \gamma(T) &= 1 \\ \dot{\gamma}(T) &= 0 \\ \ddot{\gamma}(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_3 &= 10/T^3 \\ a_4 &= -15/T^4 \\ a_5 &= 6/T^5 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中:  $T$  为机器人运动总时长。

### 3 实例分析

本文选择平面 3R 机器人和七自由度 Sawyer 机器人进行轨迹规划分析。平面 3R 机器人属于平面冗余机器人。螺旋线性插值可保证运动速度稳定可控, 圆弧轨迹能增加关节活动量。Sawyer 机器人是一种空间冗余机器人, 其逆运动学解算有一定困难。将对偶四元数用于 Sawyer 机器人的轨迹规划和逆运动学求解, 计算效率更高, 也能充分发挥机器人的灵活性。

如图 4 所示, 使用指数积公式对上述 2 个机器人进行运动学建模。通过建立参考坐标系  $\{O\}$ 、末端坐标系  $\{O_{end}\}$ 、关节轴线得到两种机器人关节轴线的普吕克坐标参数, 如表 1、表 2 所示。



(a) 平面 3R 机器人

(b) Sawyer 机器人

图 4 使用指数积公式建立的运动学模型

Fig.4 Kinematic model established by using PoE formula

表 1 平面 3R 机器人关节轴线的普吕克坐标参数

Tab.1 Plücker coordinate parameters of the joint axis of a planar 3R robot

关节	旋转轴	旋转轴矢矩
关节 1	$l_1 = z$	$m_1 = 0$
关节 2	$l_2 = z$	$m_2 = b_1 x$
关节 3	$l_3 = z$	$m_3 = 0$

表 2 Sawyer 机器人关节轴线的普吕克坐标参数

Tab.2 Plücker coordinate parameters of the joint axis of Sawyer robot mm

关节	旋转轴	旋转轴矢矩
关节 1	$l_1 = z$	$m_1 = 0$
关节 2	$l_2 = y$	$m_2 = (-237; 0; 81)$
关节 3	$l_3 = x$	$m_3 = (0; 237; -192)$
关节 4	$l_4 = y$	$m_4 = (-237; 0; 481)$
关节 5	$l_5 = x$	$m_5 = (0; 237; -24)$
关节 6	$l_6 = y$	$m_6 = (-237; 0; 881)$
关节 7	$l_7 = x$	$m_7 = (0; 237; -160)$

由平面 3R 机器人的普吕克坐标可得连杆及末端相对零位的坐标变换算子:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_1 &= \cos \frac{\theta_1}{2} + z \sin \frac{\theta_1}{2} + \epsilon 0 \\ \hat{q}_2 &= \cos \frac{\theta_2}{2} + z \sin \frac{\theta_2}{2} + \epsilon (b_1 x \sin \frac{\theta_2}{2}) \\ \hat{q}_3 &= \cos \frac{\theta_3}{2} + z \sin \frac{\theta_3}{2} + \epsilon 0 \\ \hat{q}_0 &= 1 + \epsilon (-\frac{b_3}{2} y) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

连杆的实际长度  $b_1, b_2, b_3$  分别为 0.36 m、0.36 m、0.23 m。

Sawyer 机器人关节的几何尺寸根据 MATLAB 软件中 Sawyer 机器人的 URDF 文件得到。连杆 1~7 相对零位时的坐标变换算子为

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_1 &= \cos \frac{\theta_1}{2} + z \sin \frac{\theta_1}{2} + \epsilon 0 \\ \hat{q}_2 &= \cos \frac{\theta_2}{2} + y \sin \frac{\theta_2}{2} + \epsilon (m_2 \sin \frac{\theta_2}{2}) \\ \hat{q}_3 &= \cos \frac{\theta_3}{2} + x \sin \frac{\theta_3}{2} + \epsilon (m_3 \sin \frac{\theta_3}{2}) \\ \hat{q}_4 &= \cos \frac{\theta_4}{2} + y \sin \frac{\theta_4}{2} + \epsilon (m_4 \sin \frac{\theta_4}{2}) \\ \hat{q}_5 &= \cos \frac{\theta_5}{2} + x \sin \frac{\theta_5}{2} + \epsilon (m_5 \sin \frac{\theta_5}{2}) \\ \hat{q}_6 &= \cos \frac{\theta_6}{2} + y \sin \frac{\theta_6}{2} + \epsilon (m_6 \sin \frac{\theta_6}{2}) \\ \hat{q}_7 &= \cos \frac{\theta_7}{2} + x \sin \frac{\theta_7}{2} + \epsilon (m_7 \sin \frac{\theta_7}{2}) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

末端相对零位时的坐标变换算子为

$$\hat{q}_0 = 0.5 + 0.5i + 0.5j + 0.5k + \epsilon (-0.353 + 0.234i - 0.1545j + 0.273k) \quad (26)$$

### 3.1 逆运动学分析

在相同的计算平台下, 使用 MATLAB 将平面 3R 机器人和 Sawyer 机器人的正运动学、雅可比矩阵等编写为独立的函数文件, 按照 2.3 节的数值求解步骤, 随机选取 500 个不同的末端位姿进行实例分析。与使用齐次矩阵求解逆运动数值解相比, 对偶四元数法在解算速度和稳定性上都更优。

图 5、图 6 所示分别为平面 3R 机器人逆运动

学数值解的耗用时间和迭代次数。对偶四元数法迭代次数不超过设定阈值 1000 的有 492 例,而齐次矩阵法有 465 例。去除迭代次数超过阈值的算例后,对偶四元数法平均解算时间是 0.587 ms,而齐次矩阵法平均解算时间是 0.976 ms。

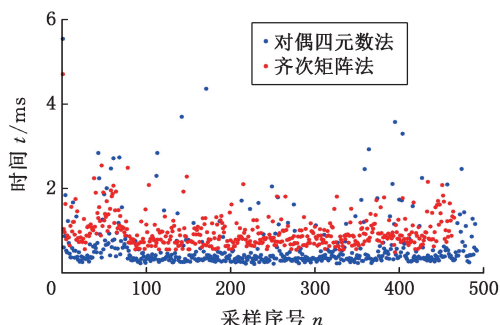


图 5 平面 3R 机器人逆运动学数值解算耗用时间  
Fig.5 Time consumption for numerical solution of inverse kinematics of planar 3R robot

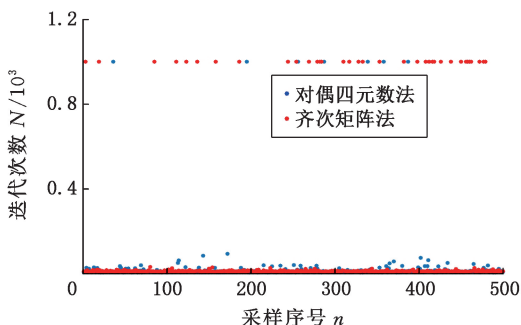


图 6 平面 3R 机器人逆运动学数值解算迭代次数  
Fig.6 Iteration times of inverse kinematics numerical solution for planar 3R robot

Sawyer 机器人实例中,对偶四元数法迭代次数不超过设定阈值的有 500 例,而齐次矩阵法有 496 例,如图 7 所示。去除迭代次数超过阈值的解算例,对偶四元数法平均解算时间是 1.961 ms,齐次矩阵法平均解算时间是 8.295 ms,如图 8 所示。

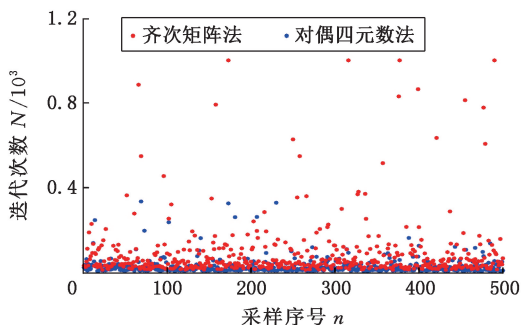


图 7 Sawyer 机器人逆运动学数值解算迭代次数  
Fig.7 Iteration times of Sawyer robot inverse kinematic numerical solution

### 3.2 运动轨迹规划

#### 3.2.1 平面 3R 机器人轨迹规划

平面 3R 机器人(康复机器人)第三连杆的延

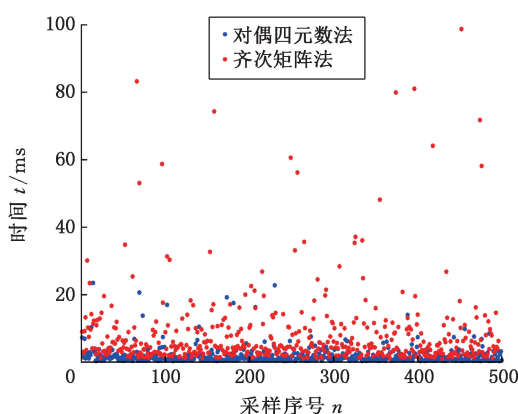


图 8 Sawyer 机器人逆运动学数值解算耗用时间  
Fig.8 Time consumption for numerical solution of Sawyer robot inverse kinematics

长方向与脚踝到脚底的方向相同。设定平面 3R 机器人末端的起始位姿为  $(0.82 \text{ m}, -0.14 \text{ m}; 100^\circ)$ ,终止位姿为  $(0.56 \text{ m}, 0.56 \text{ m}; 150^\circ)$ ,规划总时长为 2 s,  $100^\circ$  和  $150^\circ$  是第三连杆的末端位姿与零位状态的夹角(按照右手定则确定)。根据 2.4 节所述内容对机器人笛卡儿空间轨迹进行规划,并使用逆运动学求解关节空间轨迹,轨迹规划的仿真结果如图 9 所示。

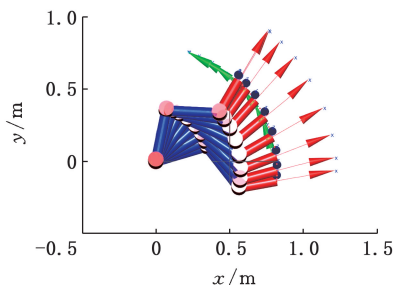


图 9 平面 3R 机器人轨迹规划仿真结果  
Fig.9 Simulation results of planar 3R robot trajectory planning

关节 1~3 的运动轨迹如图 10 所示,其中,第一关节的仿真轨迹与实际轨迹有较大误差,最大绝对误差为  $4.747^\circ$ ;第二关节、第三关节的仿真轨迹与实际轨迹的最大绝对误差分别为  $0.415^\circ$  和  $0.221^\circ$ 。第一关节运动范围比其他两个关节大,运动速度也较快,因此第一关节运动轨迹的误差比其他两个关节大。实际运动轨迹与仿真轨迹不重合的主要原因是机器人伺服控制不理想。笛卡儿空间的实际轨迹与仿真轨迹不重合,如图 11 所示,相同时刻的最大误差为 69 mm。尽管出现较大的轨迹误差,但笛卡儿空间的实际轨迹仍具有螺旋线性插值的特点,且轨迹起始和终止处的实际轨迹与仿真轨迹是重合的。

平面 3R 机器人末端轨迹的笛卡儿空间速度如图 12 所示。实际速度、仿真速度的 X 轴分

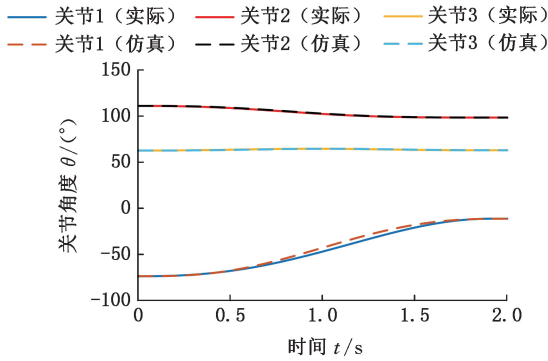


图 10 平面 3R 机器人关节运动轨迹

Fig.10 Joint motion trajectory of planar 3R robot

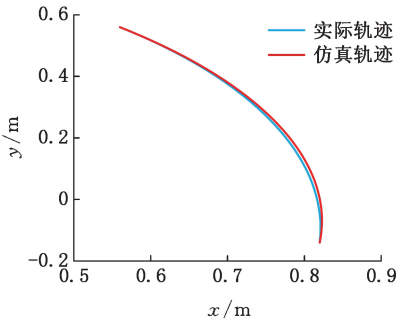


图 11 平面 3R 机器人笛卡儿空间运动轨迹

Fig.11 Cartesian space motion trajectory of planar 3R robot

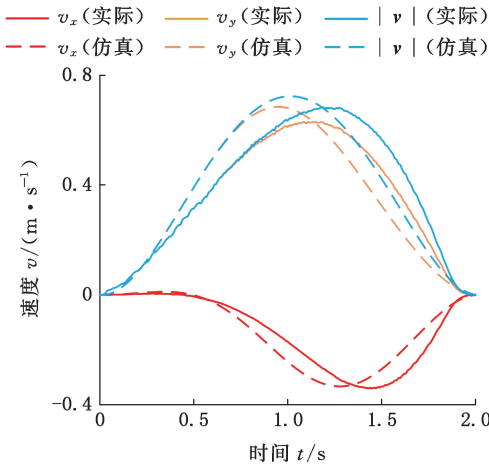


图 12 平面 3R 机器人笛卡儿空间速度

Fig.12 Cartesian space velocity of planar 3R robot

量最大绝对值分别为 0.3333 m/s 和 0.3403 m/s; 实际速度、仿真速度的 Y 轴分量最大绝对值分别为 0.6303 m/s 和 0.6841 m/s; 笛卡儿空间速度的实际最大值、仿真最大值分别为 0.6833 m/s 和 0.7227 m/s。机器人控制不理想, 实际速度与仿真速度的 X 轴、Y 轴分量最大绝对误差分别为 0.0961 m/s 和 0.1343 m/s, 空间速度的最大绝对误差为 0.1601 m/s。机器人实际运动速度不能达到仿真最大值的主要原因是机器人只使用 PID 控制, 机器人关节实际轨迹跟踪没有超调, 后续可通过增加速度前馈来改善控制效果。图 12 中, 实

际速度曲线滞后于仿真曲线, 但两条曲线的平滑特征相同, 这表明机器人运动过程平滑、无冲击, 具有五次多项式插值的特点。

### 3.2.2 Sawyer 机器人轨迹规划

Sawyer 机器人具有冗余的自由度, 可以更加灵活进行轨迹规划。机器人关节 1~7 初始角度依次为  $-30^\circ, -60^\circ, 5^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ$ , 终止时关节角度依次为  $30^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 0^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 0^\circ$ , 共用时 2 s。轨迹规划仿真结果如图 13 所示, 笛卡儿空间轨迹具有螺旋线特征。

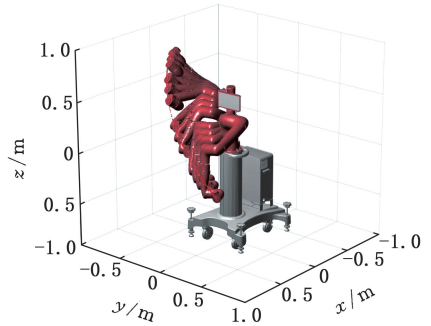


图 13 Sawyer 机器人轨迹规划仿真结果

Fig.13 Simulation results of Sawyer robot trajectory planning

Sawyer 机器人关节 1~7 的运行轨迹仿真结果如图 14 所示, 各个关节运动轨迹光滑, 没有出现突变。如图 15 所示, 笛卡儿空间的速度曲线也是光滑的。由仿真结果可知, 螺旋线性插值能实现五次多项式轨迹规划, 且更容易通过调节插值步长来改变笛卡儿空间速度。

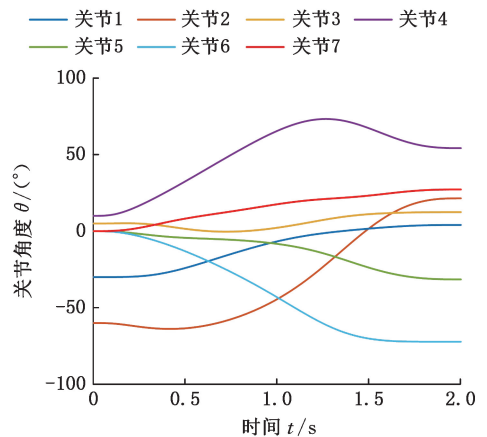


图 14 Sawyer 机器人关节运动轨迹

Fig.14 Joint motion trajectory of Sawyer robot

冗余机器人在笛卡儿空间轨迹规划时常使用数值解进行逆运动学求解。为提高求解精度, 保证关节轨迹不出现突变, 数值解求解需将上一时间步的逆解作为迭代的初始结果。与齐次矩阵法相比, 对偶四元数法能减少关节轨迹突变的产生。

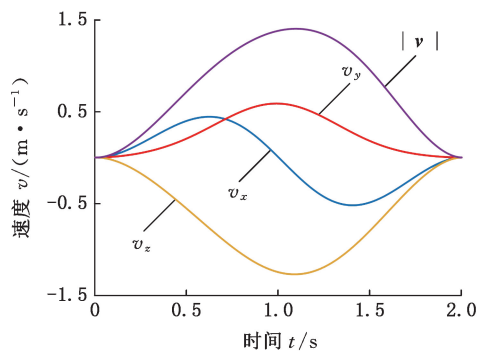


图 15 Sawyer 机器人笛卡儿空间速度

Fig.15 Sawyer robot Cartesian space velocity

#### 4 结论

本文通过分析刚体运动和螺旋运动使用对偶四元数表示的特点,结合旋量理论,得到矩阵指数和对偶四元数指数运算的相关关系。通过指数积公式,建立了机器人运动学的对偶四元数表示方法。根据牛顿-拉夫森法、求逆矩阵的阻尼最小二乘法,将对偶四元数用于逆运动学数值法求解。根据螺旋线性插值方法的特点,通过使用五次多项式改变插值步长,提出基于螺旋线性插值的一种笛卡儿空间轨迹规划方法。平面 3R 机器人的实际运行和七自由度 Sawyer 机器人的仿真证明,使用对偶四元数的逆运动学数值解法比齐次矩阵法具有更好的稳定性、更高的解算速度;提出的笛卡儿空间轨迹规划方法在 2 台机器人上都能实现平滑运动,且笛卡儿空间速度具有五次多项式轨迹规划的特点。

#### 参考文献:

[1] ÖZGÜR E, MEZOUAR Y. Kinematic Modeling and Control of a Robot Arm Using Unit Dual Quaternions[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2016, 77:66-73.

[2] ABAUNZA H, CHANDRA R, ÖZGÜR E, et al. Kinematic Screws and Dual Quaternion Based Motion Controllers[J]. Control Engineering Practice, 2022, 128:105325.

[3] 葛为民, 宇旭东, 王肖锋, 等. 基于对偶四元数的机械臂运动学建模及分析[J]. 机械传动, 2018, 42(7):112-117.

GE Weimin, YU Xudong, WANG Xiaofeng, et al. Kinematics Modeling and Analysis of Manipulator Based on Dual Quaternion[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(7):112-117.

[4] 陈良港, 张方, 张建光, 等. 基于对偶四元数移动机械臂运动学建模与控制[J]. 科技创新与应用, 2022, 12(5):1-5.

CHEN Lianggang, ZHANG Fang, ZHANG Jianguang, et al. Kinematics Modeling and Control of Mobile Manipulator Based on Dual Quaternion[J]. Technology Innovation and Application, 2022, 12(5):1-5.

[5] KAVAN L, COLLINS S, ŽÁRA J, et al. Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending [J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(4):105.

[6] LE B H, HODGINS J K. Real-time Skeletal Skinning with Optimized Centers of Rotation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(4):1-10.

[7] 钱萍, 王惠南. 基于对偶四元数的航天器交会对接位姿双目视觉测量算法[J]. 宇航学报, 2013, 34(1):32-38.

QIAN Ping, WANG Huinan. A Binocular Vision Algorithm Based on Dual Quaternion for Relative Position and Attitude Determination of RVD Spacecrafts[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(1):32-38.

[8] 翟洪民. 基于对偶四元数的航天器近距离接近位姿同步规划与控制[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2021.

ZHAI Hongmin. Synchronous Planning and Control of Spacecraft's Close Approach Position and Attitude Based on Dual Quaternion[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021.

[9] WANG Xiangke, ZHU Huayong. On the Comparisons of Unit Dual Quaternion and Homogeneous Transformation Matrix[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2014, 24(1):213-229.

[10] 戴建生. 机构学与旋量理论的历史渊源以及有限位移旋量的发展[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13):13-26.

DAI Jiansheng. Historical Relation between Mechanisms and Screw Theory and the Development of Finite Displacement Screws[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13):13-26.

[11] 黄晓华, 王兴成. 机器人动力学的李群表示及其应用[J]. 中国机械工程, 2007, 18(2):201-205.

HUANG Xiaohua, WANG Xingcheng. Lie Group Representation of Robot Dynamics and Its Applications[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(2):201-205.

[12] 裴九芳, 许德章, 王海. 基于旋量理论的三指机器人灵巧手逆运动学分析[J]. 中国机械工程, 2017, 28(24):2975-2980.

PEI Jiufang, XU Dezhang, WANG Hai. Inverse Kinematics Analyses of 3-finger Robot Dexterous Hand Based on Screw Theory[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(24):2975-2980.

[13] 邵兵, 吴洪涛, 程世利, 等. 基于李群李代数的主

- 被动关节机器人动力学及控制[J]. 中国机械工程, 2010, 21(3):253-257.
- SHAO Bing, WU Hongtao, CHENG Shili, et al. Dynamics and Control of Robot with Active and Passive Joints Using Lie Groups and Lie Algebras [J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(3): 253-257.
- [14] VILHENA ADORNO B. Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra — Part I: Fundamentals[Z/OL]. 2017 [2022-11-06]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01478225>.
- [15] ADORNO B V, MARQUES MARINHO M. DQ Robotics: a Library for Robot Modeling and Control[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2021, 28(3):102-116.
- [16] LECHUGA-GUTIERREZ L, MACIAS-GARCIA E, MARTÍNEZ-TERÁN G, et al. Iterative Inverse Kinematics for Robot Manipulators Using Quaternion Algebra and Conformal Geometric Algebra [J]. Meccanica, 2022, 57(6):1413-1428.
- [17] AHMED A, YUMeng, CHEN Feifei. Inverse Kinematic Solution of 6-DOF Robot-arm Based on Dual Quaternions and Axis Invariant Methods[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2022, 47(12):15915-15930.
- [18] QIAO Shuguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Inverse Kinematic Analysis of the General 6R Serial Manipulators Based on Double Quaternions [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2):193-199.
- [19] ZHAO Zhiyong, WANG Tao, WANG Dongqing. Inverse Kinematic Analysis of the General 6R Serial Manipulators Based on Unit Dual Quaternion and Dixon Resultant[C]//2017 Chinese Automation Congress (CAC). IEEE, 2017:2646-2650.
- [20] WANG Hengsheng, ZHAN Deyou, HUANG Pinglun, et al. Inverse Kinematics of a Heavy Duty Manipulator with 6-DOF Based on Dual Quaternion[J]. Journal of Central South University, 2015, 22(7):2568-2577.
- [21] KENWRIGHT B. Inverse Kinematics with Dual-quaternions, Exponential-maps, and Joint Limits [J]. arXiv, 2022:2211.01466.
- [22] CHEN Qingcheng, ZHU Shiqiang, ZHANG Xuequn. Improved Inverse Kinematics Algorithm Using Screw Theory for a Six-DOF Robot Manipulator[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2015, 12(10):140.
- [23] DANTAM N T. Robust and Efficient Forward, Differential, and Inverse Kinematics Using Dual Quaternions[J]. The International Journal of Robotics Research, 2021, 40(10/11):1087-1105.
- [24] 任敬轶, 孙汉旭. 一种新颖的笛卡儿空间轨迹规划方法[J]. 机器人, 2002, 24(3):217-221.
- REN Jingyi, SUN Hanxu. A Novel Method of Trajectory Planning in Cartesian Space[J]. Robot, 2002, 24(3):217-221.
- [25] 金荣玉, 耿云海. 空间机器人动力学奇异回避的笛卡尔轨迹规划[J]. 宇航学报, 2020, 41(8):989-999.
- JIN Rongyu, GENG Yunhai. Cartesian Trajectory Planning of Free-floating Space Robot with Dynamic Singularities Avoidance[J]. Journal of Astronautics, 2020, 41(8):989-999.
- [26] 李振娜, 王涛, 王斌锐, 等. 基于带约束 S 型速度曲线的机械手笛卡儿空间轨迹规划[J]. 智能系统学报, 2019, 14(4):655-661.
- LI Zhenna, WANG Tao, WANG Binrui, et al. Trajectory Planning for Manipulator in Cartesian Space Based on Constrained S-curve Velocity[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2019, 14(4):655-661.
- [27] SARKER A, SINHA A, CHAKRABORTY N. On Screw Linear Interpolation for Point-to-point Path Planning[C]//2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Las Vegas, 2020:9480-9487.
- [28] KAVAN L, COLLINS S, ŽÁRA J, et al. Skinning with Dual Quaternions[C]//Proceedings of the 2007 Symposium on Interactive 3D graphics and games. New York, 2007:39-46.[LinkOut]
- [29] KENWRIGHT B. Dual-Quaternion Interpolation [J]. arXiv, 2023:2303.13395.
- [30] SOLÀ J, DERAY J, ATCHUTHAN D. A micro Lie theory for state estimation in robotics[J]. arXiv, 2018:1812.01537.
- [31] LYNCH K M. Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control [M]. New York, NY: Cambridge University Press.

(编辑 张洋)

作者简介: 王志强, 男, 1992年生, 博士研究生。研究方向康复机器人技术。E-mail: wzq1992@stu.haust.edu.cn. 韩建海\* (通信作者), 男, 1961年生, 教授, 博士研究生导师。研究方向为机器人技术。E-mail: jianhaihan@haust.edu.cn.

#### 本文引用格式:

王志强, 韩建海, 李向攀, 等. 冗余机器人的笛卡儿空间螺旋线性插值轨迹规划[J]. 中国机械工程, 2025, 36(1):104-112.

WANG Zhiqiang, HAN Jianhai, LI Xiangpan, et al. Cartesian Space Screw Linear Interpolation Trajectory Planning for Redundant Robots[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(1): 104-112.