

等几何拓扑优化非齐次边界条件施加技术研究

王书亭¹ 谢晴天¹ 杨奥迪¹ 李小兵² 熊体凡¹ 谢贤达^{2*}

1. 华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉, 430074

2. 南昌大学先进制造学院, 南昌, 330031

摘要: 非均匀有理 B 样条 (NURBS) 基函数缺乏插值性, 导致等几何拓扑优化方法无法直接在控制顶点处施加非齐次边界条件。为此, 介绍了面向等几何分析的两类非齐次边界条件处理方法, 通过强施加方法和弱施加方法分别对边界条件施加的精度进行提升。数值算例结果验证了前述方法在等几何分析非齐次边界条件施加过程的可行性。将前述方法嵌入至等几何拓扑优化流程, 创新性地提出惩罚因子自适应的非齐次边界条件处理方法, 提高了等几何拓扑优化求解的精度, 进一步论证了文中方法的有效性。

关键词: 等几何拓扑优化; 非齐次边界条件; 边界配点法; 自适应罚函数法

中图分类号: TH122

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2025.03.016

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Research on Non-homogeneous Boundary Condition Imposing Techniques for Isogeometric Topology Optimization

WANG Shuting¹ XIE Qingtian¹ YANG Aodi¹ LI Xiaobing² XIONG Tifan¹ XIE Xianda^{2*}

1. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

2. School of Advanced Manufacturing, Nanchang University, Nanchang, 330031

Abstract: The lack of interpolation property of non-uniform rational B-splines (NURBS) basis functions led to the failure of imposing non-homogeneous boundary conditions directly at control points by isogeometric topology optimization method. Therefore, two types of non-homogeneous boundary condition imposing methods were introduced to isogeometric analysis herein, which improved the accuracy of imposing boundary conditions through two perspectives, namely strong imposition method and weak imposition method. Then, the numerical results verify the feasibility of the above methods in applying non-homogeneous boundary condition for isogeometric analysis. Finally, the above methods were embedded into isogeometric topology optimization, and an innovative non-homogeneous boundary condition imposing method was proposed with adaptive penalty factor, which improves the solution accuracy of isogeometric topology optimization, and further demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: isogeometric topology optimization; non-homogeneous boundary condition; boundary collocation method; adaptive penalty function method

0 引言

等几何拓扑优化^[1-3]方法以等几何分析代替传统拓扑优化方法中的有限元分析, 由于非均匀有理 B 样条 (NURBS) 基函数的非插值性质, 导致描述几何的控制点通常不在几何体上, 这种情况下, 控制点自由度不能直接控制几何体的形状, 而需要通过调整权重来实现。在处理非齐次本质边界条件时, 等几何分析无法直接准确施加边界条件^[4], 影响了分析计算精度。同时, 狄利克雷边界条件对非齐次较为敏感, 使得在等几何拓扑优

化过程中施加边界条件的精度受到较大限制。HUGHES 等^[5]将边界上控制点处的场变量值直接施加到对应的控制点上, 但这种方式在一般情况下只适用于常数边界等齐次的边界条件, 对于非齐次边界条件将会导致精度下降以及收敛速度变缓。

有研究表明, NURBS 基函数和无网格法中采用的移动最小二乘基函数都具有高阶连续性且都有非插值性^[6-7], 它们的基函数可以通过控制点位置进行修改, 以产生形状变化或实现几何约束; 同时, 它们的基函数也具有高度的连续性, 可以较为方便地计算导数。

国内外学者从无网格法^[8-10]中借鉴相关方

收稿日期: 2024-03-02

基金项目: 国家重点研发计划 (2023YFB2504605); 国家自然科学基金 (52205267)

法,应用至等几何分析的非齐次边界条件施加。参照无网格法,等几何分析将边界条件修正方法分为两类^[11]:第一类是对解空间进行修正的“强施加”处理方法;第二类是对变分形式进行修正的“弱施加”处理方法。

关于第一类方法,WANG 等^[12]采用配点法思想施加等几何分析的边界条件,提出了一种改进的强制边界条件处理方法。随后,轩军厂^[13]将上述方法和应变光滑子域积分结合,该算法将单元分割为若干子域,通过子域的应变平均定义应变光滑,进一步提高了分析精度和计算效率。陈涛等^[14]证明了配点选取方法对计算精度的影响。

第二类方法主要包含罚函数法、Nitsche's 法。王东东等^[15]将罚函数法用于等几何分析的边界条件处理,与直接施加法对比,得到了更好的收敛效果和精度,并将其应用在三维薄梁板结构中取得了较好的效果^[16];HOANG 等^[17]将罚函数惩罚理念应用至流体力学问题;LEI 等^[18]在 C0/G1 多面片的应力约束条件下研究了基于罚函数法的等几何分析技术,在 Kirchhoff-Love 壳等结构中具有较好的有效性。EMBAR 等^[19]讨论了基于 B 样条的有限元分析中施加狄利克雷边界条件的问题,并提出了将 Nitsche's 应用于等几何分析;CHEN 等^[20]在采用 Nitsche's 变分边界的基础上推导出稳定系数的计算公式;NGUYEN 等^[21]采用 Nitsche's 法处理二维和三维多片结构之间的拼接问题;HU 等^[22]在弹性力学问题中引入斜对称 Nitsche's 公式处理边界问题;DU 等^[23]将 Nitsche's 应用至橡胶、生物组织等多材料的复杂几何模型。在接触力学领域,胡清元^[24]将 Nitsche's 方法用于等几何分析处理位移、转动和耦合边界条件,得到了较高精度的分析结果。此外,其他学者也贡献了边界处理的解决方案^[25-28]。

目前,等几何分析中对非齐次边界条件的处理基本围绕借鉴无网格方法展开研究,并取得了一定进展,但在等几何拓扑优化方法中对边界条件施加的相关研究较少。实际上拓扑优化过程中,每个迭代步数都会影响单元材料属性,而现有非齐次边界条件等几何拓扑优化方法未考虑单元材料属性变化对边界条件施加技术精度的影响,这也会导致在非齐次边界条件下等几何拓扑优化精度降低。

本文针对上述问题,基于非齐次边界条件的强施加与弱施加方法,研究基于等几何分析的拓扑优化在非齐次边界条件下的精确等效施加方法,主要基于格雷维尔标记配点法的强施加方法,

以及基于罚函数法的弱施加方法。结合优化过程中目标函数及刚度矩阵特征值的变化,对惩罚因子的取值进行优化设计,研究自适应罚函数法的等几何拓扑优化方法。

1 理论基础

本节首先对边界条件的分类和定义进行阐述,然后基于 NURBS 非插值特性对等几何方法的具体影响及内在机制进行了分析。

1.1 非齐次边界条件

边界条件是给出具体物理现象在边界上所处的物理情况。根据边界条件数学表达方式的不同,在偏微分方程求解中将边界条件分为狄利克雷边界条件、纽曼边界条件以及柯西边界条件三类。其中,在等几何分析过程中,后两种边界条件一般直接构造在方程的等效积分形式中就能满足条件,下式展示了三种边界条件的形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{h} && \text{on } \Gamma_D \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t} && \text{on } \Gamma_N \\ \alpha \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{r} && \text{on } \Gamma_R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: \mathbf{u} 、 \mathbf{h} 分别为实际边界位移和给定边界位移; \mathbf{n} 为边界外法线方向; $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; \mathbf{t} 为边界处牵引力; α 为用于确定边界类型的常数; \mathbf{r} 为外载荷向量; Γ_D 、 Γ_N 和 Γ_R 分别为狄利克雷边界、纽曼边界和柯西边界。

当 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ 时,被称为齐次边界条件;反之,为非齐次边界条件。在非齐次条件下,等几何拓扑优化过程求解结果不稳定,精度下降。由于非齐次边界条件可能导致解的奇异性或多解性,在弹性力学中,这可能会导致应力和应变分布的不连续或奇异点的出现,从而影响结构的稳定性和安全性。

1.2 NURBS 非插值特性

在有限元分析中,由于其近似函数具有插值特性;基函数在其控制点处取值为 1 而在其他控制点处取值为 0,故相对容易处理边界条件。但 NURBS 基函数由于是通过递归地应用 Cox-de Boor 递推公式来计算的,这个过程中权重因子使得基函数在其控制点处取值不为 1,导致其不具有插值特性,因此对边界条件的处理较为困难。如图 1 所示,节点向量为 $\boldsymbol{\Xi} = (0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1)$ 的 B 样条基函数,可观察到:除了包含函数端点位置的基函数(N_1 和 N_6)外其他都不具备插值特性。

将 B 样条推广至多变量范围,设两个参数方向都采用上述节点矢量,可以得到图 2 所示的双变量 NURBS 基函数。

对双变量 NURBS 基函数也只在参数域的四

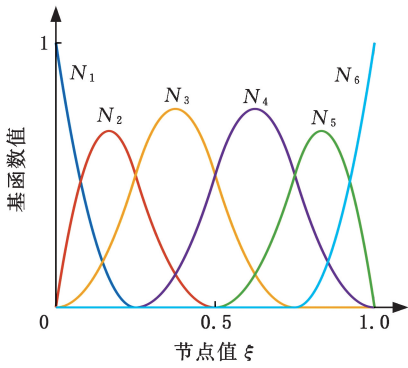
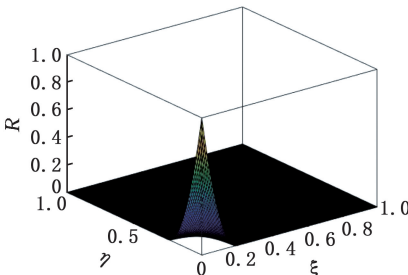
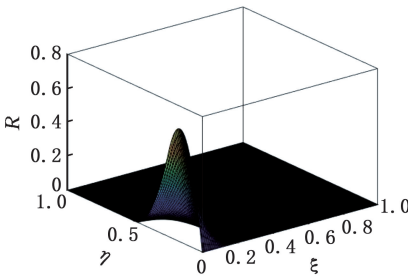


图1 单变量 B 样条基函数

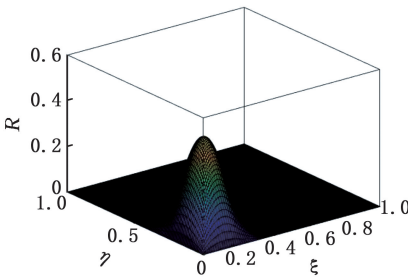
Fig.1 Univariate B-spline basis function



(a) 基函数 $R_1 = N_1(\xi)N_1(\eta)$



(b) 基函数 $R_8 = N_1(\xi)N_2(\eta)$



(c) 基函数 $R_9 = N_2(\xi)N_2(\eta)$

图2 不同位置的双变量 NURBS 基函数

Fig.2 Bivariate NURBS basis functions at different locations

个拐角点处插值,如图 2a 所示,这类控制点被称为角控制点。图 2b 和图 2c 分别表示其他边界和内部节点,被称为边界控制点和内部控制点。可以看到,在二维空间中 NURBS 基函数也是非插值的。同时,在边界位置处内部控制点的形函数为 0,因此边界值的大小只由角控制点和边界控制点控制。

在几何特性范畴,NURBS 样条的凸包性质

限制了实际样条几何只能包含在其凸包内部。图 3 以二维 1/4 圆环控制网格为例,分别给出了等几何与有限元的控制网格,图中实心圆点为控制顶点(或节点),连接控制顶点的虚线构成控制网格。可以看到由于 NURBS 样条缺乏插值性,控制顶点可能在几何区域的内部、边界以及外部(其中,红色、黄色和蓝色控制点分别表示角控制点、边界控制点和内部控制点),而有限元的二次拉格朗日等参单元的节点都落在几何区域内部或者边界上。因此,需要对控制顶点进行适当调整,以确保实际的几何区域被包含在调整后的凸包内部。若直接将非齐次本质边界条件施加在控制点上,则可能会破坏 NURBS 样条的凸包性质,导致计算精度降低甚至收敛退化。

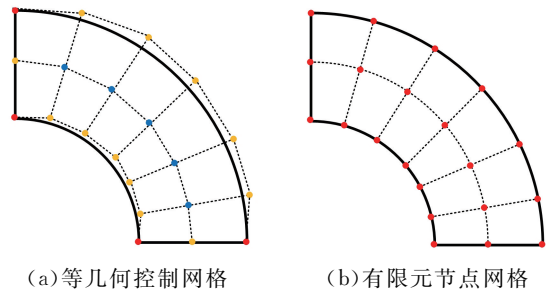


图3 二维 1/4 圆环等几何控制网格与有限元节点网格比较

Fig.3 Comparison of isogeometric control mesh and finite element nodal mesh for 2D quarter annulus

1.3 非齐次边界条件施加方法分类

为了能够提高非齐次边界条件下等几何拓扑优化的计算精度,提高收敛特性,本文对边界条件进行处理,并将处理方法分为强施加和弱施加两类方法,如图 4 所示。

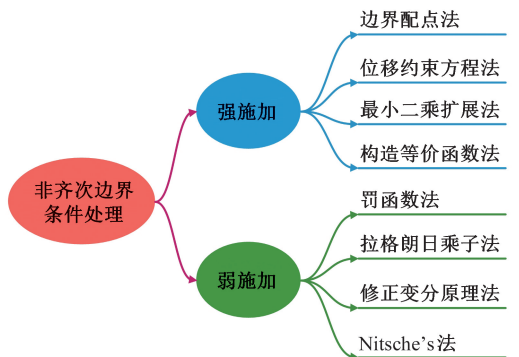


图4 非齐次边界条件处理方法分类

Fig.4 Classification of non-homogeneous boundary condition imposing methods

第一类是强施加方法,该方法直接对解空间进行强修正,要求边界条件必须满足,直接将其作为方程的一部分来求解。第二类是弱施加方法,通过将边界条件加入问题的弱形式中,将其转化

为一个变分问题,在变分问题中边界条件以积分形式出现。这种方法通常用于边界条件较为复杂或难以处理的情况。

目前主流的强施加方法包括边界配点法、位移约束方程法、最小二乘扩展法、等价函数构造法;弱施加法包含罚函数法、拉格朗日乘子法、修正变分原理法、Nitsche's 法。为了能够更好地处理非齐次边界条件,本文分别研究了强施加方法及弱施加方法对边界条件进行修正,提高计算精度。

2 基于强弱施加法的非齐次边界条件施加技术

本节首先介绍了非齐次边界条件下的等几何拓扑优化的数学模型,然后介绍了基于 B 样条的隐式过滤器。提出两类非齐次边界条件处理方法,通过强施加方法和弱施加方法两个角度来提高边界条件施加的精度。

2.1 非齐次边界条件下等几何拓扑优化模型

在非齐次的纽曼-狄利克雷混合边界中,考虑一个弹性力学模型:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{h} && \text{on } \Gamma_D \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{t} && \text{on } \Gamma_N \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: ∇ 为梯度算子, Ω 为计算域; \boldsymbol{f} 为体积力向量; $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma, \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ 。

得到静载荷作用下二维弹性问题的代数方程:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{K} \in \mathbf{R}^{N_{\text{dof}} \times N_{\text{dof}}} \quad \boldsymbol{U} \in \mathbf{R}^{N_{\text{dof}}} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbf{R}^{N_{\text{dof}}}$$

式中: \boldsymbol{K} 为总体刚度矩阵; $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}$ 分别为整体结构控制点位移和外力矢量; N_{dof} 为控制点总自由度数。

根据有限元分析边界定义^[29-30],可以将 \boldsymbol{F} 可分解为内部力向量、纽曼边界条件以及狄利克雷边界条件:

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{R}\boldsymbol{t}d\Gamma_N + \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{R}\boldsymbol{h}d\Gamma_D \quad (4)$$

式中: \boldsymbol{R} 为 NURBS 基函数矩阵。

为便于表达,将控制点分为边界控制点和内部控制点。图 5 以二维平面中的四分之一圆环模型为例展示了边界控制点(图 5 中的蓝色控制点)和内部控制点(图 5 中的红色控制点)。

为了更准确地对边界条件进行控制,借鉴了无网格法^[31] 的变换方法,将控制变量与它们相应的物理边界值联系起来,将边界单元与内部单元进行区分。因此,式(3)可以转化为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\text{II}} & \boldsymbol{K}_{\text{IB}} \\ \boldsymbol{K}_{\text{IB}} & \boldsymbol{K}_{\text{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\text{I}} \\ \boldsymbol{U}_{\text{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\text{I}} \\ \boldsymbol{F}_{\text{B}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

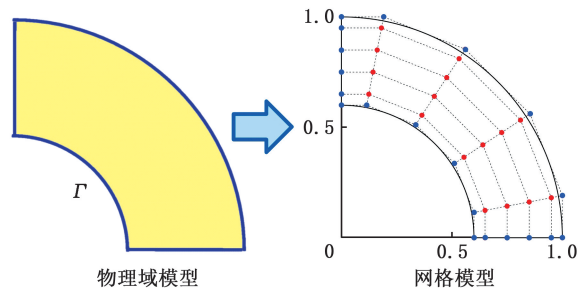


图 5 二维圆环模型及控制点

Fig.5 2D annulus model with control points

式中: $\boldsymbol{K}_{\text{II}}, \boldsymbol{K}_{\text{IB}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\text{BB}}$ 分别为内部控制点刚度子矩阵、内部控制点与边界控制点耦合刚度子矩阵和外部控制点刚度子矩阵; $\boldsymbol{U}_{\text{I}}, \boldsymbol{U}_{\text{B}}$ 分别为内部位移向量和外部强施加位移向量; $\boldsymbol{F}_{\text{I}}, \boldsymbol{F}_{\text{B}}$ 分别为内部控制点力向量和外部控制点力向量。

本文拓扑优化的目标是 minimized 广义柔度,广义柔度参考总势能(total potential energy, TPE)概念^[32-33],计算公式为

$$\Pi(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} - \boldsymbol{F} \boldsymbol{U}_1 \quad (6)$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (\rho_{00}, \rho_{01}, \dots, \rho_{n_1 n_2})$$

$$\boldsymbol{a}_2 = (\omega_{00}, \omega_{01}, \dots, \omega_{n_1 n_2})$$

式中: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 分别为全部控制点密度值和权重值。

由 TPE 可以推导出非齐次边界条件下的广义柔度:

$$C(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = -2\Pi(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{F} \boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{U}_{\text{B}}^T \boldsymbol{F}_{\text{B}} \quad (7)$$

以柔度最小化为目标,优化问题以约束非线性规划问题的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \frac{C(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{C_{\text{ref}}} \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{F} \\ \frac{V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{V_0} &\leq V_{\text{olfrac}} \\ \boldsymbol{a}_{1r} &\in [\rho_{\text{min}}, \rho_{\text{max}}], \boldsymbol{a}_{2r} \in [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}] \\ \boldsymbol{\tau} &= \{1, 2, \dots, n_{\text{cp}}\} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: C_{ref} 为给定的结构柔度的标准值; $V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ 为优化结构的实体材料体积; V_0 为初始设计域体积; V_{olfrac} 为实体材料体积分数上限; $\boldsymbol{a}_{1r}, \boldsymbol{a}_{2r}$ 分别为每个控制点的密度值和权重; $\rho_{\text{min}}, \rho_{\text{max}}$ 分别为密度值下限及上限(一般情况下, $\rho_{\text{min}} \geq 0, \rho_{\text{max}} \leq 1$); $\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}$ 分别为权重下限和上限; n_{cp} 为控制变量总数。

2.2 基于配点法的强施加法及实现

本节首先对边界配点法的基本原理和实现过程进行介绍。随后对直接配点法进行改进,设计了更为精准的配点选取的准则以及配点方案。

2.2.1 配点法

考虑对狄利克雷边界条件进行处理,将式(2)中 Γ_D 表示为非齐次边界条件与齐次边界条件之和:

$$u = u_{\text{hom}} + u_{\text{non}} = \sum_{i=1}^n R_i(a) u_i \quad (9)$$

式中: u 为狄利克雷边界; u_{hom} 、 u_{non} 分别为齐次部分和非齐次部分; $R_i(a)$ 为 NURBS 基函数; a 为其参数坐标; u_i 为对应的控制变量。

进一步, 对式(9)进行排序重组, 根据图 3a 的控制点分类思想, 将其重写为

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{hom}} &= \sum_{i=1}^w R_i^{\text{hom}}(a) u_i^{\text{hom}} = 0 \\ u_{\text{non}} &= \sum_{j=1}^m R_j^{\text{non}}(a) u_j^{\text{non}} \\ u_{\text{hom}} \cup u_{\text{non}} &= u \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $R_i^{\text{hom}}(a)$ 为内部基函数, 由于其支撑域与边界交集为 \emptyset , 因此在边界处为 0; $R_j^{\text{non}}(a)$ 为边界基函数; u_i^{hom} 、 u_j^{non} 分别为内部和边界控制变量。

因此, 由式(9)可得到

$$u = \sum_{j=1}^m R_j^{\text{non}}(a) u_j^{\text{non}} = \mathbf{R}(a)^b \mathbf{C}^b = \mathbf{T}^T \mathbf{C}^b \quad (11)$$

式中: $\mathbf{R}(a)^b$ 、 \mathbf{C}^b 分别为非齐次边界条件的基函数和控制变量集合, $\mathbf{T} = \{R_j^{\text{non}}(a)\}$, 可以得到 $\mathbf{C}^b = \mathbf{T}^{-T} u^b$ 。

由上述可知, 对非齐次边界条件进行配点法强施加需要首先确定狄利克雷边界中的非齐次部分 u_{non} , 然后通过等效积分对载荷向量和刚度矩阵进行修正, 最终转化为线性方程组求解内部的控制变量。由于 NURBS 是开节点曲线, 基函数在节点矢量的端点处插值, 只有一个基函数在端点处有非零值, 因此可通过寻找支撑域与边界条件非空交集的基函数确定边界和内部基函数。

在边界曲线上引入一组插值配点 $\{b_w\}_{w=1}^g$ 代入式(9)中, 可得到配点方程组:

$$t(b_w) = \sum_{i=1}^g R_i(b) c_i = \mathbf{R}(b)^p \mathbf{C}^p \quad (12)$$

其中, 线性方程组形式中的 $\mathbf{R}(b)^p$ 矩阵由 $R_i(b)$ 构成。

得到在非齐次边界条件下的配点法精确等效施加边界的整体流程, 如图 6 所示。在定义非齐次边界条件后, 识别边界控制点并获取其所在单元索引; 在组装整体刚度矩阵及载荷向量后判断是否为边界单元, 并更新边界单元刚度矩阵及载荷控制点。

2.2.2 配点法算法实现

在等几何拓扑优化过程中, 配点法主要通过迭代过程中的刚度矩阵和载荷向量优化实现, 将实现原理代入式(5), 可得到优化后的矩阵形式:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}\mathbf{D} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{K}} &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{\text{II}} & \mathbf{K}_{\text{IB}}\mathbf{T}^{-T} \\ \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{K}_{\text{IB}})^T & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}_{\text{BB}}\mathbf{T}^{-T} \end{array} \right] \\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_I \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_I \\ \bar{\mathbf{F}}_B \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

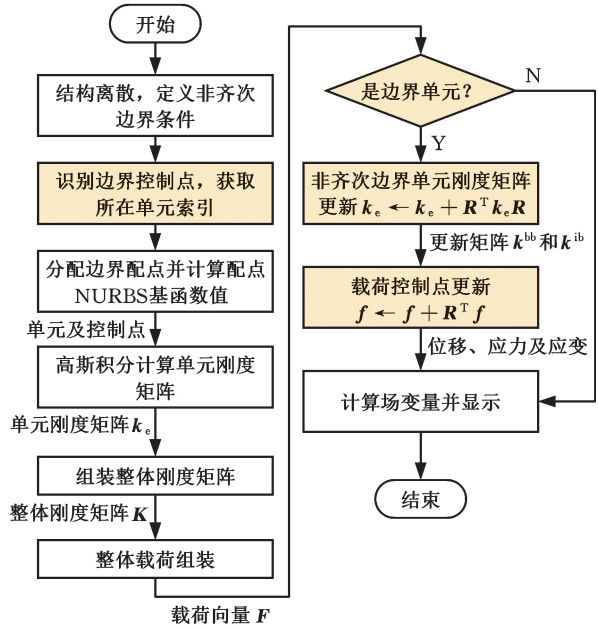


图 6 配点法等效施加边界流程

Fig.6 Flowchart of applying boundary conditions equivalently with collocation method

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{II}} &= \int_{\Omega} (\mathbf{R}^I)^T \mathbf{R}^I d\Omega \\ \mathbf{K}_{\text{IB}} &= \int_{\Omega} (\mathbf{R}^I)^T \mathbf{R}^B d\Omega \\ \mathbf{K}_{\text{BB}} &= \int_{\Gamma} (\mathbf{R}^B)^T \mathbf{R}^B d\Gamma \\ \bar{\mathbf{F}}_I = \mathbf{F}_I &= \int_{\Omega} (\mathbf{R}^I)^T l \sigma d\Omega \\ \bar{\mathbf{F}}_B &= \int_{\Omega} (\mathbf{R}^B)^T s d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{R}^B)^T \bar{t} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: \mathbf{K}_{II} 、 \mathbf{K}_{IB} 和 \mathbf{K}_{BB} 分别为内部刚度子矩阵、内部与边界耦合的刚度子矩阵和边界刚度子矩阵; $\bar{\mathbf{F}}_I$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_B$ 分别为内部载荷分向量和边界载荷分向量。

通过配点法进行强施加的过程中还需要考虑如何合理地选择配点, 以避免配点密度过小而导致误差增大。选择配点的基本准则: 为保证配点方程组正常求解, 系数矩阵必须是非奇异的, 且尽可能使条件数变小。根据勋伯格-惠特尼 (Schoenberg-Whitney) 定理, 在选取配点插值时应尽可能保证避免配点超出或接近基函数支撑边界, 以保证求解精度。本节研究了两种选取方式, 第一类是均匀等分法, 将样条函数的定义域均匀等分; 第二类是格雷维尔标记法, 采用节点平均值作为配点, 对于给定一组节点矢量 $(\zeta_i)_{i=1}^{n+1}$, 配点 $(\zeta'_i)_{i=1}^n$ 标记为连续 p 个节点均值, 计算方法如下:

$$\zeta'_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \zeta_{i+j} \quad (15)$$

2.3 基于自适应罚函数法的弱施加方法及实现

本节首先对罚函数法的基本原理和实现过程进行介绍, 并通过等几何分析算例进行数值验证,

证明其可行性和对精确度的提升。随后,对罚函数法进行改进,修正了惩罚因子取值标准,使其能够更加精确等效施加边界条件。

2.3.1 罚函数法及算法实现

设在空间 \mathbf{R} 中的约束集合上寻求一个实值函数的极值。那么对目标函数 $f(x)$ 而言,需要增加定义一个罚函数 $g(x)$,得到新函数 $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) + g(x) \quad (16)$$

将罚函数引入弹性力学问题中,可以得到罚函数的修正泛函,变分后得到

$$\delta\Phi = \Phi + \alpha \int_{\Gamma_b} \delta(\mathbf{u}(\eta))^T \cdot (\mathbf{u}(\eta) - \bar{\mathbf{u}}_b(\eta)) d\Gamma \quad (17)$$

式中: α 为惩罚因子。

将其引入二维弹性力学问题,得到

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)\mathbf{D} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p \quad (18)$$

其中, \mathbf{K}_p 和 \mathbf{F}_p 分别是刚度和载荷惩罚修正项:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_p &= \alpha \int_{\Gamma_b} (\mathbf{N}(\eta))^T \cdot \mathbf{N}(\eta) d\Gamma \\ \mathbf{F}_p &= \alpha \int_{\Gamma_b} (\mathbf{N}(\eta))^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_b(\eta) d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

罚函数的系数矩阵是对称正定矩阵,其结构与原始刚度矩阵相同,并且没有增加自由度数量。

2.3.2 惩罚因子自适应修正方法

在等几何分析中,罚函数法的计算精度主要受惩罚因子影响,而惩罚因子的选取并无直接现有规律可循。惩罚因子从理论上讲应该趋近于无穷大,可以更好地满足非齐次边界条件,以提高收敛速度。然而惩罚因子过大容易导致稀疏矩阵趋向病态,因此在不同的工程情况需取不同量级的惩罚因子。

此外,在基于具有惩罚的实体各向同性材料(SIMP)法的等几何拓扑优化过程中,由于每一个迭代步数都需要更新全局刚度矩阵以及所对应的单元密度值,因此也需要惩罚因子能够随着密度的更新而不断自适应调整。为了使刚度矩阵修正项与全局刚度矩阵实时匹配,本文对惩罚因子的自适应修正进行研究。

在等几何分析中,惩罚因子一般为 $\alpha \in [10^3 E, 10^7 E]$ (E 为弹性模量)。这种取值方法无法实现惩罚因子自适应,在等几何拓扑优化中无法有效匹配迭代过程的变化,且无法与模型几何尺寸构建关联。本文提出惩罚因子自适应调节技术,在优化迭代开始前设定初始惩罚因子:

$$\alpha = \frac{K^{\max}}{K_p^{\max}} \quad (20)$$

式中: K^{\max} 、 K_p^{\max} 分别为刚度矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{K}_p 特征值的最大值。

当进入优化迭代过程后,设计惩罚因子自动递增方法,在连续两次迭代之间目标函数值减小较慢的情况下更新惩罚参数值。

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n + 0.1 \frac{K^{\max}}{K_p^{\max}} & \frac{4}{5} |O_n| < |O_{n+1}| < |O_n| \\ \alpha_n & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

式中: O_n 、 O_{n+1} 为迭代过程中的目标函数值。

自适应罚函数法的实现流程如图 7 所示。定义非齐次边界条件后,识别边界控制点及所在单元索引,并设置初始惩罚值,进入迭代优化过程后,判断目标函数收敛情况,根据其变化情况修正惩罚因子值,并对非齐次边界单元的刚度矩阵及载荷向量进行高斯线积分修正。

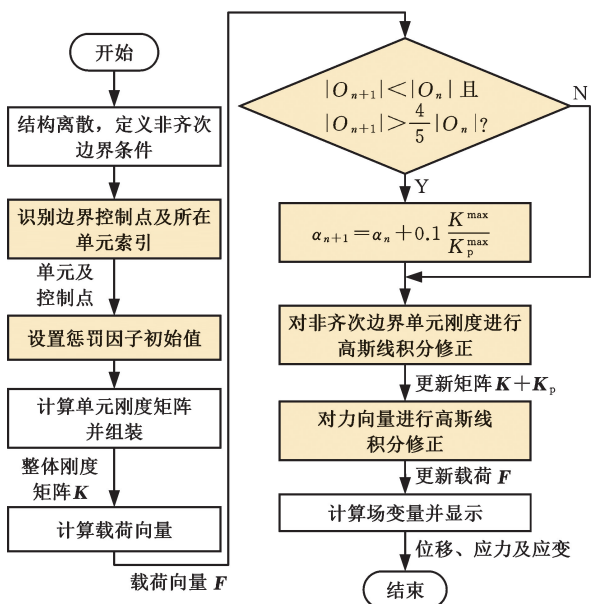


图 7 自适应罚函数法等效施加实现流程

Fig.7 Implementation steps for equivalent application of adaptive penalty function method

3 数值算例

本节基于强弱施加两种非齐次边界条件施加技术原理,首先通过等几何分析方法进行算例验证,证明该方法在等几何方法的可行性,然后将其嵌入等几何拓扑优化方法内,进一步验证等几何拓扑优化非齐次边界条件施加技术。硬件测试环境为 Intel(R) Xeon(R) Gold 5120 CPU @ 2.20GHz 2.19GHz 内核和 32GB RAM 内存的工作站;软件测试环境采用 Windows10 64 位操作系统和 MATLAB_R2021a。

3.1 强施加法算例验证

为验证配点法的有效性,利用等几何分析中二维 1/4 圆环区域求解作先行验证。几何区域采用二次 NURBS 样条曲面定义,该二维圆环问题

描述如图 8 所示。该算例内径 $a=0.3\text{ m}$, 外径 $b=0.5\text{ m}$, 受内压 $p=3\times 10^4\text{ kN/m}$, 弹性模量 $E=30\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.25$ 。施加非齐次边界条件左边界 $u_x=I$, 下边界 $u_y=I$ (I 为全 1 方阵)。

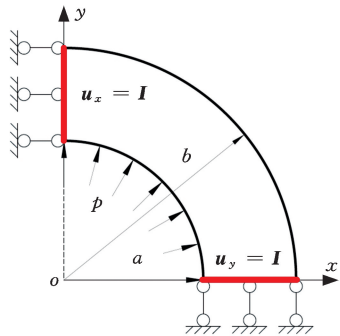


图 8 二维圆环等几何分析问题描述

Fig.8 Problem description for isogeometric analysis of 2D annulus

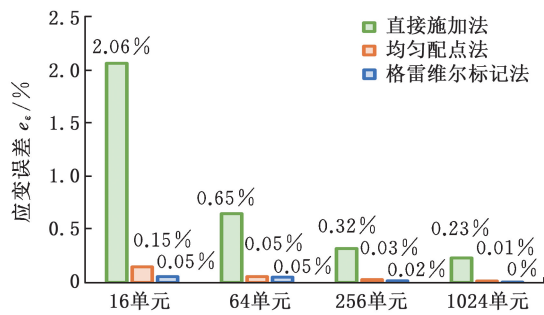
存在径向和切向两个方向的应力和位移解析值:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \\ u_r(r) &= \frac{a^2 p r}{E(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} (1 + \nu) - \nu\right] \\ u_\theta(r) &= 0 \end{aligned} \right\} (22)$$

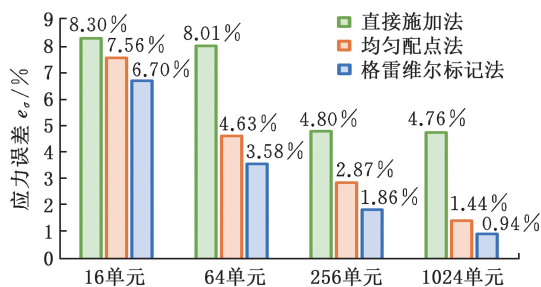
根据已知条件可得到应力最大理论值 $\sigma_{\max}=63.750\text{ MPa}$, 位移最大值 $u_{\max}=7.1250\times 10^{-4}\text{ m}$ 。取 4 组不同单元数量 (4×4 单元, 8×8 单元, 16×16 单元及 32×32 单元) 的结果误差作对比, 比较直接施加法、均匀配点法和格雷维尔标记法的计算结果。图 9 展示了应变和应力误差值。两类边界配点法在应变和应力方面都表现出明显优于直接施加在控制顶点上的方法。在应变方面, 相较于直接施加法, 均匀配点法的误差减小了 $8.87\% \sim 69.68\%$, 格雷维尔标记法的误差减小了 $19.25\% \sim 80.16\%$; 在应力方面, 均匀配点法的误差减小了 $91.53\% \sim 94.53\%$, 格雷维尔标记法误差减小了 $92.41\% \sim 98.18\%$ 。同时也应注意到, 两类配点方法的分析结果稍有差异, 其中格雷维尔标记法效果更好。

进一步, 通过对经典的拓扑优化二维 1/4 圆环算例进行优化计算, 以验证非齐次边界条件下的配点法边界施加方法的有效性。二维 1/4 圆环的初始设计域及约束情况见图 10, 最大迭代步数设置为 301 步。

本文设置了 3 组对比参照组, 如表 1 所示, 在各类的设计网格分辨率 ($n_{\text{elr}} \times n_{\text{ely}}$) 下对传统等几何拓扑优化方法、格雷维尔标记法进行比较。将



(a) 应变误差



(b) 应力误差

图 9 应变及应力误差对比

Fig.9 Comparison of strain and stress errors

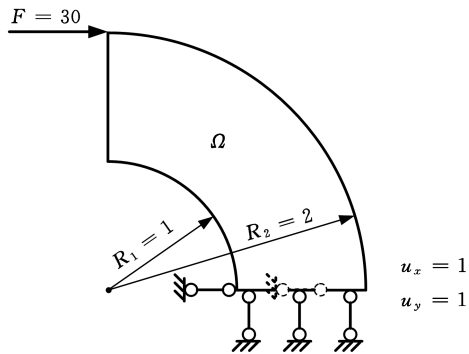


图 10 二维 1/4 圆环优化设计域及初始条件设置

Fig.10 Design domain and initial boundary condition settings for 2D quarter annulus

上述的每一组参数作为等几何拓扑优化方法的输入参数, 同时, 为了收敛结果保持稳定, 将模型最下方边界单元的网格密度固定。图 11 以组别分类, 分别展示了不同网格尺寸下的优化结果, 图 12 展示了两种方法优化过程中的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件残差的二范数变化趋势。

表 1 对比组别的参数设置

Tab.1 Parameter settings for the comparison groups

组别	n_{elr}	n_{ely}
1	100	100
2	200	200
3	400	400

图 11 中的优化结果表明, 传统方法与本文设计的格雷维尔标记法可以得到相似的优化结果: 两者在网格密度较小 (100×100) 的情况下都出现了棋盘格现象, 随着网格密度不断增大, 优化结果

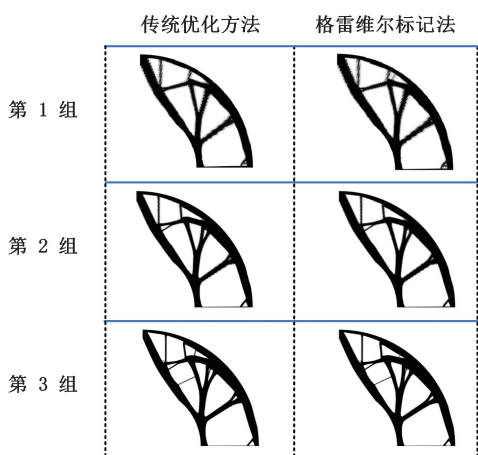


图 11 优化结果对比

Fig.11 Comparison of the optimal results

也更加理想,得到了更多的结构细节和更高的清晰度。图 12 表明了格雷维尔标记法的有效性,该方法能够在非齐次边界条件下的等几何拓扑优化中提高计算精度,减小设计误差。相较于传统方法,格雷维尔标记法将 KKT 条件残差二范数降低了 6.33%~8.50%(为避免优化初始时目标函

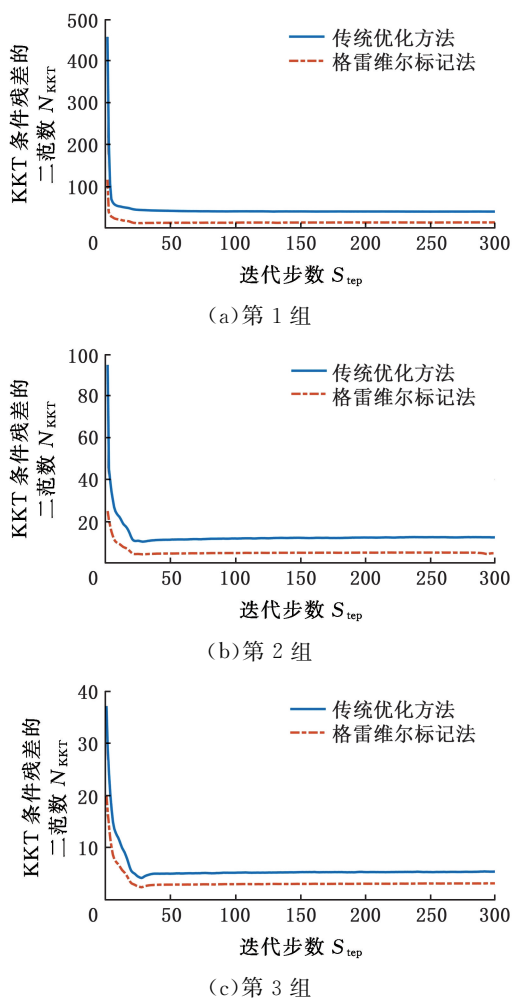


图 12 优化过程 KKT 条件残差对比

Fig.12 Comparison of KKT condition residuals in optimization process

数的剧烈振荡对结果造成的误差,本文选取第 51 步作为计算起始步)。

3.2 弱施加法算例验证

为验证罚函数法的有效性,利用 3.1 节中的二维 1/4 圆环等几何分析算例做先行验证。取 4 组单元数量的结果误差作对比,比较直接施加法、格雷维尔标记法和自适应罚函数法的计算结果。图 13 展示了应变和应力误差值。图中显示,罚函数法在等几何分析中的表现明显优于直接施加法和格雷维尔标记配点法,其内在原因是:基于配点法的强施加方法对复杂边界问题可能会导致数值不稳定或收敛困难,而基于罚函数法的弱施加方法可以更加准确地处理复杂边界条件,具有良好的数值稳定性,详情可参考文献[4];对边界裁剪单元的惩罚因子进行自适应更新能提高求解结果的精度^[34]。由对比图可以看出,在应变方面,自适应罚函数法与直接施加法相比,误差减小了 96.48%~99.90%,与格雷维尔标记法相比,误差减小了 95.65%~99.50%;在应力方面,自适应罚函数法能够实现与精确值相同结果,消除了等几何分析误差。

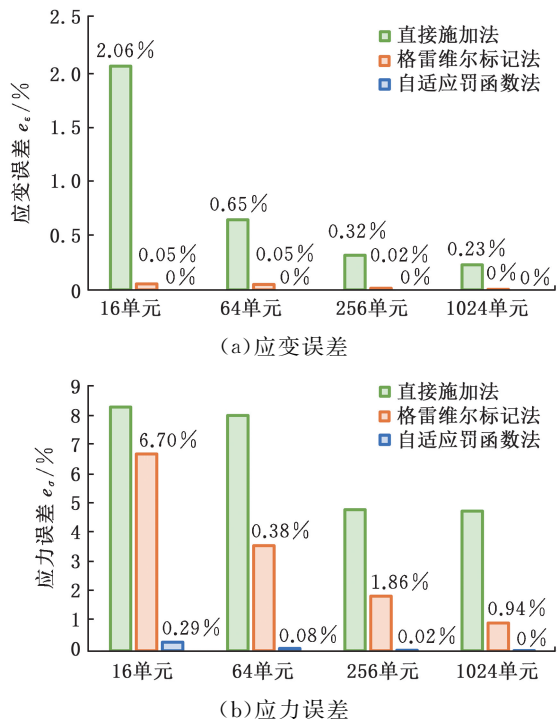


图 13 应变及应力误差对比(弱施加法算例)

Fig.13 Comparison of strain and stress errors (weak imposition method case)

进一步,使用二维圆环算例对自适应罚函数法在等几何拓扑优化中的有效性进行验证,初始条件和对比组参数设置同 3.1 节,对比了自适应罚函数法、格雷维尔标记法和传统方法在不同设计网格分辨率情况下的优化结果、收敛过程、优化

过程中 KKT 条件残差的二范数。自适应罚函数法的优化结果如图 14 所示,收敛过程 KKT 条件残差范数变化如图 15 所示。

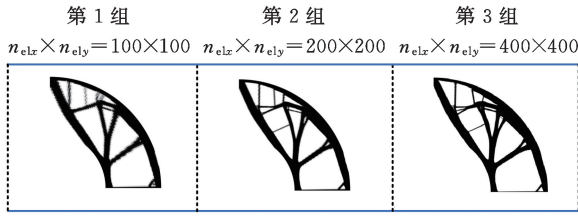
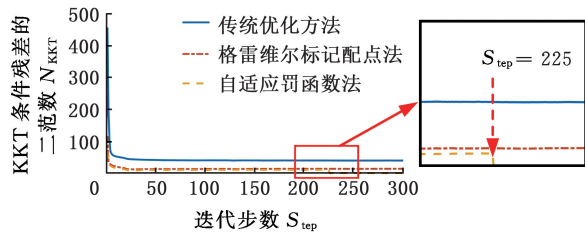
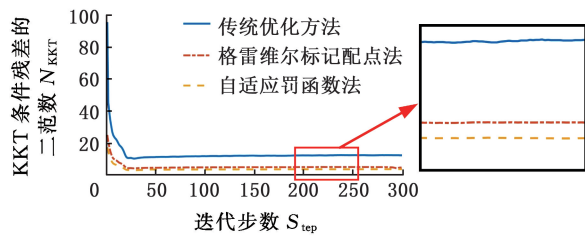


图 14 自适应罚函数法优化结果

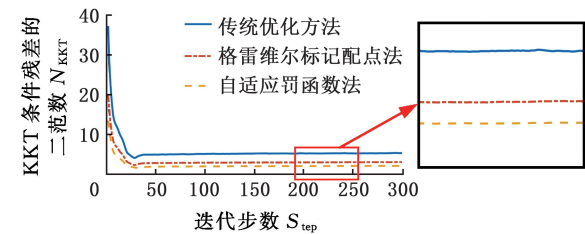
Fig.14 Optimal results of the adaptive penalty function method



(a) 第 1 组: $n_{elx} \times n_{ely} = 100 \times 100, S_{tepmax} = 301$



(b) 第 2 组: $n_{elx} \times n_{ely} = 200 \times 200, S_{tepmax} = 301$



(c) 第 3 组: $n_{elx} \times n_{ely} = 400 \times 400, S_{tepmax} = 501$

图 15 优化过程 KKT 残差对比(弱施加法算例)

Fig.15 Comparison of the KKT condition residuals in optimization process(weak imposition method case)

自适应罚函数法可以得到与传统方法及配点法相似的优化结构,并且展示了更加细致的结构细节,同时可以提高收敛速度,在 100×100 的网格尺寸下,自适应罚函数法在 256 步就实现了收敛,相较于其余两种触发最大迭代步数,更快达到收敛效果。图 15 中的 KKT 条件残差二范数也证明了自适应罚函数法的有效性,相较于传统方法和格雷维尔标记法,将 KKT 条件残差二范数分别减小了 $8.71\% \sim 9.34\%$ 和 $1.51\% \sim 3.03\%$ 。

4 结论

本文针对现有等几何拓扑优化的边界条件施加方法存在计算精度不高、收敛效果不理想的问题,设计了基于强施加方法和弱施加方法的等几何拓扑优化非齐次边界条件施加技术。基于格雷维尔标记法设计了配点法施加边界条件,并基于罚函数法设计了自适应罚函数法,利用优化过程中目标函数的更新实时修正惩罚因子,实现准确施加惩罚。通过等几何分析数值算例对两种方法的有效性进行验证,通过非齐次边界条件等几何拓扑优化算例进一步验证。相较于传统方法,格雷维尔标记配点法可以减小 KKT 条件残差二范数 $6.33\% \sim 8.50\%$,自适应罚函数法可减小 $8.71\% \sim 9.34\%$,同时可以提高收敛速度 14.95% 。

参考文献:

[1] 谢贤达. 基于等几何分析的移动可变形组件拓扑优化方法及应用研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2021. XIE Xianda. Research on Topology Optimization Method and Application of Mobile Deformable Components Based on Isogeometric Analysis[D]. Wuhan:Huazhong University of Science and Technology, 2021.

[2] 丁延冬, 罗年猛, 杨奥迪, 等. Bézier 单元刚度映射下的高效多重网格等几何拓扑优化方法[J]. 中国机械工程, 2022, 33(23):2801-2810. DING Yandong, LUO Nianmeng, YANG Aodi, et al. Efficient Multigrid Isogeometric Topology Optimization under Bézier Element Stiffness Mapping [J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(23): 2801-2810.

[3] 杨雨豪, 郑伟, 王英俊. 一种自由度缩减和收敛加速的高效等几何拓扑优化方法[J]. 中国机械工程, 2022, 33(23):2811-2821. YANG Yuhao, ZHENG Wei, WANG Yingjun. An Efficient Isogeometric Topology Optimization Method Using DOF Reduction and Convergence Acceleration[J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(23):2811-2821.

[4] 陈涛. 等几何分析方法的本质边界条件处理研究[D]. 西安:西北工业大学, 2016. CHEN Tao. Study on the Treatment of Essential Boundary Conditions of Equal Geometry Analysis Method[D]. Xi'an:Northwestern Polytechnical University, 2016.

[5] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement

- [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39/40/41):4135-4195.
- [6] WANG Huiping, WANG Dongdong. Efficient Meshfree Computation with Fast Treatment of Essential Boundary Conditions for Industrial Applications[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(10):1147-1154.
- [7] CHEN J S, WANG Huiping. New Boundary Condition Treatments in Meshfree Computation of Contact Problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 187(3/4):441-468.
- [8] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181(3):375-389.
- [9] WANG Lihua, HU Minghao, ZHONG Zheng, et al. Stabilized Lagrange Interpolation Collocation Method: a Meshfree Method Incorporating the Advantages of Finite Element Method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 404:115780.
- [10] LUCY L B. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis[J]. *The Astronomical Journal*, 1977, 82:1013.
- [11] 黄志强. 无网格法中本质边界条件实施研究[D]. 西安:西北工业大学, 2007.
HUANG Zhiqiang. Research on the Implementation of Essential Boundary Conditions in Meshless Method [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007.
- [12] WANG Dongdong, XUAN Junchang. An Improved NURBS-based Isogeometric Analysis with Enhanced Treatment of Essential Boundary Conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37/38/39/40):2425-2436.
- [13] 轩军厂. 基于改进边界条件施加方式和应变光滑子域积分的几何精确 NURBS 有限元分析[D]. 厦门:厦门大学, 2010.
XUAN Junchang. Geometrically Accurate NURBS Finite Element Analysis Based on Improved Boundary Condition Application and Strain-smooth Subdomain Integral[D]. Xiamen: Xiamen University, 2010.
- [14] 陈涛, 莫蓉, 万能. 等几何分析中 Dirichlet 边界条件的配点施加方法[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(5):157-164.
CHEN Tao, MO Rong, WAN Neng. Imposing Dirichlet Boundary Conditions with Point Collocation Method in Isogeometric Analysis[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(5):157-164.
- [15] 王东东, 轩军厂, 张灿辉. 几何精确 NURBS 有限元中边界条件施加方式对精度影响的三维计算分析[J]. *计算力学学报*, 2012, 29(1):31-37.
WANG Dongdong, XUAN Junchang, ZHANG Canhui. A Three Dimensional Computational Investigation on the Influence of Essential Boundary Condition Imposition in NURBS Isogeometric Finite Element Analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(1):31-37.
- [16] 张汉杰, 王东东, 轩军厂. 薄梁板结构 NURBS 几何精确有限元分析[J]. *力学季刊*, 2010, 31(4):469-477.
ZHANG Hanjie, WANG Dongdong, XUAN Junchang. Non-uniform Rational B Spline-based Isogeometric Finite Element Analysis of Thin Beams and Plates[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2010, 31(4):469-477.
- [17] HOANG T, VERHOUSEL C V, AURICCHIO F, et al. Skeleton-stabilized Iso Geometric Analysis: High-regularity Interior-penalty Methods for Incompressible Viscous Flow Problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 337:324-351.
- [18] LEI Zhen, GILLOT F, JEZEQUEL L. AC0/G1 Multiple Patches Connection Method in Isogeometric Analysis[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(15):4405-4420.
- [19] EMBAR A, DOLBOW J, HARARI I. Imposing Dirichlet Boundary Conditions with Nitsche's Method and Spline-based Finite Elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 83(7):877-898.
- [20] CHEN Tao, MO Rong, GONG Zhongwei. Imposing Essential Boundary Conditions in Isogeometric Analysis with Nitsche's Method[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, 121/122/123/124/125/126:2779-2783.
- [21] NGUYEN V P, KERFRIDEN P, BRINO M, et al. Nitsche's Method for Two and Three Dimensional NURBS Patch Coupling[J]. *Computational Mechanics*, 2014, 53(6):1163-1182.
- [22] HU Qingyuan, CHOU LY F, HU Ping, et al. Skew-symmetric Nitsche's Formulation in Isogeometric Analysis: Dirichlet and Symmetry Conditions, Patch Coupling and Frictionless Contact[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 341:188-220.
- [23] DU Xiaoxiao, ZHAO Gang, WANG Wei, et al. Nitsche's Method for Non-conforming Multipatch

- Coupling in Hyperelastic Isogeometric Analysis [J]. *Computational Mechanics*, 2020, 65(3):687-710.
- [24] 胡清元. 等几何分析中的闭锁问题与 Nitsche 方法研究[D]. 大连:大连理工大学, 2019.
HU Qingyuan. On the Locking Problem and the Nitsche's Method in Isogeometric Analysis [D]. Dalian:Dalian University of Technology, 2019.
- [25] DORNISCH W, KLINKEL S. Boundary Conditions and Multi-patch Connections in Isogeometric Analysis[J]. *PAMM*, 2011, 11(1):207-208.
- [26] TEMIZER I, WRIGGERS P, HUGHES T J R. Contact Treatment in Isogeometric Analysis with NURBS[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200 (9/10/11/12):1100-1112.
- [27] MITCHELL T J, GOVINDJEE S, TAYLOR R L. A Method for Enforcement of Dirichlet Boundary Conditions in Isogeometric Analysis [M] // MUELLER-HOEPPE D, LOEHNERT S, REESE S. *Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics*. Heidelberg: Springer, 2011:283-293.
- [28] JIANG Kai, ZHU Xuefeng, HU Changzhi, et al. An Enhanced Extended Isogeometric Analysis with Strong Imposition of Essential Boundary Conditions for Crack Problems Using B++ Splines[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 116:393-414.
- [29] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.
WANG Xucheng. *Finite Element Method*[M]. Beijing:Tsinghua University Press, 2003.
- [30] 黄艾香, 周天孝. 有限元理论与方法—第一分册[M]. 北京:科学出版社, 2009.
- HUANG Aixiang, ZHOU Tianxiao. *Finite Element Theory and Methods-Division 1*[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [31] ATLURI S N, SHEN Shengping. *The Meshless Method*[M]. Tech. Science Press Encino, 2002.
- [32] MONTEMURRO M. On theStructural Stiffness Maximisation of Anisotropic Continua under Inhomogeneous Neumann-Dirichlet Boundary Conditions [J]. *Composite Structures*, 2022, 287: 115289.
- [33] MONTEMURRO M, RODRIGUEZ T, PAILHÈS J, et al. On Multi-material Topology Optimisation Problems under Inhomogeneous Neumann-Dirichlet Boundary Conditions[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2023, 214: 103867.
- [34] De PRENTER F, VERHOOSSEL C V, Van BRUMMELEN E H, et al. Stability and Conditioning of Immersed Finite Element Methods: Analysis and Remedies[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2023, 30(6):3617-3656.

(编辑 王旻玥)

作者简介:王书亭,男,1968年生,博士、教授。研究方向为复杂机电产品集成设计理论与技术。E-mail:wangst@hust.edu.cn。
谢贤达* (通信作者),男,1994年生,博士、副研究员。研究方向为等几何分析与拓扑优化。E-mail:xiexd020@ncu.edu.cn。

本文引用格式:

王书亭,谢晴天,杨奥迪,等等几何拓扑优化非齐次边界条件施加技术研究[J]. *中国机械工程*, 2025, 36(3):525-535.
WANG Shuting, XIE Qingtian, YANG Aodi, et al. Research on Non-homogeneous Boundary Condition Imposing Techniques for Isogeometric Topology Optimization[J]. *China Mechanical Engineering*, 2025, 36(3):525-535.