

# 考虑最小尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计

刘敏<sup>1,2</sup> 卢飞扬<sup>1</sup> 占金青<sup>1,2\*</sup> 吴剑<sup>1</sup> 朱本亮<sup>3</sup>

1.华东交通大学机电与车辆工程学院,南昌,330013

2.华东交通大学载运工具与装备教育部重点实验室,南昌,330013

3.华南理工大学广东省精密装备与制造技术重点实验室,广州,510641

**摘要:**为了使柔顺机构构型与压电驱动分布同时达到最优,并满足工艺制造要求,提出考虑最小尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计方法。采用独立点密度插值模型描述主体结构的材料分布,利用水平集函数表征任意形状的内嵌可移动压电驱动器,通过结构指示函数识别实体和空相材料,采用滤波阈值技术控制主体结构的最小尺寸。同时建立非重叠约束以保证压电驱动器在优化过程中不与设计域边界发生重叠,并以柔顺机构的输出位移最大化为目标函数,建立独立点密度插值-水平集联合拓扑优化模型,利用移动渐近线法求解拓扑优化问题。数值算例证明所提方法可以有效地同时优化主体结构和压电驱动器的位置分布,并满足最小尺寸要求。

**关键词:**柔顺机构;拓扑优化;压电驱动;最小尺寸约束;可移动组件

**中图分类号:** TG156

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.02.008

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Topology Optimization of Compliant Mechanisms with Embedded Movable Piezoelectric Actuator Considering Minimum Length Constraints

LIU Min<sup>1,2</sup> LU Feiyang<sup>1</sup> ZHAN Jinqing<sup>1,2\*</sup> WU Jian<sup>1</sup> ZHU Benliang<sup>3</sup>

1.School of Mechatronics and Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013

2.Key Laboratory of Conveyance and Equipment of Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013

3.Guangdong Provincial Key Laboratory of Precision Equipment and Manufacturing Technique, South China University of Technology, Guangzhou, 510641

**Abstract:** In order to optimize the configuration of the compliant mechanisms and the distribution of the piezoelectric actuators simultaneously and meet the manufacturing requirements, a topology optimization design method of the compliant mechanisms was proposed with embedded movable piezoelectric actuators considering the minimum length constraints. The independent point density interpolation model was used to describe the material distribution of the main structure, the level set function was used to characterize the embedded movable piezoelectric actuator of any shape, the structure indicator function was used to identify the solid and empty phase materials, and the filtering threshold technology was used to control the minimum length of the main structure. At the same time, non-overlapping constraints were established to ensure that the piezoelectric actuator did not overlap with the boundary of the design domains during the optimization processes. Maximizing the output displacement of the compliant mechanisms was used as the objective function, and a hybrid topological description model of independent point density interpolation and level set method was established. The method of moving asymptote(MMA) approach was used to solve topology optimization problems. Numerical examples demonstrate that the proposed method may effectively simultaneously optimize the main structure and the position distribution of the piezoelectric actuators, and meet the minimum length requirements.

收稿日期:2024-03-01

基金项目:国家自然科学基金(52165002,52065019);赣鄱俊才支持计划——主要学科学术和技术带头人培养项目(20232BCJ23021);江西省自然科学基金(20224BAB204041,20232BCJ25012,20242BAB26067);中国博士后科学基金(2022M723189);江西省教育厅科技项目(GJJ2200628)

**Key words:** compliant mechanism; topology optimization; piezoelectric actuator; minimum length constraint; movable component

## 0 引言

柔顺机构是一种通过自身材料的弹性形变来进行力的传递或能量交换的新型机构,具有高精度、无摩擦磨损、无需润滑、无滞后、易于加工且几乎无需组装等优点<sup>[1-2]</sup>,在微纳操作、微机电系统和精密定位等领域得到广泛应用<sup>[3-5]</sup>。柔顺机构的设计方法主要有基于运动学方法和拓扑优化方法<sup>[6]</sup>。在设计柔顺机构时,采用拓扑优化方法可以获得机构的最优构型,提高机构的性能和稳定性。近年来,研究人员对柔顺机构的拓扑优化设计进行了大量的研究<sup>[7-9]</sup>。EMMENDOERFER等<sup>[10]</sup>基于应力约束的水平集方法设计了柔顺机构,避免了柔顺机构产生类铰链。许洁等<sup>[11]</sup>采用等几何拓扑优化方法设计的柔顺机构的轮廓具有较好的光滑性和连续性。何健等<sup>[12]</sup>基于双向渐进结构优化法,提出一种面向柔顺机构的拓扑优化设计策略,通过调节加权系数能有效避免类铰链的产生。

在工程应用中往往需要预留相应空间安装某些特殊功能模块(如驱动器、电容器、传感器等)。为了更好地实现组件在主体结构上的布局优化,需要对多组件系统进行一体化拓扑优化设计<sup>[13]</sup>。ZHU等<sup>[14]</sup>提出了一种新的集成布局优化方法,将可移动组件嵌入设计域中与结构优化同步进行,并采用有限元方法避免组件重叠。XIA等<sup>[15]</sup>提出的超级单元公式(superelement formulation, SEF)方法极大地简化了组件位置变化设计变量的灵敏度分析。WANG等<sup>[16]</sup>采用KS函数描述内嵌几何组件和孔洞的几何形状,实现了可移动组件和内嵌孔洞的同时优化。

柔顺机构通常利用压电材料作为驱动,以获得精密的运动,也可以看作一个多组件系统。然而,在传统的柔顺机构拓扑优化设计中,并未考虑实际的驱动,仅仅是将驱动模拟为一个固定的集中力。为了提高基于压电驱动的柔顺机构的性能,研究人员采用上述多组件系统一体化拓扑优化方法对柔顺机构进行设计。YANG等<sup>[17]</sup>以压电驱动的位置、电压、机构本体的伪密度作为三种设计变量,提出了压电片驱动的层压复合柔顺结构的拓扑优化方法,提高了整体变形精度。WANG等<sup>[18]</sup>采用水平集函数描述压电驱动的边界,用点密度插值法描述机构本体的拓扑,提出了压电驱动与柔顺机构本体构型同时优化的设计方

法,提高了系统的全局驱动性能。WANG等<sup>[19]</sup>基于投影变换的移动可变形组件法与参数化水平集法相结合的混合拓扑优化方法设计了压电驱动嵌入式柔顺机构。

柔顺机构拓扑优化设计容易出现类铰链现象,使得后续的加工难以实现,因此,有学者提出了采用单元节点密度插值的方法,通过控制影响域大小来实现尺寸约束。WANG等<sup>[20]</sup>提出了一种基于节点设计变量的自适应方法,提高了结构边界描述质量。KANG等<sup>[21]</sup>提出了一种基于节点设计设计变量点非本地密度插值策略,设计变量点可不与单元节点重合,可避免棋盘格现象及孤岛效应。GUEST等<sup>[22]</sup>提出 Heaviside 投影法,以节点密度值作为设计变量,利用投影算子将密度场的节点值投影到单元空间,通过确定用于刚度插值的单元密度控制结构最小尺寸。ZHOU等<sup>[23]</sup>提出了几何约束的最小尺寸控制方法,结合过滤阈值拓扑优化技术,通过识别固相和空相材料实现了结构最小尺寸控制。但上述研究均只考虑单一固相材料的尺寸控制,实现内嵌压电驱动的多相材料分布尺寸控制还未见报道。

本文提出一种考虑尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计方法。采用独立点密度插值方法<sup>[18]</sup>及水平集方法混合拓扑描述模型来表征压电驱动器在优化过程中位置和角度。最小尺寸则采用滤波阈值方法进行控制,通过构建结构指示函数保证设计域内任一点都能满足相应材料区域的最小尺寸约束。以固相材料和空相的最小尺寸、各压电组件之间互不重叠以及不与设计域边界发生干涉作为约束条件,将柔顺机构的输出端位移最大化作为目标函数,建立拓扑优化数学模型,使用移动渐近优化算法对优化模型进行求解,利用多个数值算例验证所提方法的有效性。

## 1 内嵌压电驱动的拓扑优化

### 1.1 压电驱动器的拓扑描述

图1所示为采用水平集表示的矩形压电驱动器(蓝色矩形表示压电驱动器),其形状边界由水平集函数来定义表示:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) > 0, \forall x \in \Omega \\ \Phi(x) = 0, \forall x \in \Gamma \\ \Phi(x) < 0, \forall x \in D/(\Omega \cup \Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： $\Omega = \cup_{i=1}^{N_p} \Omega_i$  为所有压电驱动器在设计域内所占的总区域； $N_p$  为所有压电驱动器的数量； $\Omega_i$  为第  $i$  个压电驱动器所占的区域大小； $\Gamma = \cup_{i=1}^{N_p} \Gamma_i$  为所有压电驱动器在设计域内的边界总和； $\Gamma_i$  为第  $i$  个压电驱动器的边界大小； $D$  为设计域的区域。

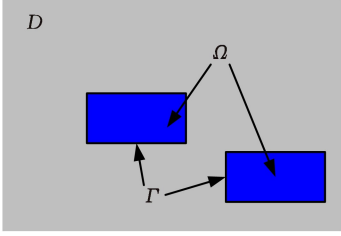


图 1 压电驱动器的水平集表示

Fig.1 The level set representation of the piezoelectric actuators

水平集方法的使用可以保证压电驱动器的边界在演化过程中的准确和光滑表示，精确地捕捉压电驱动器在设计域内的边界移动。由此也可以扩展到表示任意复杂边界形状的压电驱动器。

对水平集函数  $\Phi(x)$  引入虚拟时间  $t$ ， $\Phi(x, t)$  表示某一固定时刻  $t$  的水平集函数分布。计算水平集函数对时间  $t$  的微分，通过求解一阶偏微分 Hamilton-Jacobi 方程得到运动边界的演化过程：

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \Phi| = 0 \quad (2)$$

式中： $v_n$  为法向速度， $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ； $\mathbf{v}$  为压电驱动器的边界上各点的运动速度； $\mathbf{n} = -\nabla \Phi / |\nabla \Phi|$  为压电驱动器的边界上各点的外法线方向。

对式(2)采用迎风格式进行求解。为了保持驱动器的边界精确稳定，采用三阶基本无振荡 (essentially non-oscillatory, ENO) 近似格式。求解式(2)时，应小心处理 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件，以确保时间步长足够小，达到数值稳定性。

水平集函数通常被选为符号距离函数，即从每个计算点到压电驱动器边界的最短距离。为了保持水平集函数的形状及有符号距离行为，通常需要通过求解下式来进行重新初始化：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{sgn}(\Phi_0) (|\nabla \Phi| - 1) &= 0 \\ \Phi(x, t = 0) &= \Phi_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中： $\Phi_0$  为初始化前的水平集函数。

### 1.2 主体结构拓扑描述

采用非局部 Shepard 密度插值方法来描述承载压电驱动器的主体结构。该方案可以避免点密度插值方法遇到的密度负值现象，同时得到具有严格物理意义上的密度场分布，即每一点均满足  $[0 - 1]$  界限性。在设计域内，所有单元节点的密

度设计变量总数为  $N$ 。其中任意一点  $x$  的密度值为

$$\rho(x) = \sum_{i \in S_x} \theta_i(x) \rho_i \quad (4)$$

$$\theta_i(x) = \frac{d(x - x_i)}{\sum_{j \in S_x} d(x - x_j)} \quad (5)$$

其中， $\rho_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为设计变量点的密度， $d(x - x_i) = \|x - x_i\|^2$ ；集合  $S_x$  为点  $x$  影响域内的所有设计变量点。点  $x$  的影响域是以  $x$  点为圆心、截断半径为  $R_x$  的圆形域，如图 2 所示。

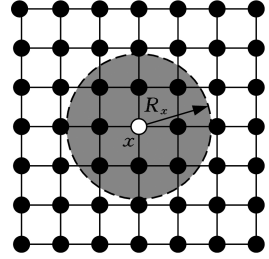


图 2 点 x 的影响域示意图

Fig.2 Diagram of the sphere of influence at point x

### 1.3 混合拓扑描述

结合上述压电驱动器的水平集描述模型和主体结构描述模型，可以得到压电材料和主体结构固相及空相的三相材料混合拓扑描述模型。设计域内任意一点  $x$  的材料弹性矩阵可表示为

$$\mathbf{D}(x) = H(\Phi) \mathbf{D}^p + (1 - H(\Phi)) \mathbf{D}^h \quad (6)$$

其中， $H(\cdot)$  为 Heaviside 函数； $\mathbf{D}^p$  为压电驱动器的弹性刚度矩阵； $\mathbf{D}^h$  为主体承载结构的弹性刚度矩阵，与点  $x$  处的密度有关，表示为

$$\mathbf{D}^h = [\rho(x)]^p \mathbf{D}_0 \quad (7)$$

式中： $\mathbf{D}_0$  为主体承载结构固相材料的刚度矩阵； $p$  为惩罚因子， $p = 3$ 。

## 2 拓扑优化问题描述

### 2.1 压电驱动有限元分析

在线弹性变形的假设下，压电材料的本构方程表示为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{d} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  分别为结构的应力和应变张量； $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{d}$  和  $\boldsymbol{\kappa}$  分别为压电张量、电场强度向量、电位移向量和介电常数张量。其中， $\mathbf{E}$  与电势场  $\varphi$  的梯度有关， $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 。

为提高压电驱动器边界区域单元位移场的计算精度，采用扩展有限元方法 (extended finite element method, X-FEM) 对结构的局部区域进行加强处理。在 X-FEM 框架下，位移场插值表示为

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{i \in M} \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i \in M^{en}} \mathbf{N}_i \boldsymbol{\Psi} \mathbf{a}_i \quad (9)$$

$$\Psi(x) = \sum_{i \in M^{en}} N_i(x) |\Phi_i| - \sum_{i \in M^{en}} N_i(x) \Phi_i \quad (10)$$

式中:  $N_i$  为标准有限元形函数;  $u_i$  为标准单元节点位移;  $a_i$  为增强节点上的增强自由度;  $M, M^{en}$  为所有节点和增强节点的集合;  $\Psi$  为增强函数。

对于压电材料, 边界与空相之间的位移插值形式表示为

$$u^h(x) = \sum_{i \in J} N_i(x) H(\Phi(x)) u_i \quad (11)$$

通过有限元离散, 力-电耦合平衡方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}^T$$

式中:  $\mathbf{K}_{uu}, \mathbf{K}_{u\phi}, \mathbf{K}_{\phi\phi}$  分别为力学刚度矩阵、电力耦合矩阵和介电矩阵;  $\mathbf{U}$  为节点位移向量(包含所有的节点位移  $u_i$  和增强自由度  $a_i$ ); 矢量  $\boldsymbol{\phi}$  为节点电势自由度;  $\mathbf{F}, \mathbf{Q}$  分别为施加的节点载荷和电荷向量。

假设在设计域厚度方向上施加均匀常数电场, 如图 3 所示。电势沿厚度方向线性变化, 因此压电驱动器内任一点的电场强度可以表示为  $\mathbf{E} = (0, 0, v^{(e)}/d)^T$ ,  $v^{(e)}$  表示外界施加的电压,  $d$  表示压电驱动器的厚度。此时, 压电驱动器只在主体承载结构施加面内载荷, 发生面内形变。

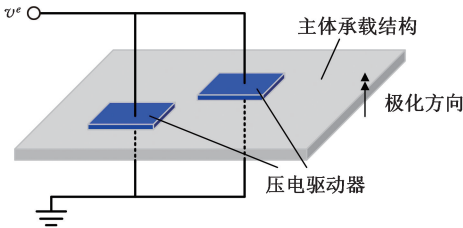


图 3 压电驱动器施加电压时主体承载结构产生的面内变形

Fig.3 The piezoelectric actuators applies voltage, and the main bearing structure causes in-plane deformation

在外加电压作用下, 力-电耦合可解耦为力学问题。因此, 平衡方程可表示为

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{F}_p$  为压电驱动器在外加电压下产生的压电载荷;  $\mathbf{F}$  为主体承载结构外部施加的载荷。

对于没有进行增强的标准单元, 其刚度矩阵可表示为

$$(\mathbf{K}_{uu})_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{D}(x) \mathbf{B}_u^{std} d\Omega \quad (14)$$

$$e \in J \setminus J^{en}$$

式中:  $\mathbf{B}_u^{std}$  为标准单元的位移-应变矩阵;  $\mathbf{D}$  为固相弹性材料的弹性矩阵;  $J$  为所有单元的集合;  $J^{en}$  为所有增强单元的集合。

式(13)中的压电载荷可表示为

$$(\mathbf{F}_p)_e = -(\mathbf{K}_{uu})_e \boldsymbol{\phi}_e = \left( \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{e}_p^T H(\Psi) d\Omega \right) \mathbf{E}_e \quad (15)$$

$$e \in J \setminus J^{en}$$

式中:  $\mathbf{e}_p$  为压电矩阵。

增强单元  $e (e \in J)$  的单元刚度矩阵表示为

$$(\mathbf{K}_{uu})_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{ss} & \mathbf{K}_{uu}^{se} \\ \mathbf{K}_{uu}^{es} & \mathbf{K}_{uu}^{ee} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{K}_{uu}^{ss})_e &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{D}(x) \mathbf{B}_u^{std} d\Omega \\ (\mathbf{K}_{uu}^{se})_e &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{D}(x) \mathbf{B}_u^{en} d\Omega = (\mathbf{K}_{uu}^{es})_e \\ (\mathbf{K}_{uu}^{ee})_e &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{D}(x) \mathbf{B}_u^{en} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{B}_u^{en}$  为增强单元的位移-应变矩阵。

压电载荷向量表示为

$$(\mathbf{F}_p)_e = [\mathbf{F}_p^{std} \mid \mathbf{F}_p^{en}] \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{F}_p^{std}) &= \left( \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{std})^T \mathbf{e}_p^T H(\Psi) d\Omega \right) \mathbf{E}_e \\ (\mathbf{F}_p^{en}) &= \left( \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_u^{en})^T \mathbf{e}_p^T H(\Psi) d\Omega \right) \mathbf{E}_e \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

## 2.2 几何约束

在本文中, 柔顺机构的最小尺寸控制主要通过滤波阈值拓扑方法实现。利用设计变量  $\rho (0 \leq \rho \leq 1)$ , 滤波设计变量  $\tilde{\rho}$  和投影设计变量  $\bar{\rho}$  作为基本计算框架, 在  $\eta \in (\eta_d, \eta_e) (0 < \eta_d < \eta_i < \eta_e < 1)$  范围内的所有投影密度  $\bar{\rho}_{\eta_i}$  具有相同的拓扑构型。

密度过滤通过相邻设计变量点的密度  $\rho_i$  的加权平均, 获得过滤后的节点密度  $\tilde{\rho}$ :

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\sum_{j \in Z_i} \omega_j(x_j) v_j \rho_j}{\sum_{j \in Z_i} \omega_j(x_j) v_j} \quad (20)$$

其中,  $Z_i$  为单元节点  $i$  的距离不超过最小过滤半径  $R_{min}$  的所有节点集合;  $x_j$  为单元节点  $j$  的坐标;  $\omega_j(x_j)$  为权重函数, 可表示为

$$\omega_j(x_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_i - x_j|}{R_{min}} & |x_i - x_j| \leq R_{min} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $x_i$  为单元节点  $i$  的坐标。

然后, 采用 Heaviside 映射函数对过滤的单元节点密度场进行映射, 获得其真实物理点密度  $\bar{\rho}_i$ :

$$\bar{\rho}_i = \frac{\tanh(\beta \eta_i) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}_i - \eta_i))}{\tanh(\beta \eta_i) + \tanh(\beta(1 - \eta_i))} \quad (22)$$

式中:  $\eta_i$  为阈值, 取 0.5;  $\beta$  为控制近似 Heaviside 映射函数近似程度的参数。

而主体承载结构及空相若要实现最小尺寸控制, 则需要满足以下充分条件:

$$\bar{\rho}(x) \geq \eta_e$$

$$\forall x \in \Omega_1 = \{x \mid \bar{\rho}_{\eta_i}(x) = 1 \ \& \ \nabla \bar{\rho} = 0\} \quad (23)$$

$$\bar{\rho}(x) \leq \eta_d$$

$$\forall x \in \Omega_2 = \{x \mid \bar{\rho}_{\eta_i}(x) = 0 \ \& \ \nabla \bar{\rho} = 0\} \quad (24)$$

式中： $\Omega_1$  为过滤密度  $\bar{\rho}_i$  的固相阈值范围； $\Omega_2$  为过滤密度  $\bar{\rho}_i$  的空相阈值范围； $\eta_e, \eta_d$  为阈值，分别取 0.95 和 0.05； $\nabla \bar{\rho}$  为过滤密度  $\bar{\rho}_i$  的空间梯度。

固相拐点域  $\Omega_1$  和空相拐点域  $\Omega_2$  采用两种结构指示函数来表示：

$$I^s = \bar{\rho} \cdot \exp(-c \|\nabla \bar{\rho}\|^2) \quad (25)$$

$$I^v = (1 - \bar{\rho}) \cdot \exp(-c \|\nabla \bar{\rho}\|^2) \quad (26)$$

式中：上标 s 和 v 分别表示固相和空相。

式(25)和式(26)中的指数项在  $\nabla \bar{\rho} = 0$  时分别表明过滤场密度中的固相拐点域和空相拐点域，即当  $I^s = 1$  时，表明设计变量点位于固相材料区域  $\Omega_1$  的内部，当  $I^s = 0$  时，表明设计变量点位于固相材料区域  $\Omega_1$  的外部。空相材料区域的指示函数  $I^v$  具有相同的规律。 $c$  为控制结构指示函数在  $\nabla \bar{\rho} \neq 0$  处衰减速率的参数，取值范围为 0 ~ 1。当  $c$  取 1 时，所有物理密度场的固相区域将被识别为固相拐点区域，这将扩大式(23)和式(24)所表示的固相和空相拐点区域，使得最小尺寸约束过于严格；当  $c$  取值为非常接近 0 的很小数时， $I^s$  和  $I^v$  表示的区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  将比期望的区域更小甚至断开，这可能会导致最小尺寸控制的失效。本文  $c$  取  $(R_{\min})^4$ ，能够准确识别式(23)和式(24)所表示的固相和空相拐点区域。

基于式(25)和式(26)所表示的两个结构指示函数，为满足式(23)和式(24)提出的满足最小尺寸控制的两个充分条件，提出关于固相和空相的两个几何约束：

$$g^s = \frac{1}{n} \sum_{i \in N_i} I_i^s \cdot (\min((\bar{\rho}_i - \eta_e), 0))^2 = 0 \quad (27)$$

$$g^v = \frac{1}{n} \sum_{i \in N_i} I_i^v \cdot (\min((\eta_d - \bar{\rho}_i), 0))^2 = 0 \quad (28)$$

式中： $n$  为  $Z_i$  集合内的元素个数。

满足以上两个几何约束条件，过滤密度大于阈值  $\eta_e$  的设计变量点位于拐点区域  $\Omega_1$  内，过滤密度小于阈值  $\eta_d$  的设计变量点位于拐点区域  $\Omega_2$  内，进而实现固相和空相材料的最小尺寸控制。但是，在实际应用中由于非拐点区域的指示函数  $I^s$  和  $I^v$  存在无限接近零而非零值，导致几何约束函数  $g^s$  和  $g^v$  也为非零值，不能严格满足几何约束等式，所以需要几何约束  $g^s$  和  $g^v$  进行松弛处理：

$$g^s \leq \tau \quad (29)$$

$$g^v \leq \tau \quad (30)$$

式中： $\tau$  为一个极小正值来弥补数值误差。

### 2.3 拓扑优化数学模型

图 4 是内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计域示意图， $D$  表示设计域， $\Gamma_D$  表示设计域的固定边界， $\Gamma$  表示压电驱动器的边界，在压电驱动器上施加恒定电压  $U_{in}$ ，在输出端产生期望的输出位移  $u_{out}$ ，采用输出虚拟弹簧  $K_{out}$  来模拟工件刚度。

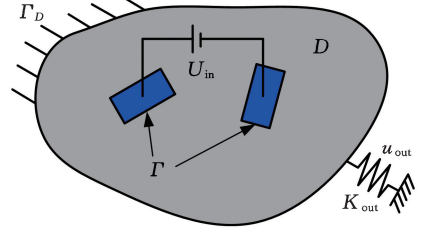


图 4 内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计域  
Fig.4 Topology optimization design domain of compliant mechanism with embedded mobile piezoelectric drive

在恒定电压作用下，以柔顺机构上指定点的输出位移最大化为目标函数，以机构的体积比、非重叠约束、主体结构固相和空相的最小尺寸作为约束条件，建立考虑尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化模型：

$$\left. \begin{aligned} & \text{Find } \rho_i, \alpha_j (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N_p) \\ & \max J = u_{out} \\ & \text{s.t. } \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F} \\ & V^H \leq f_v V_0 \\ & V^\delta \leq V_0 - V_p \\ & g^s \leq \tau \\ & g^v \leq \tau \\ & 0 < \rho \leq \rho_i \leq 1 \\ & V^H = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \quad V^\delta = \int_{\Omega} (1 - H(\Phi)) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中： $\rho_i$  为主体结构的点密度设计变量； $\alpha_j$  为压电驱动器的虚拟速度设计变量(包括平移速度  $\alpha_{xj}, \alpha_{yj}$  和转动角速度  $\alpha_{\theta j}$ )； $J$  为输出位移； $N, N_p$  分别为单元节点密度设计变量和设计域内可移动压电驱动器的数量； $V^H$  为机构整体的固相材料体积； $V^\delta$  为非压电驱动器区域的材料体积； $V_0$  为设计域的体积； $V_p$  为压电驱动器的体积。

### 3 灵敏度分析

#### 3.1 点密度设计变量灵敏度分析

通过有限元离散，目标函数可以改写为  $J = \hat{\omega}^T \mathbf{u}$ ， $\hat{\omega}$  是规则化向量，只在指定输出端所在节点取值为 1，其余均为 0。当不施加相关外力时，目标函数对点密度设计变量的导数为

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_i} \mathbf{u}_e \quad (32)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

其中:  $N_e$  为设计域划分的单元总数, 伴随向量  $\lambda_e$  可用求解伴随方程表示:

$$\boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \quad (33)$$

第  $e$  个单元刚度矩阵对第  $i$  个点密度设计变量的导数表示为

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_i} = \int_{\Omega_e} p(\rho(x))^{\rho-1} \frac{\partial \rho(x)}{\partial \rho_i} (1 - H(\Phi)) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial \rho_i} = \begin{cases} \Theta_i & i \in S_x \\ 0 & i \notin S_x \end{cases} \quad (35)$$

材料体积约束对第  $i$  个点密度设计变量的导数表示为

$$\frac{\partial V^H}{\partial \rho_i} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \rho(x)}{\partial \rho_i} d\Omega \quad (36)$$

另使

$$I_i^{sm} = (\min((\tilde{\rho}_i - \eta_e), 0))^2 \quad (37)$$

$$I_i^{ym} = (\min((\eta_d - \tilde{\rho}_i), 0))^2 \quad (38)$$

则尺寸约束对点密度设计变量的导数可表示为

$$\frac{\partial g^s}{\partial \rho_i} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial I_i^s}{\partial \tilde{\rho}_i} \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_i} I_i^{sm} + I_i^s \frac{\partial I_i^{sm}}{\partial \tilde{\rho}_i} \right) \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_i} \quad (39)$$

$$\frac{\partial g^y}{\partial \rho_i} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial I_i^y}{\partial \tilde{\rho}_i} \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_i} I_i^{ym} + I_i^y \frac{\partial I_i^{ym}}{\partial \tilde{\rho}_i} \right) \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_i} \quad (40)$$

由式(37)和式(38)可知, 式(39)和式(40)中  $\partial I_i^{sm} / \partial \tilde{\rho}_i$  和  $\partial I_i^{ym} / \partial \tilde{\rho}_i$  可表示为

$$\frac{\partial I_i^{sm}}{\partial \tilde{\rho}_i} = 2 \min((\tilde{\rho}_i - \eta_e), 0) \frac{\partial \eta_i^s}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (41)$$

$$\frac{\partial I_i^{ym}}{\partial \tilde{\rho}_i} = 2 \min((\eta_d - \tilde{\rho}_i), 0) \frac{\partial \eta_i^y}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (42)$$

$$\eta_i^s = \min((\tilde{\rho}_i - \eta_e), 0) \quad (43)$$

$$\eta_i^y = \min((\eta_d - \tilde{\rho}_i), 0) \quad (44)$$

令

$$I_{\text{exp}} = \exp(-c \|\nabla \tilde{\rho}\|^2) \quad (45)$$

对  $\tilde{\rho}_i$  求导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\text{exp}}}{\partial \tilde{\rho}_i} &= 2 \exp(-c \|\nabla \tilde{\rho}\|^2) \cdot (-c) \cdot \\ &\|\nabla \tilde{\rho}\| \frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}\|}{\partial \tilde{\rho}_i} \end{aligned} \quad (46)$$

由式(25)和式(26)可得  $\partial I_i^s / \partial \tilde{\rho}_i$  和  $\partial I_i^y / \partial \tilde{\rho}_i$ :

$$\frac{\partial I_i^s}{\partial \tilde{\rho}_i} = (I_{\text{exp}} + \tilde{\rho}) \frac{\partial I_{\text{exp}}}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (47)$$

$$\frac{\partial I_i^y}{\partial \tilde{\rho}_i} = (-I_{\text{exp}} + (1 - \tilde{\rho})) \frac{\partial I_{\text{exp}}}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (48)$$

### 3.2 虚拟速度设计变量灵敏度分析

采用解析形状灵敏度分析方法得到目标函数和约束函数关于虚拟速度设计变量的灵敏度分析。因为压电驱动器也是设计域的一部分, 所以在其移动过程中会对设计域产生微小摄动, 其改变量可表示为

$$\Omega_i^s = (\mathbf{I} + t\boldsymbol{\theta})\Omega^s \quad (49)$$

式中:  $\boldsymbol{\theta}$  为虚拟速度的摄动向量。

目标函数的方向导数定义在积分域变分零点处:

$$U'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U((\mathbf{I} + t\boldsymbol{\theta})(\Omega)) - U(\Omega)}{t} \quad (50)$$

$$i = 1, 2, \dots, N^p$$

因此, 可得到目标函数的形状导数:

$$U'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}_i) = \int_{\Gamma_i^p} [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : (\mathbf{D}^p - \mathbf{D}^H) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}] (\boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (51)$$

其中:  $\boldsymbol{\theta}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N^p$ ) 为第  $i$  个压电驱动器的虚拟速度摄动向量, 可表示为

$$\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r} \quad (52)$$

式中:  $\mathbf{V}_i$  为第  $i$  个压电驱动器的虚拟平移速度向量;  $\boldsymbol{\omega}_i$  为相对于旋转中心的角速度;  $\mathbf{r}$  为压电驱动器边界到旋转中心的距离向量。

非重叠约束的形状灵敏度表示为

$$(V^\circ)'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}_i) = \int_{\Gamma_i^p} (1 - H(\Phi)) (\boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (53)$$

通过链式法则, 目标函数和约束函数对虚拟速度变量的导数可分别表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij}} &= \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \alpha_{ij}} & \frac{\partial V^\circ}{\partial \alpha_{ij}} &= \frac{\partial V^\circ}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \alpha_{ij}} \\ i &= 1, 2, \dots, N^p & j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (54)$$

其中:  $\partial \boldsymbol{\theta}_i / \partial \alpha_{ij}$  可由式(40)求偏导数得到, 而  $\partial J / \partial \boldsymbol{\theta}_i$  和  $\partial V^\circ / \partial \boldsymbol{\theta}_i$  可分别表示为

$$J'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \cdot \boldsymbol{\theta}_i \quad (V^\circ(\Omega))'(\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{\partial V^\circ}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \cdot \boldsymbol{\theta}_i \quad (55)$$

移动渐近线算法 (method of moving asymptotes, MMA) 稳定性好, 使用范围广, 特别适用于多约束的复杂优化问题求解。本文采用 MMA 算法求解考虑最小尺寸控制的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化问题, 流程图见图 5。

## 4 数值算例

### 4.1 反向器

图 6 所示为内嵌可移动压电驱动位移反向器的设计域、指定输出端及固定边界。反向器的设计域尺寸  $L \times D$  设定为  $120 \text{ mm} \times 160 \text{ mm}$ , 设计域的左端作为固定边界条件, 对内嵌可移动压电驱动组件施加恒定电压, 指定设计域右边中点为目标输出点。定义主体承载部分实体材料的弹性模量  $E_1$  为  $70 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\mu_1$  为  $0.32$ , 压电驱动组件材料的弹性模量  $E_2$  为  $74 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\mu_2$  为  $0.35$ , 电位移为  $-9.3 \text{ C/m}^2$ 。同时设定施加的恒定电压为  $5 \text{ kV}$ , 惩罚因子  $p$  选为  $3$ , 主体承载部分及压电驱动组件的厚度均为  $1 \text{ mm}$ , 输出弹簧刚度  $K_{\text{out}}$  设为  $1500 \text{ N/m}$ 。因为压电组件在此设

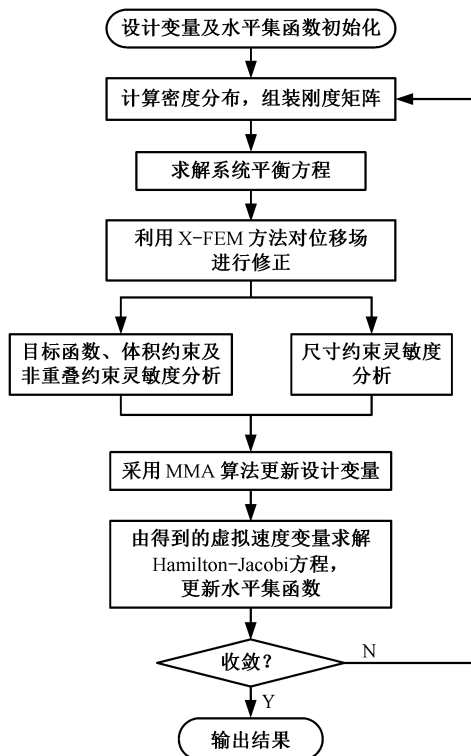


图 5 考虑尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计流程图

Fig.5 Topology optimization design flowchart of a compliant mechanism with embedded movable piezoelectric drive considering size constraints

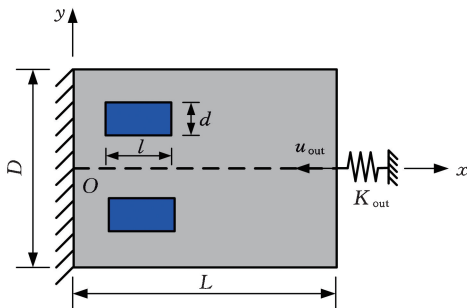


图 6 位移反向器的设计域

Fig.6 Design domain of displacement reverser

计域中对称分布,所以设计域整体呈上下对称分布,为提高计算效率,仅选取设计域上半部分进行有限元分析,并将其离散为  $80 \times 120$  个四节点四边形单元。算例中矩形压电驱动组件的初始形式均设置为转动角度为  $0$ ,且长、宽边分别平行于  $x$  轴和  $y$  轴。当连续两个优化迭代结果差值小于  $10^{-3}$  时,优化过程停止。

为了验证最小尺寸控制在内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化中的有效性,考虑在相同参数条件下,对比无尺寸约束及不同最小尺寸情况下的拓扑优化结果。设定压电驱动组件大小  $(l \times d)$  为  $20 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ ,其中心初始位置为  $(20, 25) \text{ mm}$ ,允许材料体积比为设计域的  $30\%$ 。首

先选取  $R_{min} = 5$  作为最小尺寸控制参数,拓扑优化过程如图 7 所示。

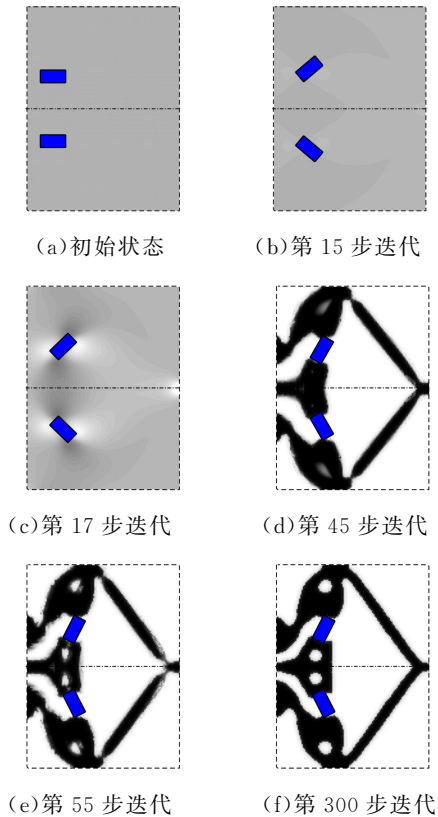


图 7 位移反向器的拓扑优化过程

Fig.7 Topology optimization of displacement reverser

图 7 所示为内嵌可移动压电驱动反向器在不同迭代步数下的整体构型变化。图 7a 表示可移动压电驱动组件在优化开始前的初始状态,图 7b 表示第 15 次迭代后可移动压电驱动器组件位置发生明显变化,前 15 步对可移动设置较大的移动速度,可以尽快到达最佳位置附近,图 7c 表示第 17 步开始形成主体承载构型,图 7d 表示内嵌可移动压电驱动反向器的第 45 步迭代,可观察到初始构型已基本形成,但存在类铰链连接,且还存在较多中间灰度单元。图 7e 表示第 55 步迭代,此后将可移动压电驱动组件在机构内的位置固定,后续引入两相尺寸约束,期望实现非压电驱动组件区域的材料最小尺寸控制。图 7f 是压电驱动反向器最终拓扑构型图,可明显观察到固相及空相材料均满足目标最小尺寸控制,相较于图 7e 具有明显改善效果,同时主体承载部分形成相同大小的孔洞以满足空相区域最小尺寸控制。

图 8 所示为目标函数及体积分数随迭代步数的变化曲线,目标函数曲线由于在第 55 步迭代引入尺寸约束出现部分振荡,最终在机构构型稳定后逐渐趋近平稳,最终收敛至  $-0.213 \text{ mm}$ 。

允许体积上限为  $0.3、0.4$  时,无尺寸约束及

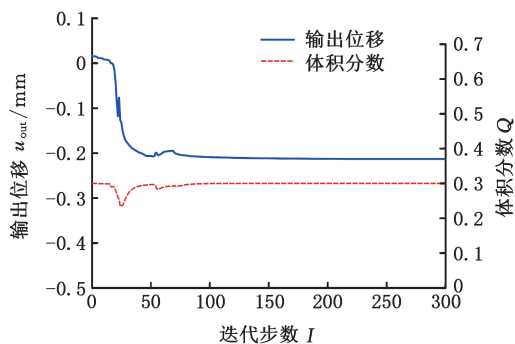


图 8 位移反向器的拓扑优化迭代曲线

Fig.8 Topology optimization iteration curve of displacement reverser

尺寸控制参数  $R_{min}$  分别为 3、4、5 时的拓扑构型图见图 9,可明显观察到施加尺寸约束的机构最终构型相较于无尺寸约束的情况,主体承载结构部分所存在的类铰链情况得到解决,且实相区域的最小连接处均满足相应的目标最小尺寸控制,同

时其内部空相区域也满足相应的最小尺寸控制,验证了所提方法的有效性。

### 4.2 夹持器

图 10 所示为内嵌可移动压电驱动夹持器的设计域、指定输出端及固定边界。夹持器同反向器一样,都具有对称性,故也取其上半部分进行设计,将设计域离散为  $120 \times 80$  个四节点单元。可移动矩形压电组件初始放置角度同位移反向器相同布置,仅初始位置不同。设定压电驱动组件大小( $l \times d$ )为  $20 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ ,其中心初始位置为  $(20, 25) \text{ mm}$ 。

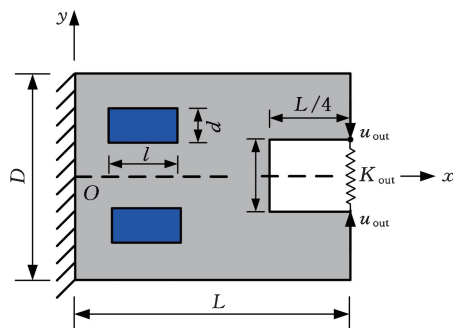
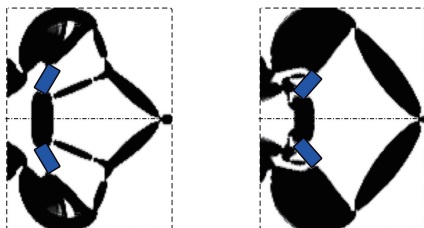


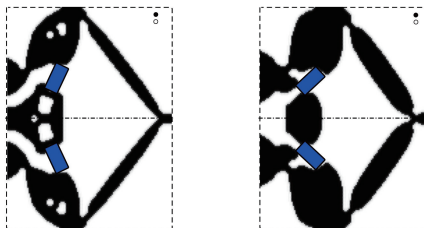
图 10 夹持器设计域

Fig.10 Gripper design domain

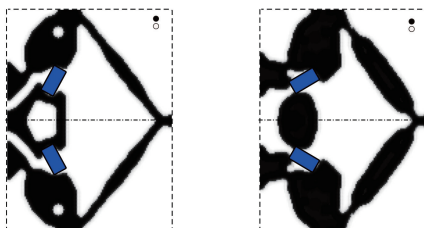
对比允许材料体积分数为 0.3、0.4 的情况下,无尺寸约束以及施加不同最小尺寸的拓扑优化结果如图 11a~图 11f 所示。从图 11a 中可明显发现在体积分数为 0.3、不施加尺寸约束的工况下,存在单节点连接情况和孤岛效应;而图 11b 中,在体积分数为 0.4、不施加尺寸约束的工况下,存在相当多的中间密度单元,构型边界不清晰。图 11c~图 11f 表示体积分数为 0.3、0.4 时施加不同最小尺寸约束的结果,尺寸控制参数  $R_{min}$  分别设置为 3、4、5,在施加尺寸约束后所得到的构型中,空相及实相部分的最小尺寸均满足相应的控制参数大小。从图 11c、图 11e 和图 11g 的拓扑优化结果中可以看出,三个不同尺寸控制参数下拓扑构型相似,其内嵌可移动压电驱动的位置也大致相同,主体承载结构的最短连接处随着尺寸控制参数的增大而增大,满足目标要求,而主体承载结构内存在的孔洞则随着尺寸控制参数的增大而发生融合,进而满足空相部分的最小尺寸控制。图 11d、图 11f 和图 11h 是体积分数为 0.4、不同尺寸控制参数下的结果。在尺寸控制参数为 3 的工况下,夹持器的最短连接处符合目标控制大小,其内部存在孔洞也同样满足。在图 11f 和图 11h 中可明显观察到,由于尺寸控制参数的增大,主体承载结构内部空相部分消失,且最短连接处同样随着尺寸控制参数的增大而增大,符合目标最小尺



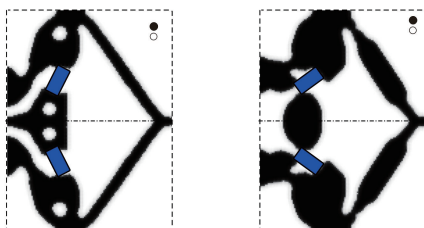
(a)  $V=0.3$ , 无尺寸约束 (b)  $V=0.4$ , 无尺寸约束



(c)  $V=0.3, R_{min}=3$  (d)  $V=0.4, R_{min}=3$



(e)  $V=0.3, R_{min}=4$  (f)  $V=0.4, R_{min}=4$



(g)  $V=0.3, R_{min}=5$  (h)  $V=0.4, R_{min}=5$

图 9 不同最小尺寸控制参数下反向器的拓扑构型

Fig.9 Topological configuration of inverters with different minimum size control parameters

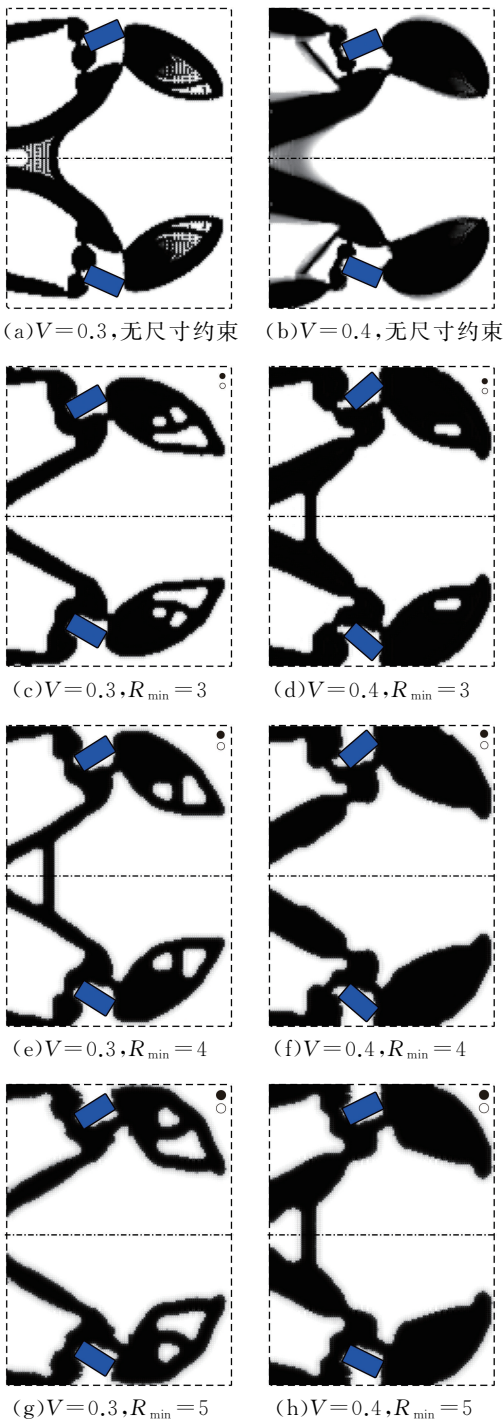


图 11 无尺寸约束及不同最小尺寸控制参数下夹持器的拓扑构型

Fig.11 The topological configuration of the gripper with no size constraint and different minimum size control parameters

寸期望。

## 5 结语

本文方法可以准确地描述压电驱动组件在规定设计域内的形状、运动速度和方向,解决了内嵌可移动压电驱动组件和柔顺机构同时优化设计问题。通过引入结构指示函数,分别构建固相材料

和空相材料的拐点域,由此来控制结构中的实相区域和空相区域的最小尺寸,满足了柔顺机构的可加工最小尺寸要求。通过两个数值算例验证了所提方法的有效性。未来可以将所提方法应用在实际工件加工制造中,精准面向工件需求,从而大幅提高加工效率,减少加工成本。

## 参考文献:

- [1] HOWELL L L. Compliant Mechanisms[M]// 21st Century Kinematics. London: Springer London, 2013:189-216.
- [2] 于靖军, 郝广波, 陈贵敏, 等. 柔性机构及其应用研究进展[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13):53-68. YU Jingjun, HAO Guangbo, CHEN Guimin, et al. State-of-art of Compliant Mechanisms and Their Applications[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13):53-68.
- [3] 张宪民, 朱本亮, 李海, 等. 柔顺精密定位与操作机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2023, 59(19):24-43. ZHANG Xianmin, ZHU Benliang, LI Hai, et al. Research Progress of Compliant Precision Positioning and Operating Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(19):24-43.
- [4] GRÄSER P, LINß S, HARFENSTELLER F, et al. High-precision and Large-stroke XY Micropositioning Stage Based on Serially Arranged Compliant Mechanisms with Flexure Hinges[J]. Precision Engineering, 2021, 72:469-479.
- [5] GAN Jinqiang, ZHANG Juncang, GE Mingfeng, et al. Designs of Compliant Mechanism-based Force Sensors;a Review[J]. IEEE Sensors Journal, 2022 (9):8282-8294.
- [6] DEATON J D, GRANDHI R V. A Survey of Structural and Multidisciplinary Continuum Topology Optimization;Post 2000[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49(1):1-38.
- [7] ZHU Benliang, ZHANG Xianmin, ZHANG Hongchuan, et al. Design of Compliant Mechanisms Using Continuum Topology Optimization;a Review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 143: 103622.
- [8] LIU Min, ZHAN Jinqing, ZHU Benliang, et al. Topology Optimization of Compliant Mechanism Considering Actual Output Displacement Using Adaptive Output Spring Stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 146:103728.
- [9] 汪启亮, 刘通, 李永起, 等. 低寄生位移柔性平行微夹持器拓扑优化设计[J]. 中国机械工程, 2023, 34(21):2577-2584.

- WANG Qiliang, LIU Tong, LI Yongqi, et al. Topology Optimization Design of Flexible Parallel Microgrippers with Low Parasitic Displacements[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(21):2577-2584.
- [10] EMMENDOERFER H, FANCELLO E A, SILVA E C N. Stress-constrained Level Set Topology Optimization for Compliant Mechanisms[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 362:112777.
- [11] 许洁, 高杰, 肖蜜, 等. 基于等几何拓扑优化的柔性机构设计[J]. 机械工程学报, 2024, 60(1):137-148.
- XU Jie, GAO Jie, XIAO Mi, et al. Design of Compliant Mechanisms by Topology Optimization Based on Isogeometric Analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(1):137-148.
- [12] 何健, 何猛, 夏凉, 等. 基于双向渐进结构优化法的柔性机构设计[J]. 机械工程学报, 2021, 57(19):39-47.
- HE Jian, HE Meng, XIA Liang, et al. Design of Compliant Actuation Mechanisms by Evolutionary Structural Optimization Method [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(19):39-47.
- [13] 王选, 胡平, 龙凯. 考虑嵌入移动孔洞的多相材料布局优化[J]. 力学学报, 2019, 51(3):852-862.
- WANG Xuan, HU Ping, LONG Kai. Multiphase Material Layout Optimization Considering Embedding Movable Holes[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(3):852-862.
- [14] ZHU Jihong, GAO Huanhuan, ZHANG Weihong, et al. A Multi-point Constraints Based Integrated Layout and Topology Optimization Design of Multi-component Systems[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, 51(2):397-407.
- [15] XIA Liang, ZHU Jihong, ZHANG Weihong. A Superelement Formulation for the Efficient Layout Design of Complex Multi-component System[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 45(5):643-655.
- [16] WANG Xuan, HU Ping, KANG Zhan. Layout Optimization of Continuum Structures Embedded with Movable Components and Holes Simultaneously[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61(2):555-573.
- [17] YANG Kaike, ZHU Jihong, WU Manqiao, et al. Integrated Optimization of Actuators and Structural Topology of Piezoelectric Composite Structures for Static Shape Control[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 334:440-469.
- [18] WANG Yiqiang, LUO Zhen, ZHANG Xiaopeng, et al. Topological Design of Compliant Smart Structures with Embedded Movable Actuators[J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23(4):045024.
- [19] WANG Rixin, ZHANG Xianmin, ZHU Benliang, et al. Hybrid Explicit-implicit Topology Optimization Method for the Integrated Layout Design of Compliant Mechanisms and Actuators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 171:104750.
- [20] WANG Yiqiang, HE Jingjie, LUO Zhen, et al. An Adaptive Method for High-resolution Topology Design[J]. Acta Mechanica Sinica, 2013, 29(6):840-850.
- [21] KANG Zhan, WANG Yiqiang. Structural Topology Optimization Based on Non-local Shepard Interpolation of Density Field[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(49/50/51/52):3515-3525.
- [22] GUEST J K, PRÉVOST J H, BELYTCHKO T. Achieving Minimum Length Scale in Topology Optimization Using Nodal Design Variables and Projection Functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(2):238-254.
- [23] ZHOU Mingdong, LAZAROV B S, WANG Fengwen, et al. Minimum Length Scale in Topology Optimization by Geometric Constraints [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 293:266-282.

(编辑 陈 勇)

作者简介:刘 敏,男,1990年生,副教授。研究方向为柔顺机构、微纳操作、拓扑优化等。E-mail: lmin2016@foxmail.com。  
占金青\*(通信作者),男,1979年生,教授、博士研究生导师。研究方向为柔顺机构拓扑优化设计。E-mail:zhan\_jq@126.com。

**本文引用格式:**

刘敏,卢飞扬,占金青,等.考虑最小尺寸约束的内嵌可移动压电驱动柔顺机构拓扑优化设计[J].中国机械工程,2025,36(2):255-264.

LIU Min, LU Feiyang, ZHAN Jinqing, et al. Topology Optimization of Compliant Mechanisms with Embedded Movable Piezoelectric Actuator Considering Minimum Length Constraints[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(2):255-264.