

# 基于全息下三角矩阵变换对比的运动链同构判定方法

张广帅 孙亮波\* 刘小翠 章德平 周华西

武汉轻工大学机械工程学院,武汉,430023

**摘要:**同构判定是运动链型综合过程中一个关键步骤。提出了一种新的描述运动链信息的全息矩阵(MWI),以及基于此的复铰、多元构件判定原理。在全息下三角矩阵(LTMWI)可以确定运动链结构唯一性理论上,提出了一种全息下三角矩阵变换对比的同构判定新方法。该方法基于构件、关键点编号变换定律,将运动链表示为下三角全息矩阵并选定基准矩阵,通过关键点信息进行分组排列并将同组关键点非0元素前移,细分确定和待确定的关键点,在假定变换矩阵中所有关键点与基准矩阵中所有关键点位置逐一对应的情况下,对有限个变换矩阵与基准矩阵进行对比。该方法具有原理易于理解、程序设计容易、判定过程只需检索对比等优点,可快速获得两个运动链的同构判定结果。对多个运动链的分析结果表明了该方法的上述特点。

**关键词:**同构判定;全息矩阵;基准矩阵;多元复铰;多元构件

**中图分类号:**TH112

**DOI:**10.3969/j.issn.1004-132X.2025.06.005

**开放科学(资源服务)标识码(OSID):**



## Isomorphism Identification Method for Kinematic Chain Based on Exchange and Comparison of Lower Triangular Matrix with Whole Information

ZHANG Guangshuai SUN Liangbo\* LIU Xiaocui ZHANG Deping ZHOU Huaxi  
School of Mechanical Engineering, Wuhan Polytechnic University, Wuhan, 430023

**Abstract:** Isomorphism identification was recognized as a critical step in the synthesis processes of kinematic chains(KC). A new MWI was proposed to describe the structural information of KCs. The principles for determining multiple-joint and polygonal links were introduced. Based on the principle that the lower triangular matrix with whole information(LTMWI) may uniquely express the structure of KCs, a new isomorphism identification method was proposed with the comparison and exchange of LTMWI. This method relied on the transformation law of links and key point numbers. Two KCs were expressed by LTMWI, with one LTMWI was selected as the datum matrix. After grouping the key points and moving the non-zero elements of key points in the same group forward, the determined key points and the key points to be determined were obtained. Under the assumption that all key points in the exchange matrix correspond one-to-one with the key point positions in the datum matrix, a finite number of exchange matrices were compared. The method has advantages such as a simple principle, ease of programming, and an identification process requiring only retrieval/comparison operations. It could quickly provide isomorphism identification results, and the mapping of links and even revolute pairs could be obtained. Isomorphism analyses of several KCs demonstrate the aforementioned characteristics of the method.

**Key words:** isomorphism identification; matrix with whole information(MWI); datum matrix; multiple-joint; polygonal link

### 0 引言

机构运动链构型综合是机构学领域的一个难题,也是机构创新设计的核心研究内容<sup>[1]</sup>。在运动链型综合过程中,运动链的生成方法<sup>[2]</sup>、刚性子链判定<sup>[3]</sup>、同构判定<sup>[4]</sup>、拓扑图和结构图自动绘

制<sup>[5]</sup>等关键技术问题都是必须解决的。

运动链的生成过程几乎都伴随着大量同构的运动链产生。同构判定过程需要将后续所有构型与前面不重复的构型进行逐一对比,需要 $C_n^2$ 次计算分析,占据了构型综合过程的大部分计算分析量。研究人员将图的同构判定引入机构学研究中,提出同构判定方法必须满足以下要求,即提出并且能证明运动链结构唯一性判定依据、准确可

靠、分析计算量小且便于程序化设计。

运动链同构识别研究已取得显著进展,研究人员从不同角度提出了多种判定方法。特征多项式法通过构建包含特定结构信息的矩阵(如度矩阵、参数矩阵、结构矩阵和距离矩阵)并求解其特征多项式来实现同构判定<sup>[6-8]</sup>。基于编码比较的方法中,最大码法通过构件重新编号生成新的邻接矩阵,并利用二进制编码进行判定<sup>[9]</sup>,而最小码法则通过优化邻接矩阵上的三角结构来简化判定过程<sup>[10-11]</sup>。最大(小)码法均是对运动链进行新标记的算法,当构件数增加时,二进制序列的大小也增加,其结果是计算复杂性增大,其实质也是一种增加约束距离的最大最小的邻接矩阵关系比较。哈明数法是先建立邻接矩阵,通过对哈明数公式进行  $n(n-1)/2$  次( $n$  为构件总数)计算获得哈明数矩阵,由哈明数矩阵获得一系列的哈明数串,通过判定所获得的哈明数串是否相等来实现同构判定<sup>[12-13]</sup>。距离法则通过提取构件间的距离信息生成路径码或距离序列串,通过比较所获得的路径码或距离序列串是否相同来获取同构判定的结果<sup>[14-15]</sup>。该方法将计算复杂度从  $n^2$  降低到  $n(n-1)/2$ 。最大周长环表示法通过对基本环路集中的环路进行  $2^L - 1$  ( $L$  为独立环路数)次合并操作获得最大周长环,进一步获得规范邻接矩阵,通过对比有限几个可能的规范邻接矩阵获得同构判定结果<sup>[16]</sup>。

上述已有的代表性同构判定方法通常基于运动链的邻接矩阵,提取某些结构特性(如构件连接距离、多元构件类型、最大周长环等)作为判定依据。然而,这些方法无法实现反向推导出运动链的所有结构信息,即信息提取的非全面性,而用运动链的部分结构特性作为运动链是否同构的判定依据会导致同构判定理论正确性存疑。如哈明数方法<sup>[14]</sup>存在反例的根本原因在于,这种方法提取的信息只有构件之间的连接关系,而没有构件类型、复铰类型以及复铰连接了哪些构件等信息。此外在这些方法中,有的方法提取信息过程非常繁琐复杂。

矩阵便于存储数据信息和进行计算操作,被广泛应用于分析和解决机构运动链型综合<sup>[17]</sup>、同构判定<sup>[18]</sup>、拓扑环路图自动生成<sup>[19]</sup>、变胞机构的构态描述<sup>[20]</sup>等研究领域。找到合适的方法表述机构信息是研究和分析机构的重要前提。在描述机构运动链时,代表性的有邻接矩阵和关联矩阵,以及基于此的改进矩阵等<sup>[21]</sup>。表达运动链时,无论是邻接矩阵还是关联矩阵,该构件是否为多元

构件、是否含复铰,以及多元构件结构几何尺寸等信息都没有包含在内。即便是后续增加了多元构件信息的度矩阵,以及前述邻接矩阵、关联矩阵及其改进矩阵,均无法反向推导出结构信息完整的运动链。以上述矩阵信息作为运动链的同构判定原理,在理论分析上无法提供充分必要证明。

本文提出了一种新的表达运动链的全息矩阵,分析了矩阵的一些特性,如多元构件判定定理、多元复铰判定定理等,提出了一种新的同构判定方法——全息下三角矩阵变换对比法。

## 1 描述运动链的全息矩阵

### 1.1 全息矩阵的定义

在使用计算机对全铰链机构进行运动学仿真时,只需要知道机构中关键点(两构件的连接点,该点可能对应多个运动副铰接)坐标,以及该关键点处构件的连接运动副元素,即可知晓机构的全部结构信息,并绘制出机构。基于这种思想,本文提出了一种新的运动链全息矩阵表达方法,运动链的结构信息用全息矩阵(matrix with whole information, MWI)  $M$  描述如下:

$$M = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n_p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_p,1} & a_{n_p,2} & \cdots & a_{n_p,n_p} \end{bmatrix} \quad (1)$$

该矩阵为一个  $n_p \times n_p$  矩阵,  $n_p$  为运动链的关键点数。关键点即构件之间的连接点。若无复铰,则关键点数对应运动副数;若有复铰,则多个构件间的连接点为同一个关键点,此时关键点数少于运动副数。

矩阵对角线元素  $a_{i,i}$  为运动链中两相邻构件的连接关键点对应的运动副元素,如运动副元素有移动副 P、转动副 R、球面副 S 等。本文只研究全转副的运动链,所以  $a_{i,i} = R$ 。

下三角矩阵元素  $a_{i,j}$  ( $i > j$ ) 为两关键点  $i$  和  $j$  所在的构件对应的编号  $k$ , 构件编号从 1 开始赋值,因此机构中的构件数就是下三角矩阵中最大的构件编号值。由于运动链中可能有多元构件,对应有多多个关键点,因此在下三角矩阵元素中可能出现多个元素具有相同值。若两关键点  $i$  和  $j$  之间无实际构件,则  $a_{i,j} = 0$ 。

上三角矩阵  $l_{i,j}$  ( $i < j$ ) 为两关键点之间的距离,即为下三角构件编号对应构件上两关键点的长度,多元构件对应多个关键点之间的长度。用  $l_{i,j}$  表示构件中编号为  $i, j$  的两关键点之间的实际长度值。若两关键点  $i$  和  $j$  之间无实际构件,即

两关键点不在同一构件上,则  $l_{i,j} = 0$ 。

图 1a 所示的全铰链运动链结构含 1 个四元构件、2 个三元构件、1 个四元复铰、2 个三元复铰,总计由 12 个杆件、16 个铰链和 5 个环组成,且其自由度为 1,构件编号和关键点(构件之间的铰接点)编号标注如图所示。根据运动链的双色拓扑图定义<sup>[22]</sup>,黑色实心圆代表构件,引出的线条代表运动副,此处为关键点,空心圆代表复铰,空心圆引出的线条都是同一个关键点,图 1b 为其双色拓扑图。

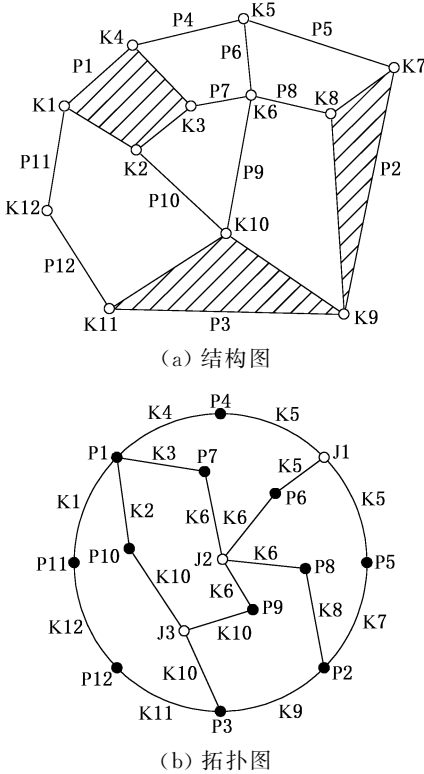


图 1 机构运动链及关键点和构件编号

Fig.1 Mechanism kinematic chain, key points, and component numbering

该运动链对应的邻接矩阵(adjacency matrix, AM)  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

对应的全息矩阵  $M$  为

$$M =$$

$$\begin{bmatrix} R & l_{1,2} & l_{1,3} & l_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{1,12} \\ 1 & R & l_{2,3} & l_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{2,10} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & R & l_{3,4} & 0 & l_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & R & l_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & R & l_{5,6} & l_{5,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 6 & R & 0 & l_{6,8} & 0 & l_{6,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & R & l_{7,8} & l_{7,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & R & l_{8,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & R & l_{9,10} & l_{9,11} & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & R & l_{10,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & R & l_{11,12} \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & R \end{bmatrix} \quad (3)$$

对比邻接矩阵  $A$  和全息矩阵  $M$ ,同样是  $12 \times 12$  矩阵,如果一个构件同时与多个构件连接,则判断该构件是否为多元构件的总时间复杂度为  $O(n^2)$ ,近似来说,时间复杂度与构件节点个数的平方成正比。

全息矩阵相较于邻接矩阵,可以清晰完整地表达运动链结构信息,如构件数  $n$ 、运动副数  $p$ 、两构件间是否有连接、连接两构件的运动副(此处只讨论全铰链情况)、某处连接是否为复铰、某构件是否为多元构件、构件上两关键点间的长度  $l_{i,j}$ (包括多元构件的各边长度)等。一个全息矩阵可以对应结构信息唯一确定的运动链,也就是给定一个描述正确的下三角矩阵,可以简单分析和推导出对应的运动链结构。如根据全息矩阵  $M$  可以反向推导出唯一确定的图 1a 所示的运动链结构图。该特点是已有描述机构和运动链的邻接、关联、环路等矩阵所不具备的。

### 1.2 全息矩阵相关特征参数的判定定理

本文只研究全铰链运动链,对表达运动链的全息矩阵只研究下三角矩阵。

**定理 1(多元连杆判定)** 运动链对应的全息下三角矩阵中的元素为构件编号  $i$  和 0,某个  $n$  元构件有  $n$  个关键点,对应其相同的构件编号  $i$  出现在下三角矩阵的数量应为  $C_n^2$ ,且该全息矩阵中  $C_n^2$  个元素对应的矩阵行和列的不同数字(也是关键点数)为  $n$  个。进一步,当某个关键点对应的下三角矩阵的所有行与列元素中出现了  $k$  个相同的数值  $j$ ,则多元构件  $j$  为  $(k+1)$  元构件。

例如:在全息矩阵中,某个三元构件编号为 2,数值 2 在全息矩阵中出现 3 次,分别对应全息矩阵的元素  $a_{7,8}$ 、 $a_{7,9}$ 、 $a_{8,9}$ ,有 3 个关键点 7、8、9。

**推论 1** 当知道  $n$  元构件上某个关键点对应的行和列元素位置之后,其中包含的构件  $i$  其余







将式(9)与式(8)基准矩阵  $M_1$  进行对比分析,式(8)中  $M_{6,1}$  是非 0 元素 3,式(9)中为 0 元素,因此该情况不同构。本方法是在下三角矩阵可唯一确定运动链结构的理论分析基础上,基于 2 个重要的定理(构件编号变换定理和关键点编号变换定理),将运动链用全息下三角矩阵表达,选择其中矩阵  $M_1$  作为基准矩阵,经过分组排列和同组非 0 元素前移后,分两步将关键点进行细分,得到确定的关键点和待确定的关键点。在假定变换矩阵  $M_2$  中所有关键点与基准矩阵  $M_1$  中所有关键点位置逐一对应的情况下,将有限个变换矩阵  $M_2$  与基准矩阵  $M_1$  进行数字对比,可快速获得同构判定结果。

上述基于全息下三角矩阵进行运动链同构判定方法的思路具体如图 3 所示。

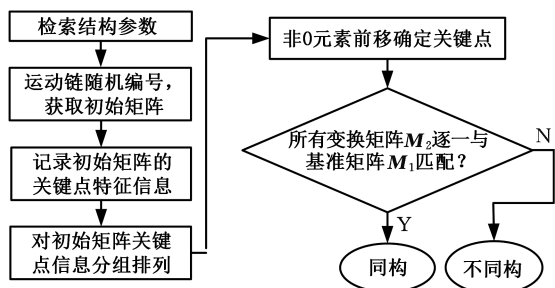


图 3 基于全息下三角矩阵的运动链同构判定方法  
Fig. 3 The kinematic chain isomorphism identification method based on the LTMWI

### 3 同构判定举例

应用本方法完成文献[24]中的 28 杆运动链的判定,构件与关键点编号如图 4 所示,主要判定步骤如下。

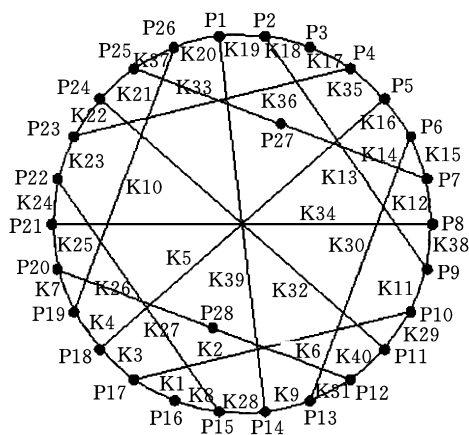
1) 获取两个运动链的结构参数  $\{n, p, F, L, n_2, n_3, J_3, \dots, n_{14}, J_{14}\} = \{28, 40, 1, 13, 40, 4, 24, 0, 0, \dots, 0, 0\}$ 。

2) 对图 4 中运动链 1 和 2 的构件和关键点随机编号,获得初始的下三角矩阵  $M_1$  和  $M_2$ (具体矩阵表达式扫描本文首页 OSID 码获取)。

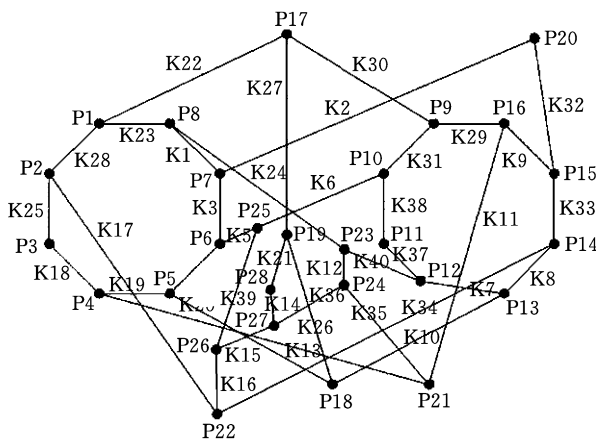
3) 记录初始矩阵  $M_1$  和  $M_2$  的关键点特征信息,如表 3 所示。

4) 对初始矩阵  $M_1$  和  $M_2$  的关键点信息按确定和待确定区域划分,重新排列位置。如表 3 所示,关键点的数组信息分为 2 组,关键点数字特征值分别为  $\{3, 2, 1\}$  和  $\{4, 2, 2\}$ ,其中  $\{3, 2, 1\}$  的关键点有 8 个,  $\{4, 2, 2\}$  所对应的关键点有 32 个,初定  $\{3, 2, 1\}$  作为第一组,该组上的 8 个关键点随机排序。

限于篇幅,后续优化基准矩阵,对变换矩阵进



(a) 运动链 1



(b) 运动链 2

图 4 两个 28 杆运动链拓扑图及构件与关键点编号<sup>[28]</sup>

Fig. 4 Topological graph and component and key point numbering of two 28-bar kinematic chains

行关键点的对比、变换等操作省略,最终的判定结果与之符合,两运动链同构。通过比较分析,28 杆运动链具有强对称性,能够找到两个运动链的构件编号与关键点编号之间的多种映射关系,表 4 给出了其中两种映射情况。

由上述具有强对称性的 28 杆运动链可知,对于高对称性的图或运动链,在对关键点进行分布确定时,关键点对应信息大量趋同,导致对应大量的变换矩阵  $M_2$ 。对于结构对称性弱的运动链,利用下三角矩阵自身包含信息素较多、耦合性强的优势,可以快速地确定基准矩阵中的大量关键点对应的位置,后续产生的变换矩阵  $M_2$  数量较少,可以快速对比获得运动链之间同构判定结果。

对于不同构的运动链,基于全息下三角矩阵变换对比的同构判定方法往往只需要判定步骤中的前几步即可发现运动链结构的差异性,判定效率较高。如对文献[25]中的同构判定案例,如图 5 所示,主要判定步骤如下。

表 3 28 杆运动链重新排序的关键点数字特征值

Tab.3 Numerical characteristics of key points after reordering for a 28-bar kinematic chains

运动链 1(KC1)		运动链 2(KC2)	
关键点编号	关键点数字特征值	关键点编号	关键点数字特征值
1	3,2,1	2	3,2,1
6	3,2,1	14	3,2,1
8	3,2,1	18	3,2,1
14	3,2,1	21	3,2,1
17	3,2,1	25	3,2,1
18	3,2,1	32	3,2,1
26	3,2,1	37	3,2,1
33	3,2,1	38	3,2,1
2	4,2,2	1	4,2,2
3	4,2,2	3	4,2,2
4	4,2,2	4	4,2,2
5	4,2,2	5	4,2,2
7	4,2,2	6	4,2,2
9	4,2,2	7	4,2,2
10	4,2,2	8	4,2,2
11	4,2,2	9	4,2,2
12	4,2,2	10	4,2,2
13	4,2,2	11	4,2,2
15	4,2,2	12	4,2,2
16	4,2,2	13	4,2,2
19	4,2,2	15	4,2,2
20	4,2,2	16	4,2,2
21	4,2,2	17	4,2,2
22	4,2,2	19	4,2,2
23	4,2,2	20	4,2,2
24	4,2,2	22	4,2,2
25	4,2,2	23	4,2,2
27	4,2,2	24	4,2,2
28	4,2,2	26	4,2,2
29	4,2,2	27	4,2,2
30	4,2,2	28	4,2,2
31	4,2,2	29	4,2,2
32	4,2,2	30	4,2,2
34	4,2,2	31	4,2,2
35	4,2,2	33	4,2,2
36	4,2,2	34	4,2,2
37	4,2,2	35	4,2,2
38	4,2,2	36	4,2,2
39	4,2,2	39	4,2,2
40	4,2,2	40	4,2,2

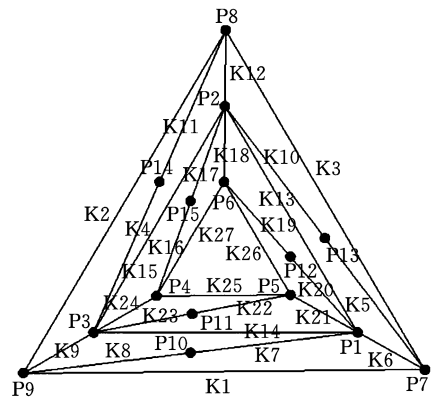
第一组

第二组

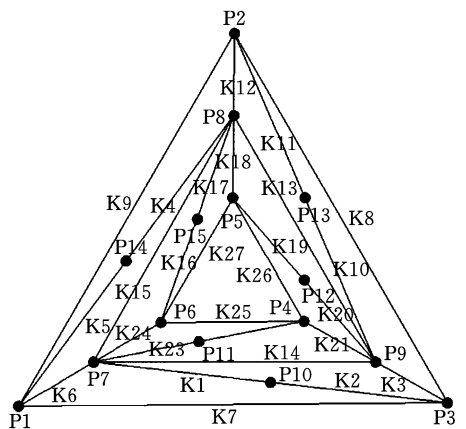
表 4 两个 28 杆运动链的构件与关键点映射关系

Tab.4 Component and key point mapping relationships of two 28-bar kinematic chains

KC	同构映射情况 1: KC1(KC2)	同构映射情况 2: KC1(KC2)
构件编号之间的映射关系	1(13),2(12),3(11), 4(10),5(25),6(26), 7(27),8(24),9(23), 10(8),11(1),12(2), 13(22),14(14),15(15), 16(20),17(7),18(6), 19(5),20(4),21(21), 22(16),23(9),24(17), 25(19),26(18),27(28), 28(3)	1(6),2(7),3(20),4(15), 5(14),6(13),7(12), 8(23),9(8),10(1), 11(17),12(19),13(18), 14(5),15(4),16(3), 17(2),18(22),19(26), 20(27),21(24),22(21), 23(16),24(9),25(10), 26(25),27(11),28(28)
关键点编号之间的映射关系	1(2),2(1),3(3),4(4), 5(5),6(25),7(19), 8(32),9(34),10(20), 11(24),12(36),13(40), 14(14),15(15),16(39), 17(38),18(37),19(7), 20(10),21(27),22(30), 23(29),24(11),25(13), 26(18),27(9),28(33), 29(23),30(16),31(17), 32(22),33(21),34(35), 35(6),36(31),37(26), 38(12),39(8),40(28)	1(25),2(28),3(17), 4(16),5(34),6(21), 7(15),8(18),9(20), 10(39),11(23),12(40), 13(1),14(37),15(7), 16(8),17(32),18(2), 19(3),20(5),21(31), 22(29),23(11),24(35), 25(36),26(14),27(13), 28(19),29(22),30(10), 31(26),32(30),33(38), 34(12),35(33),36(9), 37(6),38(24),39(4), 40(27)



(a) 运动链 1



(b) 运动链 2

图 5 文献[25]里同构判定案例

Fig. 5 Isomorphism identification case study from reference[25]

1) 获取两个运动链的结构参数均为  $\{n, p, F, L, n_2, n_3, J_3, \dots, n_{14}, J_{14}\} = \{15, 27, -12, 13, 27, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 3, 0, 0, \dots, 0, 0\}$ 。

2) 对图 5 中运动链 1 和 2 的构件和关键点随机编号, 获得初始的下三角矩阵  $M_3$  和  $M_4$  (矩阵表述扫描 OSID 码获取)。

3) 记录初始矩阵  $M_3$  和  $M_4$  的关键点特征信息, 如表 5 所示。

4) 对于初始矩阵  $M_3$  和  $M_4$ , 将关键点区分为确定的关键点和待确定的关键点, 重新排列位

表 5 15 杆运动链重新排序的关键点  
数字特征值

Tab.5 Numerical characteristics of key points after  
reordering for a 15-bar kinematic chain

运动链 1(KC1)		运动链 2(KC2)		
关键点 编号	关键点 数字特征值	关键点 编号	关键点 数字特征值	
13	10,5,5	13	10,5,5	第一组
14	10,5,5	14	10,5,5	
15	10,5,5	15	10,5,5	
6	8,5,3	3	8,5,3	第二组
9	8,5,3	6	8,5,3	
12	8,5,3	12	8,5,3	
18	8,5,3	18	8,5,3	
21	8,5,3	21	8,5,3	
24	8,5,3	24	8,5,3	
4	6,5,1	1	6,5,1	第三组
7	6,5,1	4	6,5,1	
10	6,5,1	10	6,5,1	
17	6,5,1	17	6,5,1	
20	6,5,1	20	6,5,1	
23	6,5,1	23	6,5,1	
1	6,3,3	7	6,3,3	第四组
2	6,3,3	8	6,3,3	
3	6,3,3	9	6,3,3	
25	6,3,3	25	6,3,3	
26	6,3,3	26	6,3,3	
27	6,3,3	27	6,3,3	
5	4,3,1	2	4,3,1	第五组
8	4,3,1	5	4,3,1	
11	4,3,1	11	4,3,1	
16	4,3,1	16	4,3,1	
19	4,3,1	19	4,3,1	
22	4,3,1	22	4,3,1	

置。如表 5 所示,关键点的数组信息分为 5 组,关键点的数字特征值可分为 $\{10,5,5\}$ 、 $\{8,5,3\}$ 、 $\{6,3,3\}$ 、 $\{6,5,1\}$ 、 $\{4,3,1\}$  五组,其中第一组 $\{10,5,5\}$ 的关键点有 3 个,其余区域所对应的关键点均为 6 个,则 $\{10,5,5\}$ 中的关键点作为第一组。对基准矩阵  $M_3$  进行变换分析,存在 8 组可两两互换的位置待确定,即存在对应  $P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 = 256$  种变换矩阵  $M_4$ 。

限于篇幅,后续优化基准矩阵,对变换矩阵进行关键点的对比、变换等操作省略,最终得到的基准矩阵  $M_3$  和变换矩阵  $M_4$  (矩阵表达扫描 OSID 码获取)。

由上述两个全息下三角矩阵可以得到,  $M_3$  中  $M_{25,11}$  位置上是非 0 元素 12,  $M_4$  中相应位置为 0 元素。

继续对上述案例中衍生出来的其他变换矩阵  $M_4$  进行对比判定,都得到不同构的结果,因此可判定上述 2 个运动链不同构。

#### 4 基于全息下三角矩阵变换对比的同构判定方法总结

综上理论与案例分析,采用全息下三角矩阵的变换对比法进行同构判定具有以下特点。

1) 同构判定方法的科学性。该同构判定方法建立在全息下三角矩阵可唯一确定运动链结构的基础上,即一个结构描述正确的全息下三角矩阵与对应的运动链结构可以相互推导得到,判定原理为是否同构的充要条件,其科学性和准确性简单易懂、一目了然。

2) 同构判定方法的计算量小。该方法只需要检索矩阵关键点信息和有限个关键点换位,获得一定数量的变换矩阵  $M_2$  与基准矩阵  $M_1$  进行对比判定,不需要提取运动链的环路信息进行运算,也不需要特征值或特征向量的计算。运用所提出的同构判定方法,对于对称性弱的运动链,具有无可比拟的计算量小的优势;对于对称性强的运动链或图,无论采用哪一种同构判定方法和对应的特性,如最大周长环、本文提出的方法等,都对应有多种可能性,从而导致计算分析量的几何级数增加。当运动链的对称性较强时,可能矩阵中同一区域的关键点有多个,在进行判定时,只需进行分组排列并将同组非 0 元素前移,将关键点进行细分,因此该种方法的计算量主要是分组的检索量及少数关键点前移的操作。后续的变换矩阵  $M_2$  与基准矩阵  $M_1$  的逐一对比,仅简单地进行元素对比即可,因此对比量为  $C_{n_p}^2 = n_p \times (n_p - 1)/2$ , 每一次的对比量是对 2 个一维数组  $(n_p - 1)$  个元素的对比。图 6 所示为本文所提出的方法与 McKay 和 Ding 算法的复杂性对比。

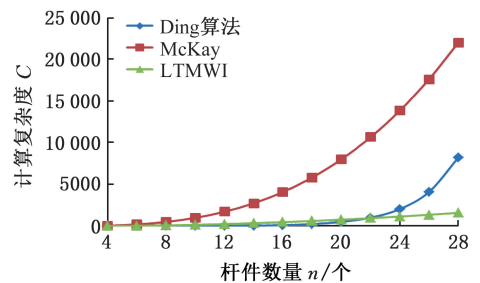


图 6 三种方法的复杂性对比分析

Fig.6 Comparative analysis of complexity among three methods

3) 同构判定方法的可编程性。由于同构判定原理的简易性,故同构判定规则也相对简单,则建立在全息下三角矩阵基础上的对比分析非常利于计算机程序化设计。

## 5 结论

1) 本文提出了一种新的表达运动链的全息矩阵,重点分析了全息下三角矩阵的数字分布规则,下三角矩阵包含构件类型、多元复铰、构件间的连接关系等大量信息,可唯一确定运动链的结构,分析给出了构件编号变化和关键点编号变化规律。

2) 在全息下三角矩阵对应确定的运动链结构这一分析基础上,提出了一种新的全息下三角矩阵变换对比的运动链同构判定新方法。

3) 该方法和已有的同构判定方法比较,最大的优点在于同构判定原理简单易于理解,同构判定规则简单,只有信息检索和分类、矩阵之间数值元素分析对比等,无需对环路或特征值、特征向量等进行计算,与现有同构判定方法比较,分析计算量较小。

### 参考文献:

[1] POZHBELKO V, ERMOSHINA E. Number Structural Synthesis and Enumeration Process of All Possible Sets of Multiple Joints for 1-DOF up to 5-loop 12-link Mechanisms on Base of New Mobility Equation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 90:108-127.

[2] ZOU Yanhuo. An Algorithm for Structural Synthesis of Planar Simple and Multiple Joint Kinematic Chains[J]. Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 228(12):2178-2192.

[3] WEN X, SUN W, WANG S, et al. A New Rigid Sub-chain Identification and Elimination Method of Kinematic Chains with Multiple Joints[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2024, 238(5):1324-1339.

[4] DENG T, XU H, WU C, et al. Topological Symmetry Identification of Kinematic Chains Based on Topological Index [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 154:104099.

[5] 丁华锋,黄真,曹毅.运动链拓扑图的自动生成及图谱库的建立[J].机械工程学报,2006,42(4):32-36.

DING Huafeng, HUANG Zhen, CAO Yi. The Automatic Generation of Motion Chain Topological Graph and the Establishment of a Diagram Library [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(4):32-36.

[6] MRUTHYUNJAYA T S, BALASUBRAMANIAN H R. In Quest of a Reliable and Efficient Computational Test for Detection of Isomorphism in Kinematic Chains[J]. Mechanism and Machine Theory,

1987, 22(2):131-139.

[7] BALASUBRAMANIAN K, PARTHASARATHY K R. In Search of a Complete Invariant for Graphs[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1981, 885(1):42-59.

[8] YAN H S, HWANG W M. Method for the Identification of Planar Linkage Chains [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, 105(4):658-662.

[9] RAI R K, PUNJABI S. A New Algorithm of Links Labelling for the Isomorphism Detection of Various Kinematic Chains Using Binary Code[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 131:1-32.

[10] AMBEKAR A G, AGRAWAL V P. Canonical-Numbering of Kinematic Chains and Isomorphism Problem: Min Code[J]. Mechanism and Machine Theory, 1987, 22(5):453-461.

[11] AMBEKAR A G, AGRAWAL V P. Identification of Kinematic Chains, Mechanisms, Path Generators and Function Generators Using Min Codes[J]. Mechanism and Machine Theory, 1987, 22(5):463-471.

[12] RAO A C, VARADA R D. Application of the Hamming Number Technique to Detect Isomorphism among Kinematic Chains and Inversions[J]. Mechanism and Machine Theory, 1991, 26(1):55-75.

[13] RAO A C, RAO C N. Loop Based Pseudo Hamming Values— I Testing Isomorphism and Rating Kinematic Chains [J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28(1):113-127.

[14] KAMESH V V, RAO K M, RAO A B S. An Innovative Approach to Detect Isomorphism in Planar and Geared Kinematic Chains Using Graph Theory[J]. Journal of Mechanical Design, 2017, 139(12):122301.

[15] SUN Liang, YE Zhizheng, CUI Rongjiang, et al. Compound Topological Invariant Based Method for Detecting Isomorphism in Planar Kinematic Chains [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2020, 12(5):054504.

[16] DING Huafeng, HUANG Zhen. Isomorphism Identification of Graphs: Especially for the Graphs of Kinematic Chains [J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 44(1):122-139.

[17] CHU Jinkui, ZOU Yanhuo. An Algorithm for Structural Synthesis of Planar Simple and Multiple Joint Kinematic Chains[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 228(12):2178-2192.

[18] WANG L, SUN L, CUI R, et al. Novel Loop Tree for the Similarity Recognition of Kinematic Chains[J]. Mechanical Sciences, 2022, 13(1):371-386.

- tegrity and Wear Behavior of 300M Steel Subjected to Ultrasonic Surface Rolling Process[J]. Surface and Coatings Technology, 2021,421:127380.
- [15] ZHAO W, LIU D, CHIANG R, et al. Effects of Ultrasonic Nanocrystal Surface Modification on the Surface Integrity, Microstructure, and Wear Resistance of 300M Martensitic Ultra-high Strength Steel[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2020,285:116767.
- [16] 许全军, 刘秀国, 龚宝明, 等. USRP 处理 45 钢微观梯度力学性能演变及残余应力分布[J]. 中国表面工程, 2021,34(6):151-159.
- XU Quanjun, LIU Xiuguo, GONG Baoming, et al. Evolution of Microscopic Gradient Mechanical Properties and Residual Stress Distribution of 45 Steel Processed by USRP[J]. Chinese Journal of Surface Engineering, 2021, 34(6):151-159.
- [17] ZHANG H, SHANG J, MA H, et al. The Evolution of Strain Gradient and Surface Microstructure of Aluminum Alloy during Multiple Laser Shock Peening Cycles[J]. Applied Surface Science, 2025, 698:163067.
- [18] 刘红彬. 外物损伤 TC17 钛合金叶片高周疲劳特性及预测方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2023.
- LIU Hongbin. Research on High Cycle Fatigue Characteristics and Prediction Methods of TC17 Titanium Alloy Blades Damaged by External Objects[D]. Nanjing:Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2023.
- [19] 王源晨, 宋竹满, 李瑞, 等. 8.8 级螺栓用 ML40Cr 钢的疲劳性能和裂纹扩展行为[J]. 材料研究学报, 2019,33(10):771-775.
- WANG Yuanchen, SONG Zhuman, LI Rui, et al. Fatigue Performance and Crack Propagation Behavior of ML40Cr Steel for 8.8 Grade Bolts[J]. Journal of Materials Research, 2019, 33(10):771-775.
- (编辑 袁兴玲)
- 
- 作者简介:**牛延昭,男,1999 年生,硕士研究生。研究方向为高强度钢螺栓滚压工具结构优化设计。E-mail:nyz19106395664@163.com。朱祥龙\*(通信作者),男,1981 年生,教授、博士研究生导师。研究方向为复杂型腔精密加工测量技术与智能化装备设计。E-mail:zhuxianglong@163.com。
- 本文引用格式:**  
牛延昭,刘宏伟,宋亚丽,等.基于有限元模拟的螺栓退刀槽滚压轮优化及试验研究[J].中国机械工程,2025,36(6):1214-1221.
- NIU Yanzhao, LIU Hongwei, SONG Yali, et al. Optimization and Experimental Study of Bolt Retreat Groove Rolling Wheels Based on Finite Element Simulation[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(6):1214-1221.
- 
- (上接第 1187 页)
- [19] 孙亮波,洪熙熙,刘小翠,等.运动链基本环路集新的定义及其生成方法[J].中国机械工程,2023,34(9):1061-1066.
- SUN Liangbo, HONG Xixi, LIU Xiaocui, et al. New Definition of Basic Loop Set of Kinematic Chain and Its Generation Method[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(9):1061-1066.
- [20] 周杨,畅博彦,金国光,等.面向变胞机构动力学建模的变拓扑构型数学描述方法[J].机械工程学报, 2022,58(9):49-61.
- ZHOU Yang, CHANG Boyan, JIN Guoguang, et al. Mathematic Description Method of Variable Topology Configuration for Dynamic Modeling of Metamorphic Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(9):49-61.
- [21] LUCHUAN Y, HONGBIN W, SHUNQING Z. Graph Isomorphism Identification Based on Link-assortment Adjacency Matrix[J]. Sādhanā, 2022, 47(3):151-165.
- [22] KECSKEMÉTHY A, DING Huafeng, YANG Wenjian, et al. Automatic Structural Synthesis of Planar Multiple Joint Kinematic Chains[J]. Journal of Mechanical Design, 2013,135(9):1-12.
- [23] HWANG W M, HWANG Y W. Computer-aided Structural Synthesis of Planar Kinematic Chains with Simple Joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(2):189-199.
- [24] CUI Rongjiang, YE Zhizheng, SUN Liang, et al. Topological Invariant and Definition Method for Detecting Isomorphism in Planar Kinematic Chains [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2021, 235(15):2715-2724.
- [25] DING Huafeng, HUANG Zhen. A Unique Representation of the Kinematic Chain and the Atlas Database[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 42(6):637-651.
- (编辑 袁兴玲)
- 
- 作者简介:**张广帅,男,1995 年生,硕士研究生。研究方向为机构的型综合。E-mail:zsg6869@139.com。孙亮波\*(通信作者),男,1979 年生,博士、教授。研究方向为机构学、机械创新设计。E-mail:sunlb1979@163.com。
- 本文引用格式:**  
张广帅,孙亮波,刘小翠,等.基于全息下三角矩阵变换对比的运动链同构判定方法[J].中国机械工程,2025,36(6):1178-1187.
- ZHANG Guangshuai, SUN Liangbo, LIU Xiaocui, et al. Isomorphism Identification Method for Kinematic Chain Based on Exchange and Comparison of Lower Triangular Matrix with Whole Information[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(6):1178-1187.