

并联式混合驱动机构运动学和传递性能分析

赵星宇^{1*} 赵铁石^{2,3} 许博¹ 刘相权¹ 秦宇飞¹

1.北京信息科技大学机电工程学院,北京,100192

2.燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室,秦皇岛,066004

3.燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室,秦皇岛,066004

摘要:为拓展并联机构的应用范围,提出了一种可实现高-中-低频混合驱动的3-RPRR(PRRRP)RS并联机构,基于旋量理论分析了其输入合理性。通过驱动锁定方法得到了一组可实现混合驱动的姿态解模型,基于广义旋量建立混合驱动单元的运动描述,进而推导出机构的一阶影响系数矩阵,再用一组数值算例进行理论和仿真的相互验证。阐明了机构在混合驱动下的全域传递性能指标,基于遗传算法进行了尺寸优化,结果表明,机构在低频、中频和高频驱动下的全域传递性能分别提高了11.78%、9.94%、9.44%。

关键词:高-中-低频混合驱动;并联机构;旋量理论;广义运动旋量;全域传递性能

中图分类号:TP182

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.08.008

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Kinematics and Transmission Performance Analyses of Parallel Hybrid Drive Mechanisms

ZHAO Xingyu^{1*} ZHAO Tieshi^{2,3} XU Bo¹ LIU Xiangquan¹ QIN Yufei¹

1.Institute of Electromechanical Engineering, Beijing Information Science & Technology University, Beijing, 100192

2.Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei, 066004

3.Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei, 066004

Abstract: To expand the application scopes of parallel mechanisms, a 3-RPRR (PRRRP) RS parallel mechanism that might achieve high-medium-low frequency hybrid driving was proposed, and the input rationality was analyzed based on screw theory. A set of pose solution models that might achieve hybrid driving were obtained through the driving locking method, and a motion description of the hybrid driving unit was established based on the generalized screw. The first-order influence coefficient matrix of the mechanisms was derived, and a set of numerical examples were used to achieve mutual verification between theory and simulation. The global transmission performance indicators of the mechanisms under hybrid driving were elucidated, and size optimization was carried out based on genetic algorithm. The results show that the global transmission performance of the mechanisms under low-frequency, medium frequency, and high-frequency driving was improved by 11.78%, 9.94%, and 9.44% respectively.

Key words: high-medium-low frequency hybrid drive; parallel mechanism; screw theory; generalized screw; global transmission performance

0 引言

并联机构具有高刚度、大承载、无累积误差等优点,广泛应用于工业和特种领域。在航空航天、海上作业、救护车医疗等工作过程中,为保证运载

体上精密仪器的稳定工作,需要一种稳定平台对周围环境的多维扰动形式进行实时的反向补偿。扰动形式按频率段可分为高频扰动(高于100 kHz)、中频扰动(1~12 kHz)和低频扰动(0~1 kHz),现有并联式稳定平台受限于驱动器的频率带宽,很难实现高-中-低频的实时运动输出。为拓宽传统并联机构的应用范围,实现大范围的跨频率段混合输出^[1-3],出现了一系列新型并联机构^[4-6]。文献[7-9]提出并研究了一种运动冗余型并联机构,通过引入冗余自由度,可有效消除奇异

收稿日期:2024-09-05

基金项目:国家自然科学基金(U21A20123);北京市教育委员会科研计划(KM202311232023);京津冀协同创新共同体建设专项(22341802D);北京信息科技大学“青年骨干教师”支持计划(YBT 202401)

位形。文献[10-13]提出并研究了一类分支包含子闭环机构的并联机构,主要应用于移动机器人和人形机器人领域。QU等^[14-16]提出了一类含支链闭环的并联机构,并开展了广泛机构学分析。文献[17-19]提出并研究了一类闭环形式的包含双输入单元的并联机构,分析了双驱动的控制方法和应用形式。张金柱等^[20-21]提出了一种多分支耦合的并联驱动机构,分析了其位置分辨能力,主要用于多足移动机器人。以上机构的提出和分析对拓宽并联机构的应用范围都有重要意义。

为进一步拓宽稳定平台的应用范围,实现跨三个频率段的扰动隔离,并对应俯仰、偏航和升沉这三个主要自由度的运动输出,本文提出了一种可实现高-中-低频混合驱动的并联机构,并对该机构开展了输入合理性、混合驱动的位姿解、速度映射关系分析,得到了机构运动学模型,分析了各驱动下的运动和力传递性能,并进行了结构尺寸优化。

1 构型分析

1.1 机构设计

首先通过一个数值算例来具体展示不同驱动类型的特点。

假设一个质量 $m=20\text{ kg}$ 的物体做直线运动,同时将该物体的运动规律表示为 $s=A_1 \sin(\omega_1 t)+A_2 \sin(\omega_2 t)+A_3 \sin(\omega_3 t)$,包含三种运动成分,分别对应不同频率和幅值,令 $A_1=100\text{ mm}$, $A_2=10\text{ mm}$, $A_3=1\text{ mm}$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=300\pi$, $\omega_3=32\ 000\pi$,分别通过常规驱动、串联式驱动单元、并联式驱动单元和混合驱动单元来实现这一运动,如图1所示。

1)常规驱动方式。如图1a所示,高、中、低频运动成分均由单一驱动实现。

2)串联式驱动单元。如图1b所示,高、中、低频运动分别通过高频、中频和低频驱动实现,且三种驱动串联分布。

3)并联式驱动单元。如图1c所示,高、中、低频运动分别通过高频、中频和低频驱动实现,且三种驱动并联分布。

4)混合驱动单元。如图1d所示,高、中、低频运动分别通过高频、中频和低频驱动实现,且三种驱动通过多闭环的混合分布。

忽略各构件间的摩擦及自身质量,假设各种驱动类型的驱动总功率相等,则有

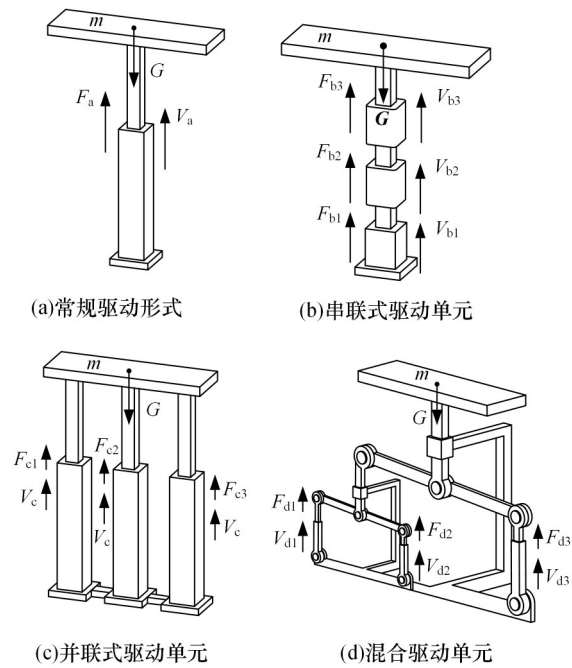


图1 四种驱动类型

Fig.1 Four driving types

$$\left. \begin{aligned} P_a &= F_a V_a \\ P_b &= F_{b1} V_{b1} + F_{b2} V_{b2} + F_{b3} V_{b3} \\ P_c &= F_{c1} V_c + F_{c2} V_c + F_{c3} V_c \\ P_d &= F_{d1} V_{d1} + F_{d2} V_{d2} + F_{d3} V_{d3} \\ P_a &= P_b = P_c = P_d \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据以上驱动类型特性和式(1),可得到各驱动类型的驱动速度和驱动力对比图,如图2和图3所示。由图2和图3可知,在驱动速度方面,常规驱动和并联驱动未实现不同频率带驱动速度的分离,串联驱动和混合驱动类型可实现高、中、低频驱动速度分离;在驱动力方面,常规驱动和串联驱动需要最多的驱动力,并联驱动类型所需驱动力最少,混合驱动类型所需的驱动力较少。可以看出,只有混合驱动类型可以实现不同频率带驱动速度的分离,并可有效减小所需的驱动力,即兼具了串联驱动的运动学特性和并联驱动的动力学特性。

本文所述并联式混合驱动机构的核心部分即为多闭环形式的混合驱动单元,能同时输出高、中、低三个频率段的混合驱动成分。此类混合驱动单元需要具有三个输出自由度,最容易想到的是单闭环平面六杆结构,但这种结构至少有一个驱动的安装位置需远离基座,且会产生不同驱动之间的相互干扰,增加了控制难度。

本文提出的高-中-低频混合驱动单元为多闭环机构形式,如图4所示,包括RPRR(PRRRP)型、RPRR(PRRPR)型、PRRR(PRRRP)型和RPRR(RPRPR)型。

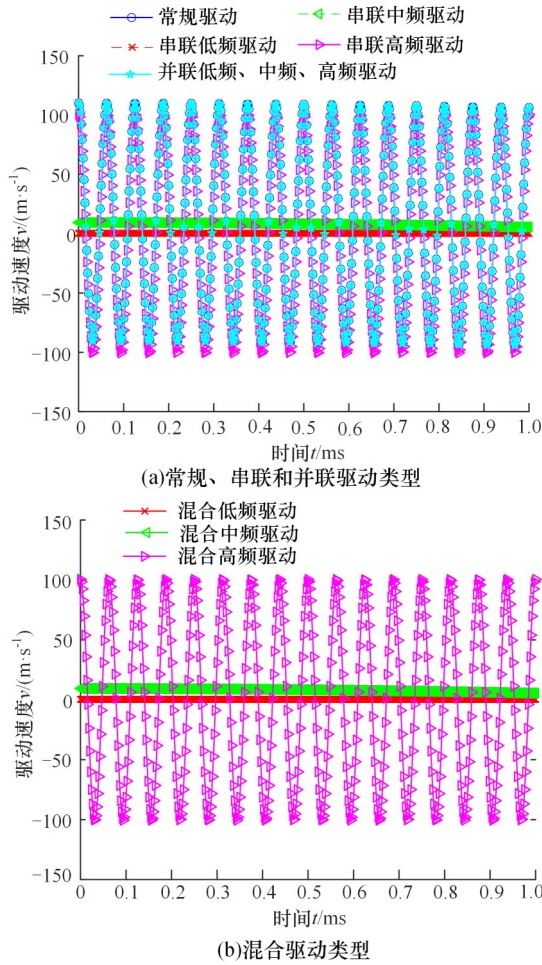


图2 不同驱动类型的驱动速度对比

Fig.2 Comparison of driving velocity of different driving types

对图4所有类型的混合驱动单元进行运动分析,输出杆的运动旋量都可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_{g1} &= (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0)^T \\ S_{g1} &= (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0)^T \\ S_{g1} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1)^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由以上运动旋量可知,高-中-低频混合驱动单元的输出等效为1个转动和2个移动,分别对应高、中、低频三种驱动类型。在工程应用中,为实现最佳承载性能,驱动应尽量直连于机架,同时考虑到低频驱动通常要实现较大的幅值,这就要求低频驱动具有较长的行程空间。如表1所示,若采用PRRR(PRRRP)型,机构会占用极大的空间,会限制其应用范围;若采用RPRR(PRPR)型和RPRR(RPRPR)型,其承载性能会较差。因此,综合考虑,选用RPRR(PRRRP)型,选择将中频和低频驱动直连在机架,高频驱动通过转动副铰接于机架,以尽可能缩减机构占地空间,且可实现较好的承载性能。

为了使构型实现2R1T型的机构输出自由

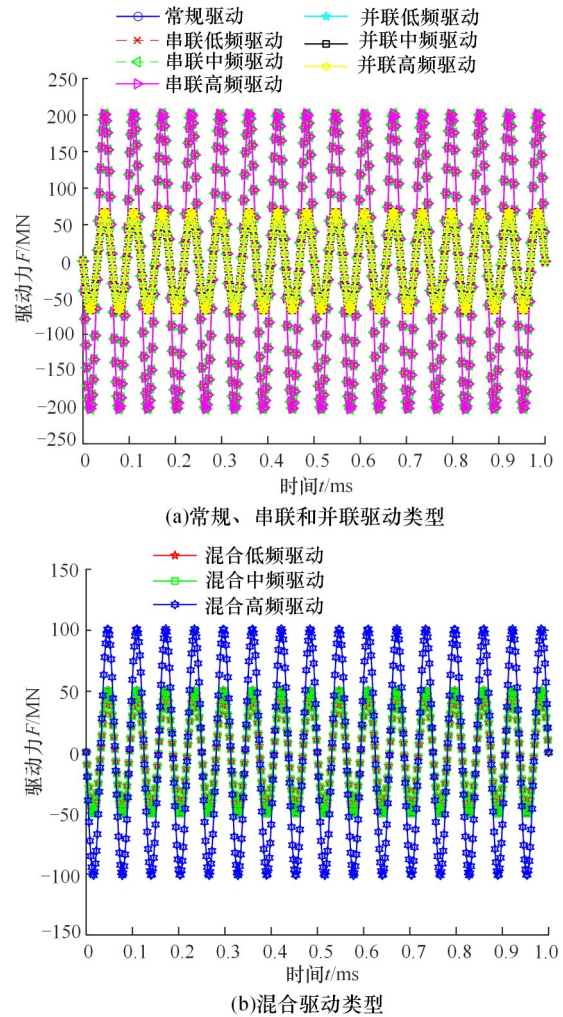


图3 不同驱动类型的驱动力对比

Fig.3 Comparison of driving force of different driving types

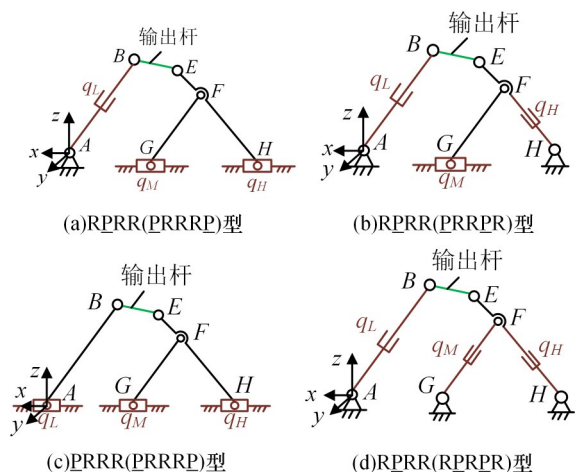


图4 高-中-低频混合驱动单元

Fig.4 High-medium-low frequency hybrid driving unit 基于3-PRS并联机构的结构形式,将驱动副替换为混合驱动单元RPRR(PRRRP),可得到3-RPRR(PRRRP)RS并联式混合驱动机构,如图5所示。

表 1 构型选择

Tab.1 Configuration selection

混合驱动单元构型	承载性能	所占空间
RPRR(PRRRP)型	较好	较小
RPRR(PRRRP)型	较差	较小
PRRR(PRRRP)型	好	大
RPRR(RPRPR)型	差	小

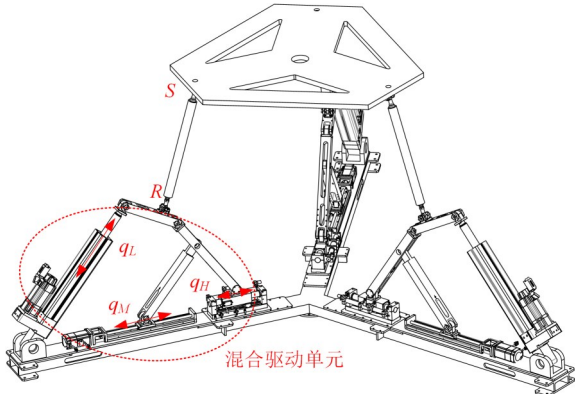


图 5 3-RPRR(PRRRP)RS 并联式混合驱动机构

Fig.5 3-RPRR(PRRRP)RS parallel hybrid drive mechanism

1.2 机构输入合理性分析

由于 3-RPRR(PRRRP)RS 机构中包含混合驱动单元, 不仅会增加驱动的数量, 关键是要确定各驱动单元内以及各驱动单元之间的驱动是否会产生干涉, 以及在给定确定驱动后, 机构能否进行确定的运动规律, 这都需要进行本机构的输入合理性分析, 具体分析步骤如下^[22-23]:

1) 分析机构冗余自由度。机构共有 3 个分支, 每个分支均包含一个混合驱动单元和一个 RS 传动支链, 基于式(1), 混合驱动单元可等效为 RPP 运动副, 则每个分支可等效为 RPPRRR, 广义运动副的个数 $N_i=7$, 其中线性无关的运动旋量数目 $n_i=5$, 分支的冗余自由度数 $\Delta n_i=N_i-n_i=7-5=2$, 机构冗余自由度表示为 $\Delta n=\sum_{i=1}^3 \Delta n_i=6$ 。

2) 求解机构的约束旋量。分支 i 对上平台的约束旋量为 1 个约束力, 可表示为

$$S_i^c=(0 \ 1 \ 0; -z_i \ 0 \ x_i)^T \quad (3)$$

分支 i 对上平台的独立约束个数 $k_i=6-n_i=1$, 上平台受所有分支的总约束个数 $K=\sum_{i=1}^3 k_i=3$, 这 3 组约束旋量的最大线性无关数 $k=3$, 该机构的自由度可表示为 $F=6-k=3$ 。

3) 求解刚化驱动后的约束旋量。取各分支混合驱动单元中的 3 个移动副为输入, 分支的输入

数 $R_i=3$ 。在刚化所有驱动后, 分支的有效运动副为 RRRR, 其对上平台的约束为 2 个约束力, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_{i1}^r &= (0 \ 1 \ 0; -z_i \ 0 \ x_i)^T \\ S_{i2}^r &= (z_i \ 0 \ -x_i; 0 \ x_i^2 + z_i^2 \ 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

刚化驱动后的约束旋量个数 $k_{ri}=2$, 所有分支对上平台的总约束个数 $K_r=\sum_{i=1}^3 k_{ri}=6$, 其最大线性无关数可表示为 $k_r=6$ 。

4) 输入合理性分析。令 $\Delta K=K_r-K$, 表示刚化所有驱动后上平台新增的约束个数; $\Delta k=k_r-k$, 表示刚化所有驱动后上平台新增的线性无关的约束个数。

对于 3-RPRR(PRRRP)RS 机构, $k_r=6$, $\Delta K=3$, $\Delta k=3$, 存在 $\Delta K=\Delta k=3$ 且 $R_i=k_{ri}-k_i+\Delta n_i=3$, 这说明机构的输入合理, 具体原因如下: 各分支增加的约束数等于各分支驱动数, 说明驱动选取合理; 所有驱动刚化后对上平台的约束均线性无关, 说明此时上平台受到了完整约束, 失去了全部自由度。因此, 机构输入合理, 且有确定的运动。

2 运动学分析

2.1 位姿分析

机构包括上平台、基座和 3 条结构完全相同的分支, 以分支 i 为例, 其结构简图见图 6。

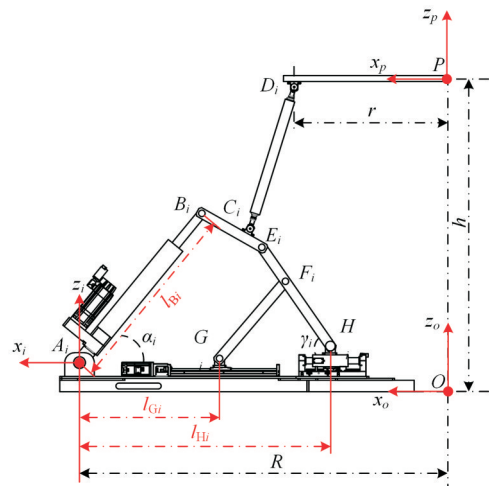


图 6 分支 i 结构简图

Fig.6 Structure diagram of branch i

由图 6 可看出, 基座中心 O 和上平台中心 P 分别建立固定坐标系 $\{O\}$ 和动坐标系 $\{P\}$, 并建立分支坐标系 $\{A_i\}$, 低、中、高频驱动的输入量分别为 l_{Bi} 、 l_{Gi} 和 l_{Hi} 。铰链点 A_i 、 B_i 、 C_i 、 E_i 、 F_i 、 G_i 和 H_i 可表示于分支坐标系 $\{A_i\}$ 中, 具体为

$$\begin{aligned}
 A_i^A &= (0, 0, 0) & B_i^A &= (-l_{Bi} \cos \alpha_i, 0, l_{Bi} \sin \alpha_i) \\
 E_i^A &= (-l_{Hi} + l_{EH} \cos \gamma_i, 0, z_{Hi} + l_{EH} \sin \gamma_i) \\
 F_i^A &= (-l_{Hi} + l_{FH} \cos \gamma_i, 0, z_{Hi} + l_{FH} \sin \gamma_i) \\
 G_i^A &= (-l_{Gi}, 0, z_{Gi}^A) & H_i^A &= (-l_{Hi}, 0, z_{Hi}^A) \\
 C_i^A &= \left(\frac{l_{BC} x_{Ei}^A + l_{CE} x_{Bi}^A}{l_{BC} + l_{CE}}, 0, \frac{l_{BC} z_{Ei}^A + l_{CE} z_{Bi}^A}{l_{BC} + l_{CE}} \right) \\
 \alpha_i &= \arccos \frac{(z_{Hi}^A)^2}{2l_{Bi} \sqrt{(l_{Hi})^2 + (z_{Hi}^A)^2} - l_{Hi}} + \arctan \frac{z_{Hi}^A}{l_{Hi}} \\
 \gamma_i &= \arccos \frac{(l_{Hi} - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2 + (l_{FH})^2 - (l_{FG})^2}{2l_{FH} \sqrt{(l_{Hi} - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2}}
 \end{aligned}$$

且 l_{BC} 、 l_{CE} 、 l_{BE} 、 l_{EH} 、 l_{FH} 、 l_{FG} 、 z_{Gi}^A 和 z_{Hi}^A 均为固定结构参数。

关于铰链点 D_i ，设上平台关于 D_i 的外接圆半径为 r ，则它在动坐标系 $\{P\}$ 的坐标可表示为 $D_i^P = (r \cos \theta_i, -r \sin \theta_i, 0)$ ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $\theta_3 = 240^\circ$)。在此基础上，应用 Z - Y - X 型欧拉角 ($\varphi_z, \varphi_y, \varphi_x$) 来描述上平台相对于基座的姿态，则上平台相对于基座的运动参数包括 ($x_p, y_p, z_p, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$)，铰链点 D_i 在 $\{O\}$ 系下的坐标可表示为

$$D_i^O = R_{OP} D_i^P + P^O \quad (5)$$

其中，旋转矩阵 R_{OP} 可表示为

$$R_{OP} = R(z, \varphi_x) R(y, \varphi_y) R(x, \varphi_z) P^O = (x_p, y_p, z_p)$$

可以得到

$$D_i^O = [D_{ix}^O \ D_{iy}^O \ D_{iz}^O]^T$$

再通过变换矩阵 T_{OA}^i ，可以将铰链点 D_i 表示在分支坐标系 $\{A_i\}$ 中，其转换过程为

$$D_i^A = T_{OA}^i D_i^O = \begin{bmatrix} \cos \phi_i D_{ix}^O - \sin \phi_i D_{iy}^O + A_{ix}^O \\ \sin \phi_i D_{ix}^O + \cos \phi_i D_{iy}^O \\ D_{iz}^O + A_{iz}^O \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中： $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 120^\circ$, $\phi_3 = 240^\circ$; A_{ix}^O, A_{iz}^O 为固定参数，由上式可得到 D_{ix}^A, D_{iy}^A 和 D_{iz}^A 。

根据 l_{CD} 杆长恒定的几何关系，可得

$$l_{CD} = \sqrt{(x_{Ci}^A - x_{Di}^A)^2 + (0 - y_{Di}^A)^2 + (z_{Ci}^A - z_{Di}^A)^2} \quad (7)$$

结合各铰链点在分支坐标系 $\{A_i\}$ 系的表示，以及式(5)~式(7)，得到所有驱动量的方程组：

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(l_{B1}, l_{G1}, l_{H1}) &= 0 \\
 f_2(l_{B2}, l_{G2}, l_{H2}) &= 0 \\
 f_3(l_{B3}, l_{G3}, l_{H3}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

可以看出，机构混合驱动的位置解组合有无数种。本文根据驱动频率的分布，通过驱动锁定法，依次确定一种低频、中频和高频位置解。

首先根据低频驱动的实时输入信息更易获取，将中频驱动 l_{Gi} 和高频驱动 l_{Hi} 锁定在中位(本文的中位是指驱动行程的中间位置，例如驱动行程是 0~600 mm，则驱动中位是指 300 mm 的位置

点)，代入式(7)和式(8)，可求解出只包含低频驱动 l_{Bi} 的非线性方程组。其解析求解难度很高，如图7所示，本文通过迭代法可求解出数值解。

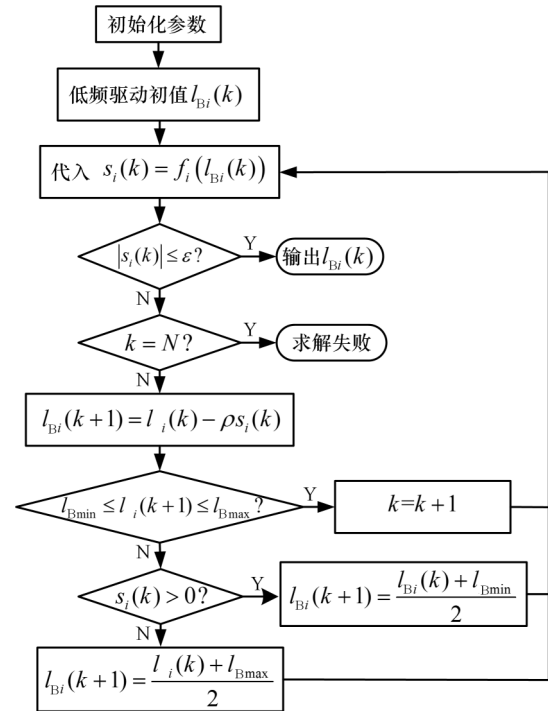


图7 迭代法流程图

Fig.7 Flow chart of iterative method

设定允许误差 $\epsilon = 10^{-6}$ ，迭代系数 $\rho = 1.29$ ，最大迭代步数 $K = 20$ ，并给定任意低频驱动输入量初始值 l_{Bi} ，应用以上迭代法，所用计算机主频为 3.5 GHz，所需迭代时间的平均值为 9 ms，可满足实时控制要求。

然后将高频驱动 l_{Hi} 锁定在中位，将求得的每一时刻的低频驱动 l_{Bi} 作为结构参数，代入式(8)求解出中频驱动 l_{Gi} 。其解析解为

$$l_{Gi} = \sqrt{(-b_i + \sqrt{b_i^2 - 4c_i})/2} + l_{Hi}^0 \quad (9)$$

$$b_i = 4(l_{FH})^2 d_i^2 - 2e_i$$

$$c_i = e_i^2 - 4(l_{FH})^2 d_i^2 (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2$$

$$d_i = \frac{(l_{CD})^2 (l_{BC} + l_{CE})^2 - (D_{ix}^A)^2 - f_i^2 - g_i^2 - (l_{BC} l_{EH})^2}{2l_{BC} l_{EH} \sqrt{f_i^2 + g_i^2}} - \gamma_i^0$$

$$e_i = (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2 + (l_{FH})^2 - (l_{FG})^2$$

$$f_i = D_{ix}^A (l_{BC} + l_{CE}) + l_{BC} l_{Bi} + l_{Bi} l_{CE}$$

$$g_i = D_{iz}^A (l_{BC} + l_{CE}) - l_{BC} z_{Hi}^A - l_{Bi} l_{CE}$$

式中： l_{Hi}^0 为高频驱动的中位初始值； γ_i^0 为所有驱动均在初始位置时的 γ_i 。

最后将求得的每一时刻的低频驱动 l_{Bi} 和中频驱动 l_{Gi} 均作为结构参数，代入式(8)和式(9)可求解出高频驱动 l_{Hi} ：

$$l_{Hi} = l_{Gi} - \sqrt{(-b_i + \sqrt{b_i^2 - 4c_i})/2} \quad (10)$$

2.2 速度分析

分析机构的低频、中频和高频驱动与输出平台之间速度的映射关系,求解思路是先将混合驱动单元看作一个广义驱动单元,得到广义运动旋量,再依次得到各驱动关节与驱动单元整体的速度映射关系。

2.2.1 混合驱动单元速度分析

如图6所示,在分支坐标系 $\{A_i\}$ 下,在低频驱动 l_{Bi} 下,将混合驱动单元中的 α_i 作为关节变量,选择将中频 l_{Gi} 和高频 l_{Hi} 的驱动锁定在中位,此时混合驱动单元的运动旋量可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_A^i &= (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ S_B^i &= (0 \ 0 \ 0; \ \cos \alpha_i \ 0 \ \sin \alpha_i)^T \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

根据在2.1节中得到的 α_i 表达式,可得到关节变量 α_i 对低频驱动 l_{Bi} 的偏导数:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{Bi}} = \frac{2l_{Hi}^0 \sqrt{(l_{Hi}^0)^2 + (z_{Hi}^A)^2} - 4l_{Bi} [(l_{Hi}^0)^2 + (z_{Hi}^A)^2]}{\sqrt{\Delta}} \quad (12)$$

$$\Delta = 4l_{Bi}^2 [(l_{Hi}^0)^2 + (z_{Hi}^A)^2] - 4l_{Bi} l_{Hi}^0 \sqrt{(l_{Hi}^0)^2 + (z_{Hi}^A)^2} + (l_{Hi}^0)^4 - (z_{Hi}^A)^4$$

此时,混合驱动单元的广义运动旋量表示为

$$S_{AB}^i = S_B^i + (\partial \alpha_i / \partial l_{Bi}) S_A^i \quad (13)$$

在中频驱动 l_{Gi} 下,以混合驱动单元中的 γ_i 作为关节变量,选择将低频 l_{Bi} 和高频 l_{Hi} 的驱动锁定在中位,此时混合驱动单元的运动旋量具体表示为

$$\left. \begin{aligned} S_E^i &= (0 \ 1 \ 0; \ -z_{Hi} \ 0 \ -l_{Hi}^0)^T \\ S_G^i &= (0 \ 0 \ 0; \ -1 \ 0 \ 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

根据2.1节得到的 γ_i 表达式,可得到关节变量 γ_i 对中频驱动 l_{Gi} 的偏导数:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial l_{Gi}} = \frac{-(l_{Hi}^0 - l_{Gi})^{-0.5} - [(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2] (l_{Hi}^0 - l_{Gi})^{-1.5}}{2\sqrt{\Gamma}} \quad (15)$$

$$\Gamma = 4(l_{FH})^4 [(l_{Hi}^0 - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2] - [(l_{Hi}^0 - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2] - [(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2]^2 - \frac{2[(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2] (l_{FH})^2 [(l_{Hi}^0 - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2]}{(l_{Hi}^0 - l_{Gi})^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2}$$

此时,混合驱动单元的广义运动旋量表示为

$$S_{EG}^i = S_G^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Gi}) S_E^i \quad (16)$$

在高频驱动 l_{Hi} 下,将混合驱动单元中的 γ_i 作为关节变量,选择将低频 l_{Bi} 和中频 l_{Gi} 的驱动锁定在中位,此时混合驱动单元的运动旋量为

$$\left. \begin{aligned} S_E^i &= (0 \ 1 \ 0; \ -z_{Hi} \ 0 \ -l_{Hi})^T \\ S_H^i &= (0 \ 0 \ 0; \ -1 \ 0 \ 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

然后,关节变量 γ_i 对高频驱动 l_{Hi} 的偏导数为

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial l_{Hi}} = \frac{(l_{Hi} - l_{Gi}^0)^{-0.5} + [(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2] (l_{Hi} - l_{Gi}^0)^{-1.5}}{2\sqrt{\Lambda}} \quad (18)$$

$$\Lambda = 4(l_{FH})^4 [(l_{Hi} - l_{Gi}^0)^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2] - [(l_{Hi} - l_{Gi}^0)^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2] - [(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2]^2 - \frac{2[(l_{FH})^2 - (l_{FG})^2] (l_{FH})^2 [(l_{Hi} - l_{Gi}^0)^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2]}{(l_{Hi} - l_{Gi}^0)^2 + (z_{Hi}^A - z_{Gi}^A)^2}$$

此时,混合驱动单元的广义运动旋量表示为

$$S_{EH}^i = S_H^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Hi}) S_E^i \quad (19)$$

综上所述,混合驱动单元在低频、中频和高频驱动下的广义运动旋量 S_φ^i 可表示为

$$S_\varphi^i = \begin{cases} S_{AB}^i = S_B^i + (\partial \alpha_i / \partial l_{Bi}) S_A^i & \text{低频驱动} \\ S_{EG}^i = S_G^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Gi}) S_E^i & \text{中频驱动} \\ S_{EH}^i = S_H^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Hi}) S_E^i & \text{高频驱动} \end{cases} \quad (20)$$

2.2.2 一阶影响系数分析

图6中,在 C_i 处虚设一个转动副 R' ,令其转动轴的轴线平行于 $\{A_i\}$ 系 x_i 轴,此时分支 i 中的R'RS支链的运动旋量可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_{C1}^i &= (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ z_{Ci}^A - y_{Ci}^A)^T \\ S_{C}^i &= (0 \ 1 \ 0; \ -z_{Ci}^A \ 0 \ x_{Ci}^A)^T \\ S_{D1}^i &= (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ z_{Di}^A \ y_{Di}^A)^T \\ S_{D2}^i &= (0 \ 1 \ 0; \ z_{Di}^A \ 0 \ x_{Di}^A)^T \\ S_{D3}^i &= (0 \ 0 \ 1; \ y_{Di}^A \ x_{Di}^A \ 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中, C_i 和 D_i 的坐标均是在分支坐标系 $\{A_i\}$ 系中的表示形式,通过变换矩阵 T_{OA}^i 的旋量形式 T_{OA}^{Si} ,其表达式为

$$T_{OA}^{Si} = \begin{bmatrix} R(z, \phi_i) & 0_{3 \times 3} \\ [OA_i] R(z, \phi_i) & R(z, \phi_i) \end{bmatrix}$$

$[OA_i]$ 表示 A_i^0 的反对称矩阵形式。通过 T_{OA}^{Si} 可将运动旋量从 $\{A_i\}$ 系转换到 $\{O\}$ 系,转换过程为

$$\left. \begin{aligned} S_1^i &= T_{OA}^{Si} S_\varphi^i \quad S_2^i = T_{OA}^{Si} S_{C1}^i \quad S_3^i = T_{OA}^{Si} S_C^i \\ S_4^i &= T_{OA}^{Si} S_{D1}^i \quad S_5^i = T_{OA}^{Si} S_{D2}^i \quad S_6^i = T_{OA}^{Si} S_{D3}^i \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

然后,可得到上平台相对于基座的旋量速度在基坐标系 $\{O\}$ 下的表示:

$$V_{PO}^O = G_\varphi^{P(i)} \dot{\varphi}^{(i)} = \dot{\varphi}_1^{(i)} S_1^i + \dot{\varphi}_2^{(i)} S_2^i + \dots + \dot{\varphi}_6^{(i)} S_6^i \quad (23)$$

式中: $G_\varphi^{P(i)} = [S_1^i \ S_2^i \ \dots \ S_6^i]$ 为分支 i 中关节变量与上平台之间旋量速度的映射关系。

本文将混合驱动单元看作整体,称其为等效混合驱动关节,通过式(20)可得到对应类型驱动的等效运动旋量。机构的等效混合驱动关节均为每个分支的第1个运动副,同时每个分支的第2个运动副均为虚设运动副,考虑到虚设运动副不影响实际运动,则机构的低频、中频或高频驱动和上平台的旋量速度之间的映射矩阵可表示为

$$G_\varphi^P = \begin{bmatrix} [G_\varphi^{P(1)}]_{1:1}^{-1} [G_\varphi^{P(2)}]_{1:1}^{-1} [G_\varphi^{P(3)}]_{1:1}^{-1} [G_\varphi^{P(1)}]_{2:2}^{-1} \\ [G_\varphi^{P(2)}]_{2:2}^{-1} [G_\varphi^{P(3)}]_{2:2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中, $[G_\varphi^{P(i)}]_{j:1}^{-1}$ 表示矩阵 $[G_\varphi^{P(i)}]^{-1}$ 的第 j 行。同

时,假设机构输入速度可表示为 $\dot{q} = [\dot{\varphi}_1^{(1)} \ \dot{\varphi}_1^{(2)} \ \dot{\varphi}_1^{(3)} \ \dot{\varphi}_2^{(1)} \ \dot{\varphi}_2^{(2)} \ \dot{\varphi}_2^{(3)}]^T$, $\dot{\varphi}_1^{(1)}$ 、 $\dot{\varphi}_1^{(2)}$ 、 $\dot{\varphi}_1^{(3)}$ 分别表示机构3个分支的低频、中频或高频驱动速度。机构的驱动速度与上平台的旋量速度之间的映射形式可表示为

$$V_{pO}^O = G_q^p \dot{q} \quad (25)$$

式中: G_q^p 为机构的低频、中频、高频驱动速度和上平台相对于基坐标系 $\{O\}$ 的旋量速度的一阶影响系数矩阵。

2.3 数值算例

首先给出 3-RPRR(PRRRP)RS 机构的具体结构参数,见表2。

表2 结构参数

Tab.2 The structure parameters mm

参数	数值
R	1700
r	650
h	1400
l_{CD}	750
l_{BC}	250
l_{CE}	100
l_{EH}	600
l_{FH}	400
l_{GF}	515
l_{Hi}^0	1275
l_{Gi}^0	710
l_{Bi}^0	1000
z_{Hi}^A	20
z_{Gi}^A	80

然后根据应用需求,给出以下运动规律:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x(t) &= 20\sin\left(\frac{2\pi t}{10}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi t}{2.5 \times 10^{-3}}\right) + 1.5\sin\left(\frac{2\pi t}{2.5 \times 10^{-5}}\right) \\ \varphi_y(t) &= 15\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi t}{10^{-3}}\right) + 1.2\sin\left(\frac{2\pi t}{2.5 \times 10^{-5}}\right) \\ z_p(t) &= 120\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 30\sin\left(\frac{2\pi t}{10^{-3}}\right) + 12\sin\left(\frac{2\pi t}{2.5 \times 10^{-5}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

根据以上结构参数和运动规律,设定运动时间为 10 s,低频、中频和 高频驱动对应实现运动规律中的低频、中频和 高频部分,通过 2.1 和 2.2 节的分析内容,可 得到机构的驱动位移和驱动速度,如图 8a~图 13a 所示。

与此同时,将机构模型导入 ADAMS 中,添加 相关约束,设定相同的运动规律和仿真时间,测

定所有驱动的相关信息,基于 PostProcessor 后处 理模块导出仿真数据,如图 8b~图 13b 所示。

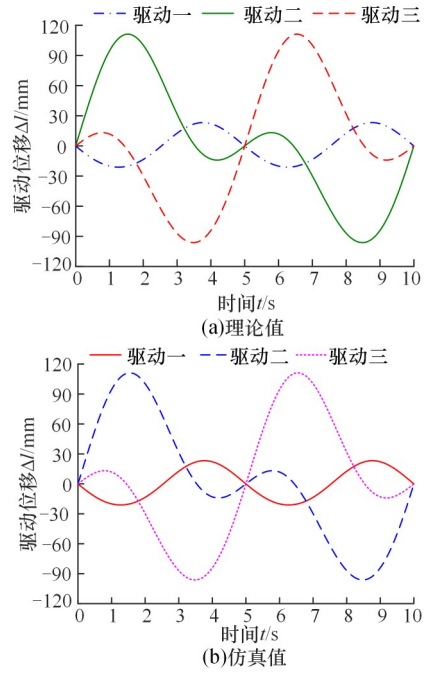


图8 低频驱动位移 ΔL_{Bi}

Fig.8 Low frequency driving displacement ΔL_{Bi}

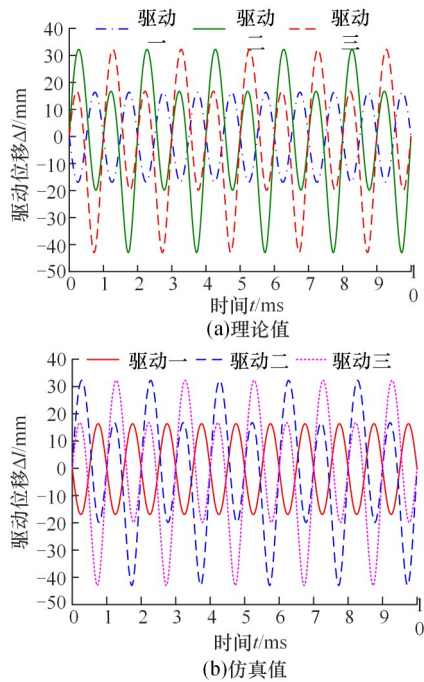


图9 中频驱动位移 ΔL_{Gi}

Fig.9 Medium frequency driving displacement ΔL_{Gi}

对比图 8~图 13 的理论值和仿真值可以看 出,两者几乎完全相同,由此验证了本节理论分析 的正确性。

3 传递性能分析

分析 3-RPRR(PRRRP)RS 机构的运动和力 传递性能,首先需要分别分析低频、中频和高频驱

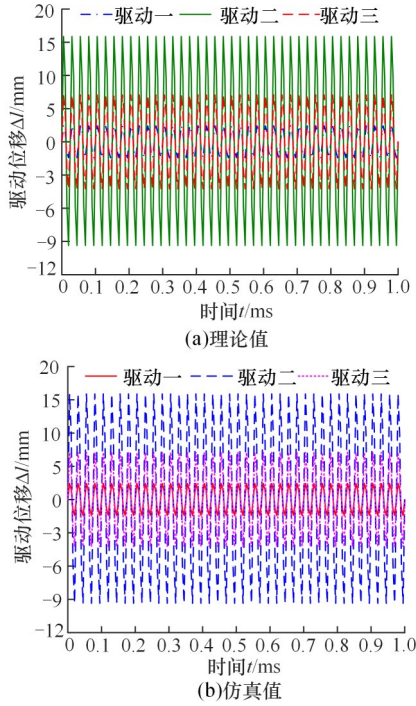


图 10 高频驱动位移 Δl_{Hi}

Fig.10 High frequency driving displacement Δl_{Hi}

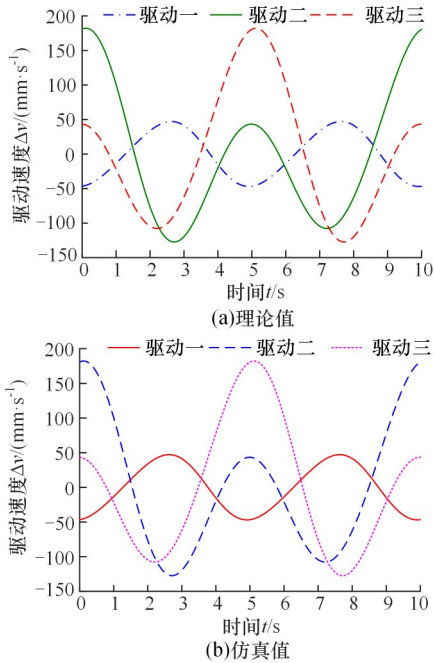


图 11 低频驱动速度 Δv_{Bi}

Fig.11 Low frequency driving velocity Δv_{Bi}

动输入端的传递性能和输出端的传递性能,进而得到不同频率驱动的全域传递性能指标,最后得到机构结构尺寸参数和传递性能的关系,为尺寸优化打下理论基础。

由式(3)和式(4)分别得到分支*i*对上平台的约束旋量,以及锁定混合驱动单元之后分支*i*对上平台的约束旋量,结合式(3)和式(4)可得到分支*i*的力传递旋量:

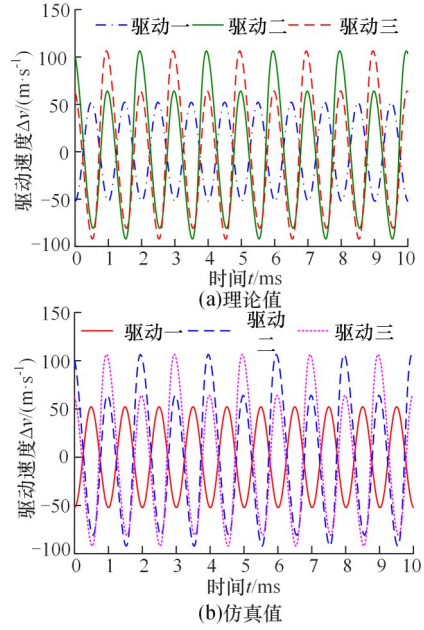


图 12 中频驱动速度 Δv_{Gi}

Fig.12 Medium frequency driving velocity Δv_{Gi}

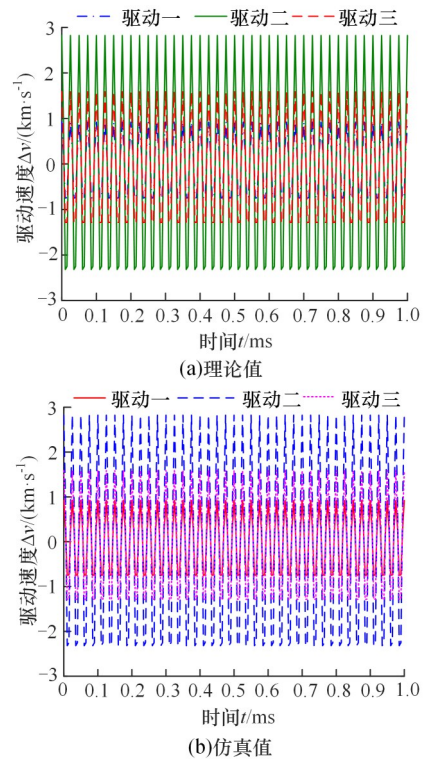


图 13 高频驱动速度 Δv_{Hi}

Fig.13 High frequency driving velocity Δv_{Hi}

$$S_T^i = S_{T2}^i = (z_i \ 0 \ -x_i; \ 0 \ x_i^2 + z_i^2 \ 0)^T \quad (27)$$

式中: S_T^i 为分支*i*中混合驱动单元力传递旋量。

同时,基于式(11)~式(20),可得

$$\left. \begin{aligned} S_{B}^i &= S_{AB}^i = S_B^i + (\partial \alpha_i / \partial l_{Bi}) S_A^i \\ S_{G}^i &= S_{EG}^i = S_G^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Gi}) S_E^i \\ S_{H}^i &= S_{EH}^i = S_H^i + (\partial \gamma_i / \partial l_{Hi}) S_E^i \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中: S_B^i 、 S_G^i 、 S_H^i 分别为分支*i*中混合驱动单元在低频、中频、高频驱动下的输入运动旋量。

根据式(27)和式(28),可进一步得到机构在输入端的运动和力传递性能指标^[24-26]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{IB}^i &= |S_{IB}^i \circ S_T^i| / |S_{IB}^i \circ S_T^i|_{\max} \\ \lambda_{IG}^i &= |S_{IG}^i \circ S_T^i| / |S_{IG}^i \circ S_T^i|_{\max} \\ \lambda_{IH}^i &= |S_{IH}^i \circ S_T^i| / |S_{IH}^i \circ S_T^i|_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

锁定分支*i*之外驱动后,上平台的运动取决于分支*i*,此时无论在何种驱动模式下,上平台的输出运动旋量均为 $S_O^i = (0 \ 1 \ 0; -z_i \ 0 \ x_i)^T$,则分支*i*的输出传递指标为

$$\eta^i = |S_O^i \circ S_T^i| / |S_O^i \circ S_T^i|_{\max} \quad (30)$$

基于式(29)和式(30),可分别得到机构在低频、中频和低频驱动下的运动和力传递性能指标 γ_{IB} 、 γ_{IG} 和 γ_{IH} :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{IB} &= \min \{ \lambda_{IB}^i, \eta^i \} \\ \gamma_{IG} &= \min \{ \lambda_{IG}^i, \eta^i \} \\ \gamma_{IH} &= \min \{ \lambda_{IH}^i, \eta^i \} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

再结合2.1节的位姿分析,可进一步得到各驱动下的全域传递性能指标 ζ_{IB} 、 ζ_{IG} 和 ζ_{IH} :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{IB} &= \int_W \gamma_{IB} dW / \int_W dW \\ \zeta_{IG} &= \int_W \gamma_{IG} dW / \int_W dW \\ \zeta_{IH} &= \int_W \gamma_{IH} dW / \int_W dW \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

所有全域传递性能指标的值域均为 $[0, 1]$,且其值越趋近于1,说明传递性能越好。

基于传递性能指标,可对表1的部分结构参数进行尺寸优化,优化目标函数可设置为

$$\begin{aligned} &\min [(\zeta_{IB} - 1)^2 + \min (\zeta_{IG} - 1)^2 + \min (\zeta_{IH} - 1)^2] \\ \text{s.t.} &\begin{cases} 700 \text{ mm} \leq l_{CD} \leq 800 \text{ mm} & 220 \text{ mm} \leq l_{BC} \leq 280 \text{ mm} \\ 80 \text{ mm} \leq l_{CE} \leq 120 \text{ mm} & 580 \text{ mm} \leq l_{EH} \leq 620 \text{ mm} \\ 380 \text{ mm} \leq l_{FH} \leq 420 \text{ mm} & 500 \text{ mm} \leq l_{GF} \leq 530 \text{ mm} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

通过遗传算法优化式(33)的目标函数,设置种群大小为100,采用轮盘选择法,交叉概率为0.8,再通过变异,终止遗传代数设定为100,可得优化结构尺寸,见表3。

表3 优化结构参数

Tab.3 The optimized structure parameters mm

参数	初始值	优化值
l_{CD}	750	767
l_{BC}	250	234
l_{CE}	100	103
l_{EH}	600	591
l_{FH}	400	404
l_{GF}	515	519

基于优化前后的尺寸,可分别得到机构各驱动在优化前后的全域传递性能指标以及性能图谱,具体如表4和图14~图19所示。可以看出,

表4 全域传递性能指标对比

Tab.4 Comparison of ζ_{IB} 、 ζ_{IG} and ζ_{IH}

性能指标	初始值	优化值	优化幅度/%
ζ_{IB}	0.8033	0.8979	11.78
ζ_{IG}	0.7928	0.8716	9.94
ζ_{IH}	0.7999	0.8754	9.44

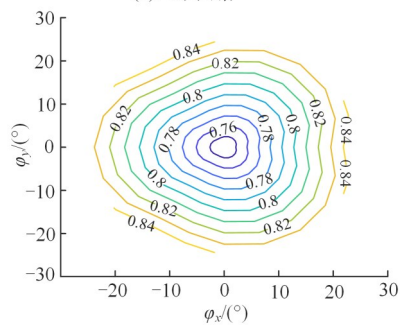
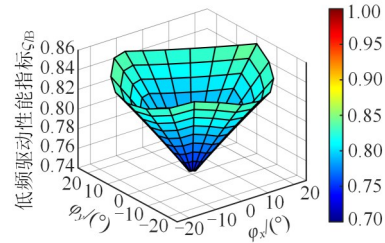


图14 优化前低频驱动性能图谱

Fig.14 Low frequency drive performance map before optimization

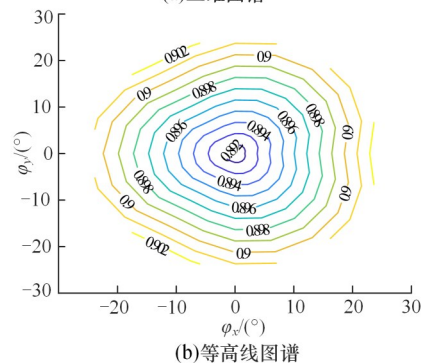
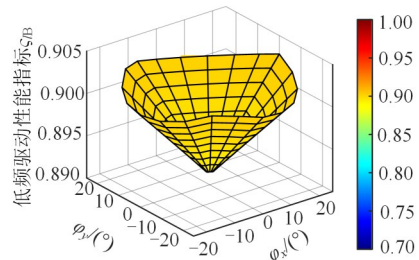


图15 优化后低频驱动性能图谱

Fig.15 Low frequency drive performance map after optimization

优化后机构在低频、中频、高频驱动下的运动和力传递性能在全工作空间范围均有所优化,且全域传递性能指标分别提高11.78%、9.94%和

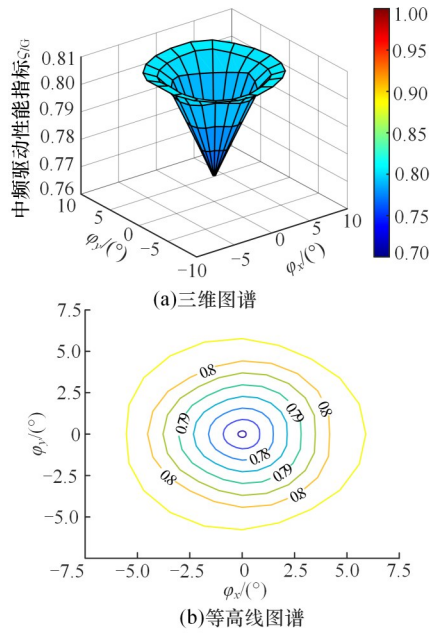


图 16 优化前中频驱动性能图谱
Fig.16 Medium frequency drive performance map before optimization

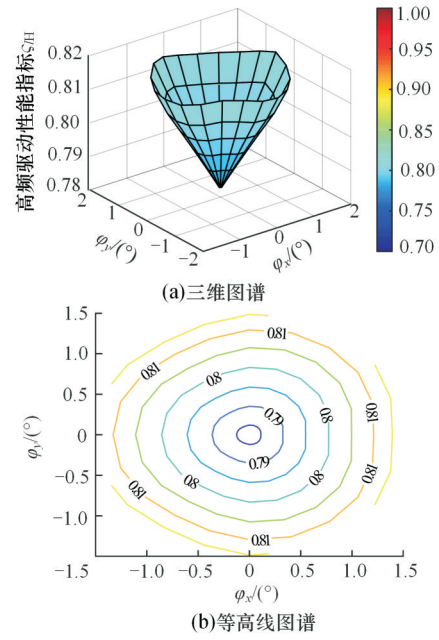


图 18 优化前高频驱动性能图谱
Fig.18 High frequency drive performance map before optimization

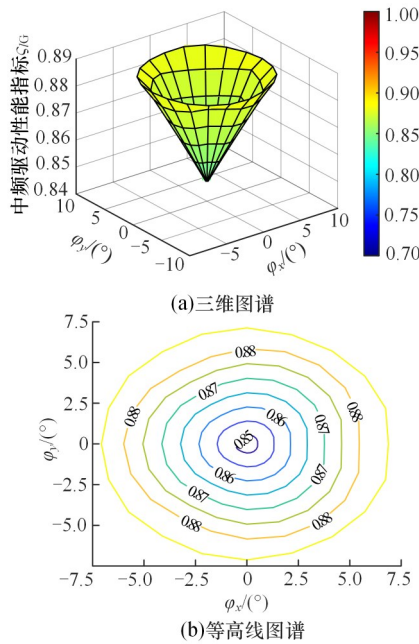


图 17 优化后中频驱动性能图谱
Fig.17 Medium frequency drive performance map after optimization

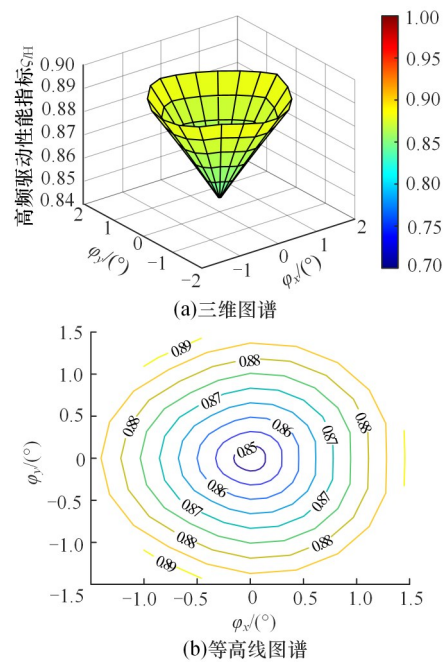


图 19 优化后高频驱动性能图谱
Fig.19 High frequency drive performance map after optimization

9.44%。

为了进一步验证传递性能的优化结果,用 ADAMS 软件进行仿真验证,具体步骤如下。

1)根据表 3 中优化后的结构参数修改机构模型,将其导入 ADAMS 中,如图 20 所示。

2)给定上平台的运动规律为式(25),可测定并导出优化后机构的低频、中频和 高频驱动的驱动速度,如图 21 所示。



图 20 优化后的机构仿真模型
Fig.20 Optimized mechanism simulation model

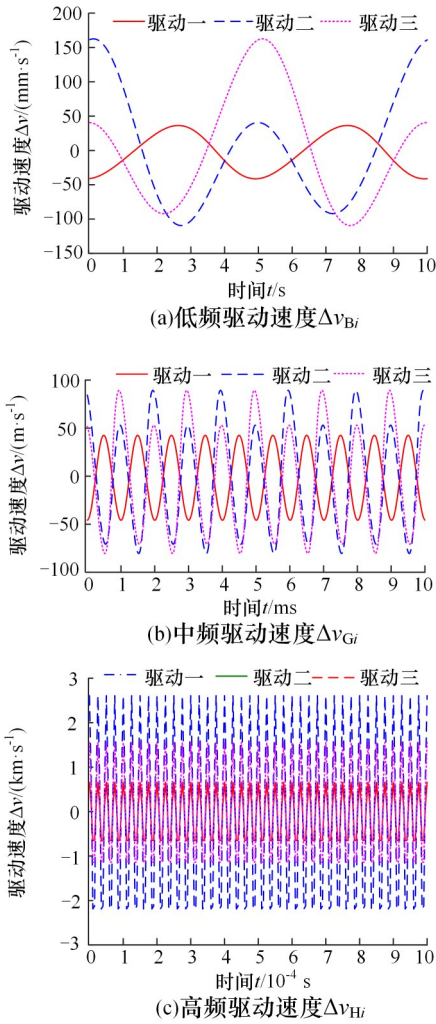


图21 优化后驱动速度

Fig.21 Optimized driving velocity

3)将图21与优化前的驱动速度(图11~图13)进行对比,可以看出,实现相同的输出规律,优化后所需的低频、中频和高频驱动速度相较优化前均有一定程度的降低。经测算,具体下降幅度如下:①低频驱动速度方面,3个分支的驱动速度幅值平均下降了9.52%;②中频驱动速度方面,3个分支的驱动速度幅值平均下降了9.34%;③高频驱动速度方面,3个分支的驱动速度幅值平均下降了6.89%。考虑到理论计算是对机构的全域性能指标的综合优化,仿真算例仅对一个具体实例进行了验算,所以理论和仿真结果有一定的偏差,但仿真结果也说明机构的运动传递性能确实有一定程度的提升,从而验证了运动传递性能优化的有效性。

4 结论

1)本文设计了一类高-中-低频混合驱动单元,得到了3-R_{PRR}(P_{RRR})RS并联式混合驱动机构,并分析了其输入合理性。

2)建立了机构高频、中频和低频驱动混合输出的位姿解模型,基于构建混合驱动单元的广义运动旋量推导了机构的一阶影响系数矩阵,并通过数值算例进行了理论和仿真结果的相互验证。

3)阐述了机构在混合驱动下的全域传递性能指标,并基于遗传算法对其进行了尺寸优化,优化后机构在低频、中频和高频驱动下的全域传递性能分别提高了11.78%、9.94%、9.44%。

参考文献:

- [1] NISHIDA T, SHIBASAKI H, ENOMOTO N, et al. Custom, Stable Platform[J]. New Equipment Digest, 2022, 87(1):22.
- [2] UBHI A S, PROKHOROV L, COOPER S, et al. Active Platform Stabilization with a 6D Seismometer [J]. Applied Physics Letters, 2022, 121(17):1-6.
- [3] HAN Bo, JIANG Yuan, YANG Wei, et al. Kinematics Characteristics Analysis of a 3-UPS/S Parallel Airborne Stabilized Platform[J]. Aerospace Science and Technology, 2023, 134: 108163.
- [4] 康熙,戴建生. 机构学中机构重构的理论难点与研究进展——变胞机构演变内涵、分岔机理、设计综合及其应用[J]. 中国机械工程, 2020, 31(1): 57-71.
- [5] 于靖军,刘凯,孔宪文. 多模式机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2020, 56(19): 14-27.
- [6] 单彦霞,张建伟,于靖军,等. 多模式并联机构操作模式变换方法研究[J]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 396-403.
- [7] SHAN Yanxia, ZHANG Jianwei, YU Jingjun, et al. Operation Mode Transformation Method of Multi-mode Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 396-403.
- [8] LACOMBE J, GOSELIN C. Singularity Analysis of a Kinematically Redundant (6+2)-DOF Parallel Mechanism for General Configurations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 176: 105015.
- [9] GHAEDRAHMATI R, GOSELIN C. Kinematic Analysis of a New 2-DOF Parallel Wrist with a

- Large Singularity-free Rotational Workspace [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 175: 104942.
- [9] YIĞIT A, BRETON D, GOSELIN C. Exploiting the Kinematic Redundancy of a (6+3)-degree-of-freedom Parallel Manipulator to Produce Unlimited Rotation of the Platform[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2024, 16(7): 071004.
- [10] 龚峻山,方跃法,靳晓东. 基于并联手指结构的多功能灵巧手的设计与研究[J]. 中国机械工程, 2020, 31(23): 2837-2846.
- GONG Junshan, FANG Yuefa, JIN Xiaodong, et al. Design and Research of Multifunctional Dexterous Hands Based on Parallel Finger Structure [J]. China Mechanical Engineering, 2020,31(23): 2837-2846.
- [11] WANG Lin, FANG Yuefa, LI Luquan. Design and Analysis of the Gripper Mechanism Based on Generalized Parallel Mechanisms with Configurable Moving Platform[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2021, 16(4): 765-781.
- [12] LI Luquan, FANG Yuefa, GUO Sheng, et al. Type Synthesis of a Class of Novel 3-DOF Single-loop Parallel Leg Mechanisms for Walking Robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 145: 103695.
- [13] LI Luquan, FANG Yuefa, WANG Lin. Design of a Family of Multi-DOF Drive Systems for fewer Limb Parallel Mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 148: 103802.
- [14] QU Haibo, HU Lanqing, GUO Sheng. Singularity Analysis and Avoidance of a Planar Parallel Mechanism with Kinematic Redundancy under a Fixed Orientation[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2021, 235(18): 3534-3553.
- [15] 曲海波,胡榄庆,郭盛,等. 含支链闭环的结构冗余平面并联机构静力学分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2020, 51(10): 2758-2771.
- QU Haibo, HU Lanqing, GUO Sheng, et al. Statics Analysis of a Planar Parallel Mechanism with Kinematic Redundancy and Closed-loop Limb [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2020, 51(10): 2758-2771.
- [16] QU Haibo, GUO Sheng. Kinematics Analysis of a Novel Planar Parallel Manipulator with Kinematic Redundancy[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2017, 31(4): 1927-1935.
- [17] 陈宇航,赵铁石,耿明超,等. 闭环双驱动混合输出六自由度并联机构运动分析[J]. 中国机械工程, 2015, 26(20): 2793-2800.
- CHEN Yuhang, ZHAO Tieshi, GENG Mingchao, et al. Kinematic Analysis of a 6-DOF Parallel Mechanism with Closed Loop Dual-drive and Composite Output[J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(20): 2793-2800.
- [18] 赵星宇,赵铁石,云轩,等. 高低频复合驱动的并联调姿隔振平台的运动分析[J]. 机器人, 2018, 40(1): 24-36.
- ZHAO Xingyu, ZHAO Tieshi, YUN Xuan, et al. Kinematics Analysis of Parallel Position Adjustment and Vibration Isolation Platform with High and Low Frequency Compound Drive[J]. Robot, 2018, 40(1): 24-36.
- [19] ZHAO Xingyu, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Type Synthesis and Analysis of Parallel Mechanisms with Sub-closed-loops[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 120: 140-165.
- [20] 张金柱,史汉卿,王涛,等. 五自由度并联驱动机构及其位置分辨能力分析[J]. 中国机械工程, 2021, 32(12): 1414-1422.
- ZHANG Jinzhu, SHI Hanqing, WANG Tao, et al. Analysis of 5-DOF Parallel Driving Mechanisms and Their Position Resolution[J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(12): 1414-1422.
- [21] 金振林,张金柱,高峰. 一种消防六足机器人及其腿部机构运动学分析[J]. 中国机械工程, 2016, 27(7): 865-871.
- JIN Zhenlin, ZHANG Jinzhu, GAO Feng. A Fire-fighting Six-legged Robot and Its Kinematics Analysis of Leg Mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(7): 865-871.
- [22] TIAN Xin, ZHAO Tieshi, SHENG Yu, et al. Modeling and Prototype of a Machining Robot with R(3-RUHR)/UURP Hybrid Module[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2023, 15(1): 011007.
- [23] WANG Chang, ZHAO Tieshi, LI Erwei, et al. A Novel Index to Evaluate the Mapping of Parallel Mechanisms from Internal to External Wrenches[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104058.
- [24] WANG Jinsong, WU Chao, LIU Xin-Jun. Performance Evaluation of Parallel Manipulators: Motion/Force Transmissibility and Its Index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(10): 1462-1476.
- [25] RUSSO M, ZHANG Dan, LIU Xin-Jun, et al. A Review of Parallel Kinematic Machine Tools: Design, Modeling, and Applications[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2024, 196: 104118.