

大挠度变截面欧拉梁曲率参数化模型

黄勇刚¹ 谢丹^{2*}

1. 重庆工商大学智能装备绿色设计与制造重庆市重点实验室, 重庆, 400067

2. 西南大学工程技术学院, 重庆, 400715

摘要: 为了实现结构和性能的优化, 变截面梁在柔顺机构中愈来愈受到重视, 针对其大挠度分析难以兼顾精度和效率的挑战, 提出了一种基于曲率逼近的参数化建模方法。采用 Bernstein 多项式表示曲线曲率, 基于最小总势能原理建立静力平衡方程, 应用高斯积分和牛顿-拉弗森迭代法进行数值求解。其优点是弯曲应变能及应力的计算简单而精确, 且广义刚度矩阵是与截面惯性矩变化相关的常值对称方阵, 因而建模精度高、数值计算收敛速度快。同时, 基于曲率参数解, 结果后处理简便快捷。多个算例的数值仿真结果充分证明了所提方法的有效性和优越性。

关键词: 柔顺机构; 变截面梁; 大挠度; 参数化模型

中图分类号: TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.08.011

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Curvature Parameterization Model for Variable Cross-section Euler Beams under Large Deflection

HUANG Yonggang¹ XIE Dan^{2*}

1. Chongqing Key Laboratory of Green Design and Manufacturing of Intelligent Equipment, Chongqing Technology and Business University, Chongqing, 400067

2. College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing, 400715

Abstract: In order to achieve optimization of structures and performances, variable cross-section beams were increasingly valued in compliant mechanisms. A parametric model was proposed to address the challenge of accuracy and efficiency of large deflection analysis based on curvature approximation. The proposed approach represented the curvature of deflection curve by Bernstein polynomials. Then the static equilibrium equation was established based on the principle of minimum total potential energy, and the numerical solution was obtained via Gaussian quadrature and Newton-Raphson iteration. The advantages are that the expression of bending strain energy and stress are simple and accurate, and the generalized stiffness matrix is a constant symmetric square matrix related to the variation of the cross-sectional moment of inertia. Therefore, both modeling accuracy and computational efficiency are significantly improved. Furthermore, the post-processing is simple and fast based on the solution of curvature parameters. Numerical examples fully demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed model.

Key words: compliant mechanism; variable cross-section beam; large deflection; parameterization model

0 引言

长细比较大可忽略剪切影响的细长梁一般又称为欧拉梁或欧拉-伯努利梁, 它以弯曲变形为主, 能实现较大行程且工作应力小, 常作为柔顺机构的柔性单元^[1]。变截面欧拉梁沿梁长改变截面尺寸, 为结构和性能优化提供了更大可行域, 近年来在柔顺机构中受到越来越广泛的重视。在结构优化方面, 利用梁截面尺寸的缓变可减小应力集

中^[2]; 基于截面尺寸的连续变化可实现应力均化从而获得等强度设计^[3]或进行材料减重设计^[4], 亦可实现不同部位弯曲变形量的调控, 使得结构紧凑^[5]以及获得期望的变形构型^[6]; 还可在保证基本性能的前提下减小最大工作应力^[7]。在性能优化方面, 利用变截面梁可实现不同的刚度特性, 如变刚度作动器^[8]、仿生柔性关节^[5]、负泊松比超材料^[9]、常力机构^[10]; 在特定的设计约束条件下, 实现最小挠度^[11]、最大刚度^[12]、最大工作空间^[13]、运动精度优化^[14]、最大吸能效果^[15]以及固有频率的调节^[16]等。

虽然变截面欧拉梁为柔顺机构的设计提供了

收稿日期: 2024-07-12

基金项目: 国家自然科学基金(51805448); 中央高校基本科研业务费专项资金(SWU-KT22025)

更多选择,但其大挠度建模极具挑战性。就单一变截面欧拉梁而言,目前能对其大挠度弯曲进行有效求解的方法较多,如基于加权残值原理的配点法^[17]、最小二乘法^[18]以及经典里兹法^[19]、有限差分法^[20]、有限积分法^[21]、微分变换法^[22]、微分求积法^[23]、同伦法^[24]、边界元法^[25]等。就采用变截面梁的柔顺机构而言,目前主要手段是有限元类方法,包括商用有限元软件建模^[5,10,15]、基于线性梁单元^[4]、共旋坐标法^[26]、等几何分析^[9]、绝对节点坐标法^[27]等有限元类算法建模。与有限元类方法通过单元划分进而组装总体刚体矩阵进行求解不同,在柔顺机构领域存在一类将长梁分割成多段首尾相接的短梁、对每段短梁建立平衡方程并与梁段的几何连续条件和力相互平衡条件联立求解的所谓链式算法。如变截面短梁段采用梁约束模型^[28]建立平衡方程就成为目前在柔顺机构大挠度建模领域应用较多的链式梁约束模型^[13]。亦有将变截面短梁段近似为等截面梁并基于小挠度假设建立平衡方程,再根据优化算法^[29]或逐段软化法^[30]求解整体梁的大挠度变形。而柔顺机构中常见的伪刚体模型,目前能实现纯力矩载荷作用下截面高度抛物变化梁的等效^[16]。另外,将边值问题转化为初值问题的打靶法^[31-32]也可应用于柔顺机构中变截面梁的大挠度求解。以上方法应用于具有多柔性构件的柔顺机构时,存在诸如求解效率与计算精度相互制约、系统建模与求解过程不规范以及结果后处理不方便等不足。

本文在曲率参数化模型^[33-34]的基础上,计及截面惯性矩沿梁长的变化,实现了变截面欧拉梁大挠度弯曲的高精度建模、高效率求解和快捷后处理,为以变截面欧拉梁为柔性单元的大挠度柔顺机构建模分析提供了一种统一规范的求解框架。

1 平面挠曲线的曲率参数化

变截面欧拉梁大挠度分析的关键是如何表示挠曲线,这决定了载荷作用点位移和弯曲应变能的计算以及结果后处理方式,从而影响建模规范性、模型精度和求解效率以及后处理便捷性。对于平面梁弯曲,挠曲线曲率具有核心地位,从材料力学观点来看,它是弯曲应变度量,根据曲率能直接精确计算应变能和应力;而从微分几何观点来看,曲率是曲线内蕴不变量,决定其几何形态。综上,用曲率来表示挠曲线具有显著优势。

1.1 由曲率表示平面曲线

根据微分几何曲线论基本定理,平面曲线的形状完全由其相对曲率 k 确定。为了建立相对曲率所确定的平面曲线方程,建立图1所示的曲线连体系:曲线起点为坐标原点,起点切向量指向弧长 s 增大方向为 x 轴正向, x 轴逆时针旋转 90° 为 y 轴正向。

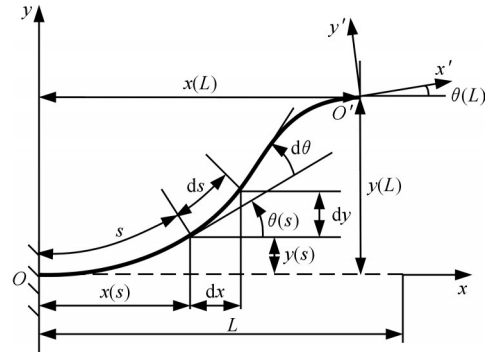


图1 平面曲线及其连体系

Fig.1 Planar curve and body-fixed frame

如图1所示,曲线弧长 s 处坐标和切线转角满足以下关系:

$$\frac{d\theta}{ds} = k(s) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta(s) \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta(s) \quad (1)$$

式中: $k(s)$ 为相对曲率, $s \in [0, L]$; L 为曲线长。

由相对曲率 $k(s)$ 确定的平面曲线及其切线转角 $\theta(s)$ 可由以下积分表示:

$$\theta(s) = \int_0^s k(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^s \cos(\int_0^\zeta k(\xi) d\xi) d\zeta \\ \int_0^s \sin(\int_0^\zeta k(\xi) d\xi) d\zeta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\zeta \in [0, s] \quad s \in [0, L]$

1.2 Bernstein 多项式曲率与平面挠曲线

如果曲率函数 $k(s)$ 连续且可微,则根据逼近论 Weierstrass 第一定理,它可由多项式逼近。采用 n 次 Bernstein 多项式^[35]逼近梁挠曲线的曲率时, $k(s)$ 可写成以下形式:

$$k(q, s) = \sum_{i=0}^n q_i B_{i,n}(t) = B^T q \quad (4)$$

$$t = s/L \quad B = [B_{0,n}(t) \ B_{1,n}(t) \ \dots \ B_{n,n}(t)]^T$$

其中, $t \in [0, 1]$ 是挠曲线的归一化弧长坐标; B 是 n 次 Bernstein 基函数列阵,其一般形式为

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i \quad (5)$$

而 $q = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_n]^T$ 是具有曲率量纲的待定系数列阵,可看成为梁弯曲变形的自由度或广义坐标,称为曲率参数。将式(4)代入式(2),可得转角计算公式:

$$\theta(\mathbf{q}, s) = \sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1} \left(\frac{s}{L} \right) \right) \quad (6)$$

由式(3)和式(6)可得挠曲线方程:

$$\left. \begin{aligned} x(\mathbf{q}, s) &= \int_0^s \cos \left(\sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1} \left(\frac{\xi}{L} \right) \right) \right) d\xi \\ y(\mathbf{q}, s) &= \int_0^s \sin \left(\sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1} \left(\frac{\xi}{L} \right) \right) \right) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将 $s=L$ 代入式(6), 可得挠曲线末端转角:

$$\theta(\mathbf{q}, L) = \frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n q_i \quad (8)$$

将 $s=L$ 代入式(7), 可得到挠曲线末端位置 $x(\mathbf{q}, L)$ 和 $y(\mathbf{q}, L)$ 。由此, 曲率参数列阵 \mathbf{q} 就映射为平面挠曲线, 用来描述梁弯曲的平衡位形。柔性梁具有无穷多自由度的连续体变形就可采用有限维(有限自由度)的 $n+1$ 个曲率参数(对应 n 次 Bernstein 多项式曲率)逼近。后续研究结果表明, 对于截面连续缓变的欧拉梁, 仅需采用较低次数的 Bernstein 多项式曲率就可获得对大挠度弯曲的高精度逼近。

2 变截面欧拉梁大挠度平衡方程

梁的挠曲线通过曲率参数化后, 变截面欧拉梁大挠度下的弯曲应变能计算简单直接, 基于最小总势能原理, 可建立以曲率参数列阵 \mathbf{q} 为基本未知量的静力平衡方程。

2.1 变截面欧拉梁的弯曲应变能和广义刚度矩阵

设变截面欧拉梁的长度、材料弹性模量分别为 L, E , 沿梁长变化的截面惯性矩为 $I(s)$, 忽略剪切和拉压变形, 由平直状态弯曲到曲率参数列阵 \mathbf{q} 状态下的应变能为

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} E \int_0^L I(s) k(\mathbf{q}, s)^2 ds \quad (9)$$

将式(4)代入上式并写成矩阵形式:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (10)$$

其中, \mathbf{K} 是广义刚度矩阵, 其表达式如下:

$$\mathbf{K} = E \int_0^L I(s) \mathbf{B} \mathbf{B}^T ds \quad (11)$$

n 次 Bernstein 多项式对应的 $n+1$ 维曲率参数化模型, 广义刚度矩阵是 $n+1$ 阶方阵, 其元素计算公式如下:

$$K_{ij} = E \int_0^L I(s) B_{i-1,n} \left(\frac{s}{L} \right) B_{j-1,n} \left(\frac{s}{L} \right) ds \quad (12)$$

由上可见, 广义刚度矩阵是与截面惯性矩相关而与变形状态无关的常值对称方阵。

2.2 末端载荷下的静力平衡方程

对于图 2 所示的悬臂直梁, 固定方向集中力

F_x, F_y 和弯矩 M 准静态加载, 忽略自重, 系统总势能为

$$\Pi(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - F_x(x(\mathbf{q}, L) - L) - F_y y(\mathbf{q}, L) - M\theta(\mathbf{q}, L) \quad (13)$$

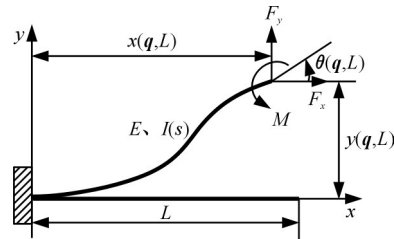


图 2 末端载荷悬臂直梁

Fig.2 Straight cantilever beam under tip load

根据最小总势能原理, 梁平衡的必要条件是系统总势能最小, 即式(13)对曲率参数的偏导数为 0。写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} - F_x \mathbf{J}_x(\mathbf{q}) - F_y \mathbf{J}_y(\mathbf{q}) - M \mathbf{J}_\theta = 0 \quad (14)$$

其中, $\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{J}_\theta$ 是梁末端位置和转角对曲率参数的雅可比矩阵:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_x(\mathbf{q}) &= \left[\frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_0} \quad \dots \quad \frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_n} \right]^T \\ \mathbf{J}_y(\mathbf{q}) &= \left[\frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_0} \quad \dots \quad \frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_n} \right]^T \\ \mathbf{J}_\theta &= \left[\frac{L}{n+1} \quad \dots \quad \frac{L}{n+1} \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14)为以曲率参数列阵 \mathbf{q} 为基本未知量、末端载荷下的静力平衡方程矩阵形式。 $\mathbf{J}_x(\mathbf{q}), \mathbf{J}_y(\mathbf{q})$ 通过式(7)求对曲率参数的偏导数计算得到。式(14)的本质是以曲率参数为广义坐标的广义力平衡条件, 等号左边第一项为广义弹性恢复力, 后三项为末端载荷对应的广义力。

3 大挠度平衡方程的数值求解方法

上述平衡方程式(14)中的雅可比矩阵涉及式(7)形式的积分对曲率参数的偏导数, 一般情形下难以获得显式表达。同时, 广义刚度矩阵元素计算式(12)涉及截面惯性矩函数与 Bernstein 基函数乘积的积分, 均需采用数值积分方法进行计算。另外, 平衡方程是非线性方程, 需要采用迭代法进行求解。本文采用计算量较少但精度较高的高斯积分方案进行数值积分, 采用具有二阶收敛性的牛顿-拉夫森迭代法对平衡方程组进行迭代求解。

3.1 基于高斯积分的广义刚度矩阵计算

由式(12), 若截面惯性矩函数为多项式, 则刚度矩阵可以得到显式积分结果, 但针对不同的多项式惯性矩以及不同维数的曲率参数化模型,

需要重新推导。另外,惯性矩函数非多项式情形难以得到显式积分结果。因此,采用规范统一的数值积分方法计算广义刚度矩阵,有利于编制通用计算代码。

m 点高斯积分能够精确计算不高于 $2m-1$ 次多项式的积分值。假设采用 n 次Bernstein多项式曲率,惯性矩表达式为 j 次多项式,则刚度矩阵元素的被积多项式为 $2n+j$ 次,采用 $m > (2n+j)/2$ 点的高斯积分即可精确计算。对于非多项式形式的惯性矩,可以将其展开为麦克劳林多项式,按一定的精度要求确定高斯积分点数。

设 η_k 和 Δ_k 是 $[-1, 1]$ 区间的高斯积分点和权重系数,积分点弧长坐标 $s_k=L(\eta_k+1)/2$ 。式(12)采用 m 点高斯积分方案计算公式如下:

$$K_{ij} = \frac{1}{2}EL \sum_{k=1}^m \Delta_k I(s_k) B_{i-1,n}(\frac{s_k}{L}) B_{j-1,n}(\frac{s_k}{L}) \quad (16)$$

3.2 雅可比矩阵元素的高斯积分形式

同理,采用 m 点高斯积分,雅可比矩阵 $J_x(q)$ 、 $J_y(q)$ 元素可表示成以下含未知量 q 的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x(q, L)}{\partial q_i} &= -\frac{L}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_i} \cdot \sin \theta(q, s_k) \\ \frac{\partial y(q, L)}{\partial q_i} &= \frac{L}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_i} \cdot \cos \theta(q, s_k) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\theta(q, s_k) = \sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(\frac{s_k}{L}) \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_i} = \frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(\frac{s_k}{L}) \quad (19)$$

以上高斯积分计算方案中,涉及积分点转角的正弦、余弦函数值以及对曲率参数的偏导数值和Bernstein基函数值,均只需计算一次,可重复应用在各式的计算中,从而减少计算量。

3.3 牛顿-拉夫森迭代格式及收敛判据

基于上述的高斯积分方案,平衡方程式(14)成为以曲率参数列阵 q 为未知数的非线性代数方程组。选取一组初值 $q^{(0)}$,可通过牛顿-拉夫森迭代法进行求解。迭代格式为

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} - (\nabla f(q^{(i)}))^{-1} f(q^{(i)}) \quad (20)$$

其中, $f(q^{(i)})$ 是第 i 次迭代时平衡方程组的残值:

$$f(q^{(i)}) = Kq^{(i)} - F_x J_x(q^{(i)}) - F_y J_y(q^{(i)}) - MJ_\theta \quad (21)$$

而 $\nabla f(q^{(i)})$ 是第 i 次迭代时平衡方程组的雅可比矩阵:

$$\nabla f(q^{(i)}) = K - F_x H_x(q^{(i)}) - F_y H_y(q^{(i)}) \quad (22)$$

其中, H_x 、 H_y 是末端位置对曲率参数的海塞矩阵,其元素通过代入迭代过程的 $q^{(i)}$ 按下式计算:

$$\frac{\partial^2 x(q, L)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{L}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_i} \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_j} \cos \theta(q, s_k) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 y(q, L)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{L}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_i} \frac{\partial \theta(q, s_k)}{\partial q_j} \sin \theta(q, s_k) \quad (24)$$

迭代过程可选择相邻迭代步偏差或平衡方程组残差向量的某种范数作为收敛判据。例如,采用以下 ∞ 范数(向量中元素的最大值)作为收敛条件:

$$\left. \begin{aligned} \|q^{(i)} - q^{(i-1)}\|_\infty &= \max_{0 \leq j \leq n} |\Delta q_j| \leq 10^{-6} \\ \|f(q^{(i)})\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n+1} |f_j(q^{(i)})| \leq 10^{-6} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

4 结果后处理

以上曲率参数化模型的求解结果是曲率参数列阵 q ,它具有曲率量纲,通过式(4)即可求得挠曲线上任一弧长处的弯曲曲率,从而快捷高效地进行结果后处理,对大挠度弯曲的变形形态和变形度量进行系统全面的分析。

4.1 挠曲线几何形态分析

由文献[34]可知,对于 n 次Bernstein多项式曲率,以弧长 s 为横坐标、 $k(q, s)$ 为纵坐标绘制曲率曲线,该曲线是一条以

$$P_i = [iL/n \quad q_i]^T \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (26)$$

为控制点的 n 次Bézier曲线。文献[34]亦证明,挠曲线的转角是由曲率参数累积和确定的 $n+1$ 次Bézier曲线,而挠曲线的曲率变化率是由曲率参数差分确定的 $n-1$ 次Bézier曲线。

求得曲率参数列阵 q 后,通过式(7)采用数值积分可绘制大挠度变形的挠曲线,还能够通过Bézier曲线的标准算法快速绘制相应的转角曲线、曲率曲线、曲率变化率曲线。通过曲率曲线的零点可确定挠曲线拐点(弯曲方向改变点、转角极值点)个数和位置。通过曲率变化率曲线的零点可确定曲率极值点个数和位置,从而直观高效地获得变截面欧拉梁大挠度弯曲的变形信息。

4.2 梁弯曲的变形度量分析

除前述挠曲线几何形态分析外,曲率参数化解还能快捷高效地计算梁大挠度弯曲变形度量,生成应力云图和位移云图。根据材料力学知识及式(4),梁长 s 处截面上距中性线 h 处的弯曲应力为

$$\sigma(h, s) = -hE \sum_{i=0}^n q_i B_{i,n}(\frac{s}{L}) \quad (27)$$

由此可方便求得梁上任一点的弯曲应力,生成变截面欧拉梁的弯曲应力云图以及等效应力云图。由式(27)亦可方便求得最大应力及其弧长位置。

根据欧拉梁弯曲的刚性截面假设,梁长 s 处截面上距中性线 h 处的 x, y 方向位移为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(h, s) &= x(q, s) - h \sin(\theta(q, s)) - s \\ \Delta y(h, s) &= y(q, s) + h \cos(\theta(q, s)) - h \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中: $\theta(q, s), x(q, s), y(q, s)$ 分别由式(6)和式(7)计算。

而总位移为

$$d(h, s) = \sqrt{\Delta x(h, s)^2 + \Delta y(h, s)^2} \quad (29)$$

由此可方便求得梁上任一点的位移,从而生成变截面欧拉梁大挠度弯曲的位移云图。

5 算例

5.1 变截面悬臂直梁末端弯矩算例:解析解

根据欧拉梁理论,末端弯矩作用下的悬臂梁弯曲曲率具有精确解析解如下:

$$k(s) = \frac{M}{EI(s)} \quad (30)$$

由此易得弯曲应变能 U 和末端角刚度 K_θ 的精确计算公式:

$$U = \frac{M^2}{2E} \int_0^L I(s)^{-1} ds \quad (31)$$

$$K_\theta = \frac{M}{\theta(L)} = \frac{E}{\int_0^L I(s)^{-1} ds} \quad (32)$$

由于曲率、应变能和末端角刚度具有上述精确解析解,同时挠曲线及其转角亦可通过曲率精确计算,故此类算例常用来检验各类建模方法的有效性和精度。应用本文的建模方法,采用 n 次 Bernstein 多项式曲率,由式(14)和式(15),平衡方程为

$$Kq - M \left[\frac{L}{n+1} \right]_{(n+1) \times 1} = 0_{(n+1) \times 1} \quad (33)$$

由此可直接求得曲率参数的解析解:

$$q = MK^{-1} \left[\frac{L}{n+1} \right]_{(n+1) \times 1} \quad (34)$$

以文献[16]中图3所示厚度抛物线变化的矩形截面悬臂梁为例。梁长 $L=100$ mm,宽度 $b=10$ mm,材料弹性模量 $E=200$ MPa,截面厚度变化规律为

$$h(s) = \frac{4(h_{\max} - h_{\min})}{L^2} s^2 - \frac{4(h_{\max} - h_{\min})}{L} s + h_{\max} \quad (35)$$

式中: $h_{\max}=3$ mm, $h_{\min}=2$ mm。

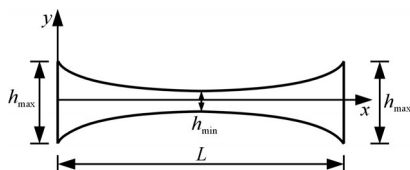


图3 截面厚度抛物线变化悬臂直梁

Fig.3 Straight cantilever beam with parabolic thickness

截面惯性矩为

$$I(s) = bh(s)^3/12 \quad (36)$$

采用三参数模型,即应用二次 Bernstein 多项式曲率。由 Bernstein 基函数的次数和截面惯性矩的次数可知,广义刚度矩阵元素是关于梁弧长的10次多项式积分。因此,按式(16)采用6点高斯积分即可精确计算出广义刚度矩阵:

$$K = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 5.586 & 1.931 & 0.557 \\ 1.931 & 2.227 & 1.931 \\ 0.557 & 1.931 & 5.586 \end{bmatrix}$$

将 $n=2$ 及 K 代入式(34),可得曲率参数与末端弯矩的关系:

$$q = M [158.432 \quad 1221.95 \quad 158.432]^T$$

若采用五参数模型,应用8点高斯积分,可求得曲率参数与末端弯矩的关系:

$$q = M [235.2 \quad 318.2 \quad 1470.9 \quad 318.2 \quad 235.2]^T$$

当末端弯矩 $M=0.04$ N·m 时,三参数模型、五参数模型以及理论精确解的曲率曲线见图4,应变能、末端角刚度见表1。两种曲率参数化模型的应变能和末端角刚度对理论精确解的相对误差亦列于表1,挠曲线转角及位置误差分别如图5和图6所示。

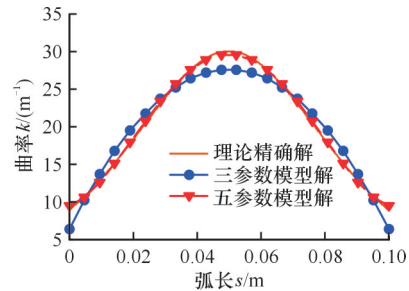


图4 曲率解对比

Fig.4 Comparison of curvature solutions

表1 曲率参数化模型解与理论精确解

Tab.1 The results of curvature model and exact solution

	精确解	3参数模型		5参数模型	
		值	误差/%	值	误差/%
应变能/J	0.041 251	0.041 035	0.52	0.041 245	0.0146
角刚度/(N·m·rad ⁻¹)	0.019 393	0.019 496	0.53	0.019 396	0.0145

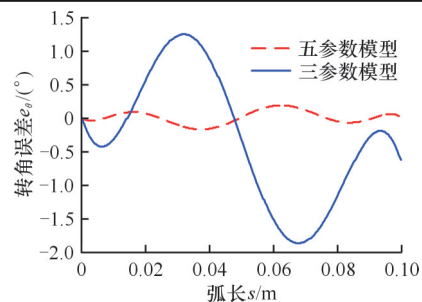


图5 挠曲线转角误差

Fig.5 Angle error of deflection curve

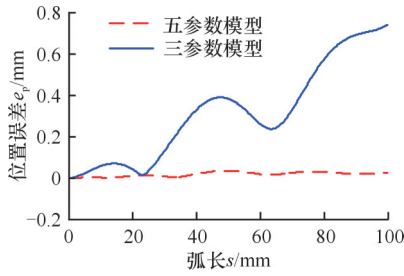


图6 挠曲线位置误差

Fig.6 Position error of deflection curve

由上述结果可知,虽然三参数模型的曲率解与理论精确解在局部上存在较大误差,但从末端角刚度、弯曲应变能、挠曲线及其转角来看,其结果足够精确。而五参数模型基本可以认为已经趋近理论精确解。特别是,对于此类算例,容易证明曲率参数化模型的曲率解和应变能及末端角刚度对理论精确解的相对误差与弯矩大小(即挠度大小)无关,仅与模型维数相关。模型维数增加,相对误差将减小,直至收敛到精确解。

沿梁长 s 和截面厚度 h 方向划分网格确定计算节点,由式(27)和式(29)可方便计算出各节点的弯曲应力和位移,利用 MATLAB 的 fill 函数可生成五参数模型弯曲应力云图(图7)和位移云图(图8)。

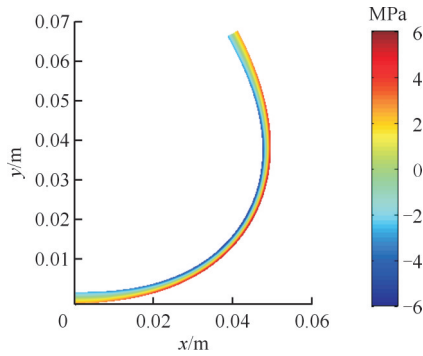


图7 弯曲应力云图

Fig.7 Bending stress nephogram

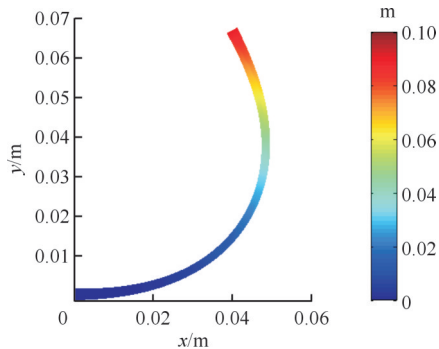


图8 位移云图

Fig.8 Displacement nephogram

5.2 变截面悬臂直梁末端复合载荷算例

对于末端集中力和弯矩复合作用下的大挠度

情形,很难得到封闭形式解,对此类算例一般都需要进行数值求解。为了便于检验本文方法的有效性和精度,采用文献[17]中的相同算例,梁长 $L=0.2\text{ m}$,材料弹性模量 $E=200\text{ GPa}$,根部截面宽度 $b(0)=0.01\text{ m}$,厚度 $h(0)=4\text{ mm}$,截面尺寸沿梁长变化规律为

$$\left. \begin{aligned} h(s) &= h(0)(1-4s) \\ b(s) &= b(0)(1-4s) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

则截面惯性矩沿梁长的变化规律为

$$I(s) = b(0)h(0)^3(1-4s)^4/12 \quad (38)$$

采用7参数曲率模型,广义刚度矩阵是关于梁弧长的16次多项式积分,故应用9点高斯积分即可精确计算。同时采用16点高斯积分计算雅可比矩阵,迭代初值 $q^{(0)}=0$,应用第3节的方法求解如式(14)的平衡方程,可得表2所示两种载荷下挠曲线末端位置和转角及其与文献[17]有限元结果的相对误差,对应的挠曲线及曲率曲线分别见图9和图10。由结果可知,本文的7参数曲率模型与有限元结果非常接近,其误差产生的主要原因是未考虑拉压和剪切变形以及材料泊松比的影响。在一台配置为1.8 GHz英特尔 i7 处理器、16 GB 内存的便携式计算机中求解两种载荷工况的总用时不到1 s,迭代次数均不超过6,连带绘制挠曲线(图9)和曲率曲线(图10),总用时不超过1.2 s。这说明本文的曲率参数化模型在具有高精度的同时还具有较高的计算效率。

表2 两种载荷下的末端位置和转角

Tab.2 Beam tip coordinates and angle under two load cases

	参数类别	载荷1	载荷2
载荷	F_x/N	-45.0	-22.5
	F_y/N	15.0	7.5
	$M(\text{N}\cdot\text{m})$	2	1
有限元 ^[17]	$x(L)/\text{m}$	0.1599	0.1880
	$y(L)/\text{m}$	0.062 59	0.038 11
	$\theta(L)/\text{rad}$	2.5974	1.3492
7参数模型	$x(L)/\text{m}$	0.1597	0.1879
	$y(L)/\text{m}$	0.062 03	0.038 22
	$\theta(L)/\text{rad}$	2.6765	1.3737
相对误差/%	$x(L)/\text{m}$	0.15	0.07
	$y(L)/\text{m}$	0.90	0.28
	$\theta(L)/\text{rad}$	3.05	1.18

5.3 变截面交叉簧片柔性铰链算例

如图11所示的交叉簧片柔性铰链,文献[5]中算例几何参数 $W_1=W_2=H=40\text{ mm}$ 、 $L=56.57\text{ mm}$ 、 $\beta=\pi/4$ 。簧片材料弹性模量 $E=2.1\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.4$ 。该柔性铰链要求转角为

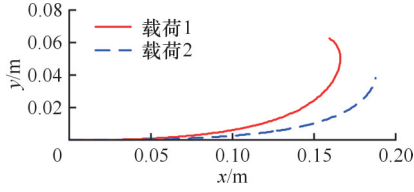


图9 两种载荷下的挠曲线

Fig.9 Deflection curves under two load cases

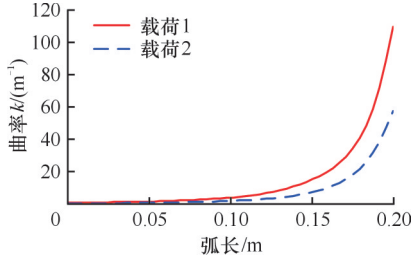


图10 两种载荷下的曲率曲线

Fig.10 Curvature curves under two load cases

1.13 rad时簧片最大应力不超过材料屈服极限。文献[5]采用厚度 $h=2.15$ mm、宽度抛物线变化的矩形截面簧片，首末端最宽 $b_1=14.5$ mm，中点最窄 $b_2=6.5$ mm，宽度沿簧片长度变化规律为

$$b = 0.01s^2 - 0.5659s + 14.5$$

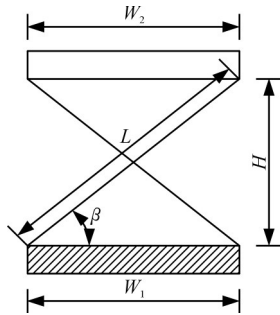


图11 交叉簧片柔性铰链

Fig.11 Geometry of cross-axis flexural pivot

采用本文曲率参数化模型，建立图12所示的簧片1连体系 $O_1x_1y_1$ 和簧片2连体系 $O_2x_2y_2$ 以及全局参考系 OXY 。

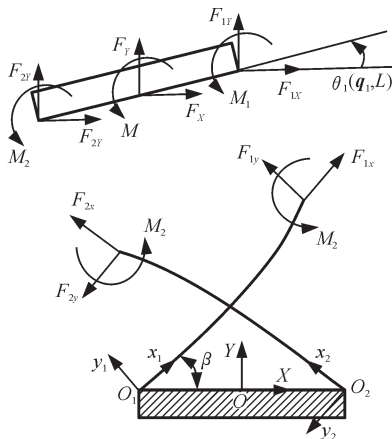


图12 坐标系与构件受力

Fig.12 Coordinates and forces of components

图12中，两簧片末端载荷均在其自身连体系下表示。两簧片的平衡方程按式(14)可写成

$$K_1q_1 - F_{1x}J_{1x}(q_1) - F_{1y}J_{1y}(q_1) - M_1J_{1\theta} = 0 \quad (39)$$

$$K_2q_2 - F_{2x}J_{2x}(q_2) - F_{2y}J_{2y}(q_2) - M_2J_{2\theta} = 0 \quad (40)$$

图12中，输出构件上所受各力均在全局坐标系下表示，其中 F_X, F_Y, M 是已知的外载荷， $F_{1x}, F_{1y}, M_1, F_{2x}, F_{2y}, M_2$ 是簧片1和簧片2对输出构件的反作用力。输出构件平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} F_X + F_{1x} + F_{2x} &= 0 \\ F_Y + F_{1y} + F_{2y} &= 0 \\ M - M_1 + \left(\frac{F_Y}{2} + F_{1y}\right)W_2 \cos(\theta_1(q_1, L)) - \\ &\left(\frac{F_X}{2} + F_{1x}\right)W_2 \sin(\theta_1(q_1, L)) - M_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

上式中，簧片1和簧片2对输出构件的反作用力与其各自连体系下的末端力转换关系如下：

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} \quad (43)$$

簧片1、输出构件、簧片2几何封闭方程分别为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(q_1, L) - \theta_2(q_2, L) &= 0 \\ X_2 + W_2 \cos(\theta_1(q_1, L)) - X_1 &= 0 \\ Y_2 + W_2 \sin(\theta_1(q_1, L)) - Y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

上式中的 X_1, Y_1, X_2, Y_2 是簧片末端位置坐标在全局参考系下的表示，用簧片连体系下的末端坐标表示如下：

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(q_1, L) \\ y_1(q_1, L) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{W_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(q_2, L) \\ y_2(q_2, L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{W_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

以两簧片曲率参数 q_1, q_2 和在各自连体系下表示的末端载荷 $F_{1x}, F_{1y}, M_1, F_{2x}, F_{2y}, M_2$ 为基本未知量，联立簧片平衡方程、输出构件平衡方程、几何封闭方程，当已知外载荷 F_X, F_Y, M 时即可进行求解。

分别采用7、8、9、10参数模型，以输出构件所受力矩为驱动，迭代初值均取为0进行求解，输出构件转角1.13 rad时四种模型的曲率相对误差如图13所示。由此认为10参数曲率模型已有足够精度。

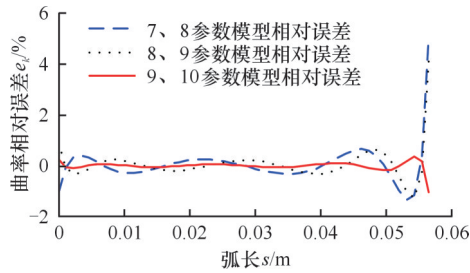


图13 不同维数模型的曲率相对误差

Fig.13 Relative error of curvature of different models

采用10参数模型进行求解,输出构件转角1.13 rad时两簧片曲率曲线见图14,铰链的变形构型如图15所示。

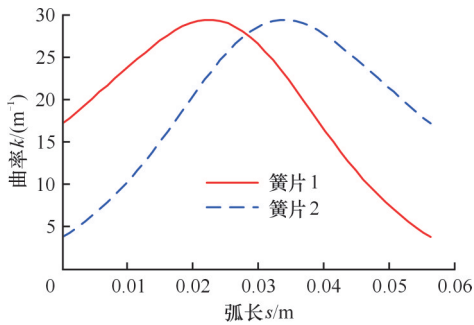


图14 转角1.13 rad时簧片曲率曲线

Fig.14 Curvature curves under 1.13 rad rotation



图15 转角1.13 rad时的铰链构型

Fig.15 Configuration under 1.13 rad rotation

由图14中的曲率曲线可求得最大曲率值,从而计算出1.13 rad转角时簧片最大应力。最大应力、扭转刚度以及与文献[5]有限元结果的相对误差列于表3。0~1.13 rad转角范围的力矩转角曲线见图16。

由以上分析研究结果可以看出,曲率参数化模型结果与有限元结果吻合较好,其误差产生的原因主要是未考虑拉压和剪切变形以及材料泊松比的影响。

表3 10参数曲率模型与有限元结果对比

Tab.3 The results of curvature model and FEM

	扭转刚度/(N·m·rad ⁻¹)	最大应力/MPa
有限元 ^[5]	1.220	63.30
10参数模型	1.248	66.27
相对误差/%	2.28	4.70

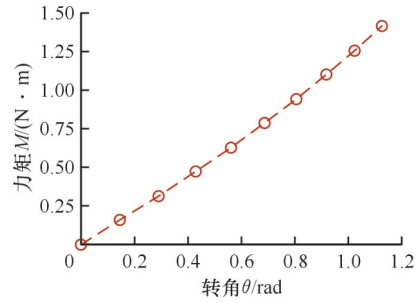


图16 力矩转角关系曲线

Fig.16 Moment-deflection relation

沿梁长s和厚度h方向划分网格确定计算节点,由式(27)可快速计算出各节点的弯曲应力,再附加宽度b方向的显示节点,利用MATLAB的fill3函数可三维显示等效应力云图(图17)。

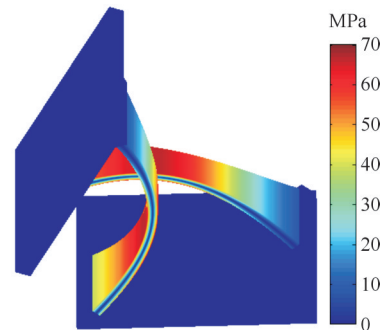


图17 转角1.13 rad时的等效应力云图

Fig.17 Equivalent stress nephogram under 1.13 rad rotation

在与算例2相同的计算环境下,求解9个载荷步的平衡方程并计算出相应的最大应力以及生成图14和图16曲线,总用时不超过1.2 s,每个载荷步的迭代次数均不超过5。附加生成图16的变形构型和图17的等效应力云图,总用时不超过10 s。由此可见,曲率参数化模型在应用于具有多个柔性构件的柔顺机构时亦具有较高的建模精度和计算效率。

6 结论

1)本文提出了一种基于曲率逼近的大挠度变截面欧拉梁参数化建模方法。以Bernstein多项式逼近挠曲线曲率,应变能及应力计算简单且精确,广义刚度矩阵是常值对称方阵,仅需根据截面惯性矩和模型维数计算一次,提高求解效率的同时又能保持计算精度。

2)曲率参数化模型便于体现大挠度下变截面欧拉梁的变形形态和变形度量,同时相应位移解(挠曲线)具有高两阶的光滑性,建模精度、求解效率和后处理效率均有显著提高。

3)采用Bernstein多项式曲率,不同维数模型

的建模和求解算法规范统一,易于编制通用计算代码,为以变截面欧拉梁为柔性构件的大挠度柔顺机构的建模分析和优化设计开辟了一条新的途径。

参考文献:

- [1] HOWELL L L, OLSEN B M, MAGLEBY S P. Handbook of Compliant Mechanisms[M]. Chichester: Wiley, 2013.
- [2] 孙江宏, 易源霖, 赵秋玲, 等. MEMS中变截面梁弯曲数学模型的建立[J]. 中国机械工程, 2014, 25(22): 3061-3065.
SUN Jianghong, YI Yuanlin, ZHAO Qiuling, et al. Mathematical Modeling of Variable Cross-section Beam Bending in MEMS[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(22): 3061-3065.
- [3] MEI F, BI S, CHEN L, et al. A Novel Design of Planar High-compliance Joint in Variable Stiffness Module with Multiple Uniform Stress Leaf Branches on Rigid-flexible Integral Linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 174:104889.
- [4] PATIBALLA S, SHANLEY J F, KRISHNAN G. Estimating Optimized Stress Bounds in Early Stage Design of Compliant Mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2017, 139(6):062302-1.
- [5] BILANCIA P, BAGGETTA M, BERSELLI G, et al. Design of a Bio-inspired Contact-aided Compliant Wrist [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2021, 67:102028.
- [6] LIU M, DOMINO L, VELLA D. Tapered Elasticæ as a Route for Axisymmetric Morphing Structures[J]. Soft Matter, 2020;16(33):7739-7750.
- [7] FREIRE G J, BOOKER J D, MELLOR P H. 2D Shape Optimization of Leaf-type Crossed Flexure Pivot Springs for Minimum Stress[J]. Precision Engineering, 2015, 42:6-21.
- [8] BILANCIA P, BERSELLI G, PALLI G. Virtual and Physical Prototyping of a Beam-based Variable Stiffness Actuator for Safe Human-machine Interaction[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2020, 65:101886.
- [9] KUMAR D, WANG Z, POH L H, et al. Isogeometric Shape Optimization of Smoothed Petal Auxetics with Prescribed Nonlinear Deformation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 356:16-43.
- [10] BERSELLI G. Design and Testing of a Monolithic Compliant Constant Force Mechanism [J]. Smart Materials & Structures, 2020, 29(4):044001.
- [11] PLAUT R, VIRGIN L. Optimal Design of Cantilevered Elastica for Minimum Tip Deflection under Self-weight[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2022, 43(5):657-664.
- [12] ABDALLA H M A, CASAGRANDE D. Optimal Area Variation for Maximum Stiffness Isostatic Beams under Parametric Linear Distributed Loads [J]. Mechanics Research Communications, 2021, 111:103659.
- [13] BILANCIA P, BAGGETTA M, HAO G, et al. A Variable Section Beams Based Bi-BCM Formulation for the Kinetostatic Analysis of Cross-axis Flexural Pivots[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021,1:106587.
- [14] YANG M, DU Z, SUN L, et al. Optimal Design, Modeling and Control of a Long Stroke 3-PRR Compliant Parallel Manipulator with Variable Thickness Flexure Pivots [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2019, 60(12):23-33.
- [15] 刘姣姣, 付莉莉, 高超, 等. 变截面多稳态梁结构减振吸能分析与优化设计[J]. 计算力学学报, 2023, 40(2):159-165.
LIU Jiaojiao, FU Lili, GAO Chao, et al. Impact Energy Absorption Analysis and Design Optimization of Variable Cross-section Beam Multi-stable Structures [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2023, 40(2):159-165.
- [16] VALENTINI P P, CIRELLI M, PENNASTRI E. Second-order Approximation Pseudo-rigid Model of Flexure Hinge with Parabolic Variable Thickness [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 136: 178-189.
- [17] WU K, ZHENG G. A Comprehensive Static Modeling Methodology via Beam Theory for Compliant Mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 169:104598.
- [18] DADO M, AL-SADDER S. A New Technique for Large Deflection Analysis of Non-prismatic Cantilever Beams [J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32(6):692-703.
- [19] JEONG S, YOO H H. Shape Optimization of Bowtie-shaped Auxetic Structures Using Beam Theory [J]. Composite Structures, 2019, 224: 111020.
- [20] AL-SADDER S, AL-RAWI R A O. Finite Difference Scheme for Large-deflection Analysis of Non-prismatic Cantilever Beams Subjected to Different Types of Continuous and Discontinuous Loadings [J]. Archive of Applied Mechanics, 2006, 75(8): 459-473.
- [21] HUANG T, YUAN Y, ZHENG J L, et al. Large

- Deformations of Tapered Beam with Finite Integration Method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, 107:115-123.
- [22] HURTADO M A, OCHOA J. D A. Large-deflection Analysis of Prismatic and Tapered Beam-columns Using the Differential Transform Method [J]. *Structures*, 2020, 28:923-932.
- [23] 夏雨, 葛仁余, 王静平, 等. 变截面 Euler-Bernoulli 梁稳态谐振动的微分求积法研究[J]. *安徽工程大学学报*, 2021, 36(4):56-63.
- XIA Yu, GE Renyu, WANG Jingping, et al. Differential Quadrature Method for Steady-state Harmonic Vibration of Beams with Variable Cross-section[J]. *Journal of Anhui Polytechnic University*, 2021, 36(4):56-63.
- [24] KIMIAEIFAR A, LUND E, THOMSEN O T. Series Solution for Large Deflections of a Cantilever Beam with Variable Flexural Rigidity [J]. *Meccanica*, 2012, 47:1787-1796.
- [25] KATSIKADELIS J T, TSIATAS G. Large Deflection Analysis of Beams with Variable Stiffness [J]. *Acta Mechanica*, 2003, 164:1-13.
- [26] YANG M, DU Z, DONG W, et al. Design and Modeling of a Variable Thickness Flexure Pivot[J]. *Journal of Mechanisms & Robotics*, 2019, 11:014502.
- [27] 赵春璋, 余海东, 王皓, 等. 基于绝对节点坐标法的变截面梁动力学建模与运动变形分析[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(17):38-45.
- ZHAO Chunzhan, YU Haidong, WANG Hao, et al. Dynamic Modeling and Kinematic Behavior of Variable Cross-section Beam Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(17):38-45.
- [28] AWTAR S, SEN S. A Generalized Constraint Model for Two-dimensional Beam Flexures; Nonlinear Load-displacement Formulation [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2010, 132(8):081008.
- [29] GAO F, LIU G Y, WU X Y, et al. Optimization Algorithm-based Approach for Modeling Large Deflection of Cantilever Beam Subject to Tip Load[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 167:104522.
- [30] GAO F, LIAO W H, WU X. Being Gradually Softened Approach for Solving Large Deflection of Cantilever Beam Subjected to Distributed and Tip Loads [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 174:104879.
- [31] LAN C C, CHENG Y J. Distributed Shape Optimization of Compliant Mechanisms Using Intrinsic Functions[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(7):3-11.
- [32] 杨森, 杜志江, 陈依, 等. 变截面交叉簧片柔性铰链的力学建模与变形特性分析[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(13):73-78.
- YANG Miao, DU Zhijiang, CHEN Yi, et al. Static Modelling and Analysis of Cross-spring Flexure Pivots with Variable Cross-section[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(13):73-78.
- [33] 谢丹, 黄勇刚. 大挠度欧拉梁三参数曲率模型及其在平面柔顺机构中的应用[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(13):144-152.
- XIE Dan, HUANG Yonggang. Novel Model with Three Curvature Variables for Euler Beam under Large Deflection and Its Application in Planar Compliant Mechanisms[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(13):144-152.
- [34] 黄勇刚, 谢丹. 平面柔顺机构大挠度弹性静力学分析的低维参数化曲率模型[J]. *中国科学:技术科学*, 2022, 52:565-584.
- HUANG Yonggang, XIE Dan. Curvature-based Low Dimensional Parametric Model for Elastostatics Analysis of Planar Compliant Mechanisms under Large Deflection [J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2022, 52:565-584.
- [35] FAROUKI R T. The Bernstein Polynomial Basis: a Centennial Retrospective [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2012, 29(6):379-419.

(编辑 陈勇)

作者简介:黄勇刚,男,1976年生,副教授、博士。研究方向为机构学与机器人及机械系统CAE。E-mail:hyg@ctbu.edu.cn。
谢丹(通信作者),女,1987年生,讲师、博士。研究方向为计算力学、刚柔耦合多体系统理论及应用。E-mail:d anxie2017@swu.edu.cn。

本文引用格式:

黄勇刚,谢丹. 大挠度变截面欧拉梁曲率参数化模型[J]. *中国机械工程*, 2025, 36(8):1757-1766.

HUANG Yonggang, XIE Dan. Curvature Parameterization Model for Variable Cross-section Euler Beams under Large Deflection [J]. *China Mechanical Engineering*, 2025, 36(8):1757-1766.