

并联机构多重拓扑降耦的优化原理与一般方法

李 菊 郭 跃 沈惠平* 孟庆梅 顾晓阳

常州大学现代机构学研究中心,常州,213164

摘要:现有的并联机构型综合方法都仅以基本功能(DOF、POC)为设计目标,综合出的并联机构的耦合度一般较高($k \geq 2$),致使其运动学正解求解及其后续研究(运动学、动平衡及动力学分析等)较复杂,影响了并联机构在制造业中的应用。提出了以降低机构耦合度为目标的并联机构多重拓扑降耦优化原理与方法。首先以6-DOF三平移三转动6-6R无约束并联机构(耦合度 $k=4$)为例,详细阐述并联机构多重拓扑降耦优化方法及其应用,并依次逐渐优化得到耦合度 $k=3,2,1,0$ 的6-DOF 3T3R无约束并联机构;然后阐述了典型6-DOF Stewart-Gough平台并联机构的多重拓扑降耦优化过程,并得到相应的拓扑优化构型,便于进行这些机构的运动学/动力学建模与性能求解与分析。研究结果为其他多回路复杂并联机构的拓扑降耦优化提供了启示和方向。

关键词:并联机构;拓扑;耦合度;降耦优化

中图分类号:TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.08.006

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Optimization Principle and General Method for Multiple Topology Decoupling of Parallel Mechanisms

LI Ju GUO Yue SHEN Huiping* MENG Qinmei GU Xiaoyang

Research Center for Advanced Mechanisms Theory, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu, 213164

Abstract: The existing synthesis methods for PMs only focused on basic functions (DOF, POC). The coupling degree (k) of the synthesized PMs was of generally high ($k \geq 2$), which made the calculation of forward kinematic solutions and subsequent research (kinematics, dynamic balance, and dynamic analysis) more complex. All these issues affected the applications of PMs in the manufacturing industries. The principle and method of multiple topology decoupling optimization for PMs was proposed with the goal of reducing the coupling degree of PMs. Taking the 6-DOF three-translation-three-rotation (3T3R) 6-6R unconstrained PM ($k=4$) as an example, this paper elaborated on the method of multiple topology decoupling optimization of PMs and the applications, and gradually optimized the 6-DOF 3T3R unconstrained PM with coupling degrees $k=3, 2, 1$ and 0 . The multiple topology decoupling optimization processes of a typical 6-DOF Stewart-Gough platform PM were also elaborated, and the corresponding topology optimization configurations were obtained, which facilitated the kinematic/dynamic modeling and performance analysis of these PMs. It provides inspiration and direction for the topology decoupling optimization of other multi-loop complex PMs.

Key words: parallel mechanism (PM); topology; coupling degree; decoupling optimization

1 现有并联机构型综合方法

目前,已有并联机构型综合(或拓扑设计)的原创性理论或方法主要有螺旋理论^[1-2]、位移子群理论^[3-4]、方位特征理论^[5-7]、线性变换理论^[8],杨廷力^[9]、LI等^[10]对这四种方法的基本思想、框架及其数学方法作了详细的比较研究。除此之外,还有虚拟链法^[11]、广义函数(generalized function, GF)法^[12]等实用方法,它们都仅以基本功能,如自由度

(degree of freedom, DOF)、方位特征(position and orientation characteristic, POC)为设计目标,综合出的机构大多数由简单支链(运动副和构件的串联连接,其中,平行四边形可等效视为一个移动副)组成,其耦合度一般较高($k \geq 2$)^[13],如图1所示(A框),致使运动学正解求解(代数法或数值法)都较为复杂^[14],导致后续研究(如基于正解的工作空间、误差、动平衡及动力学分析)计算较复杂^[15],从而影响了并联机构在制造业中的应用。

在保持已有机构基本功能(POC、DOF)不变的情况下,如何将一个耦合度较大的并联机构(parallel mechanism, PM)“优化”为几个耦合度

收稿日期:2024-07-18

基金项目:国家自然科学基金(52375007);常州智能制造龙城实验项目(CJ20242061)

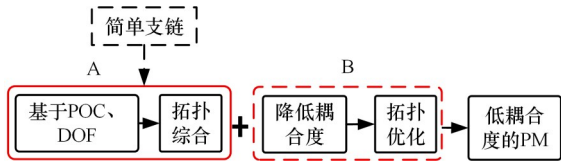


图1 并联机构的拓扑综合及其拓扑降耦优化

Fig.1 Topological synthesis and topological decoupling optimization of parallel mechanisms

较小甚至为零的子并联机构(Sub-PM)或子运动链(SK),从而使机构的运动学/动力学分析求解方便,是并联机构拓扑学研究的重要内容和方向之一^[13]。一方面,拓扑降耦可直接降低机构运动学、动力学建模与性能求解的难度,还可使机构的综合性能得到改善;另一方面,就某些机构而言,可使机构驱动副分布于几个SK或回路内,并可能使这些SK或回路具有位置自确定性,从而可能使机构具有输入-输出运动解耦,这不仅有利于运动学、动力学建模,还有利于轨迹规划和运动控制^[13,16]。为此,笔者所在团队曾于2015年提出机构拓扑降耦的概念^[13,17],它是指在保持已有机构基本功能(DOF、POC)不变的前提下,降低机构的耦合度(图1中B框),即将其耦合度较大($k \geq 2$)的SK“优化”为若干个低耦合度($k=0, 1$)的SK,从而使机构运动学/动力学建模与性能求解更容易^[13-14]。但是提出的拓扑降耦方法仅适用于动平台上具有平行轴线转动副或具有球副的一类并联机构,且当时认识到只有一次拓扑降耦^[13,17],这大大限制了拓扑降耦原理和方法的应用范围,而且拓扑降耦的优势没有得到最大程度的发挥。为进一步拓展机构拓扑降耦原理和方法,本文提出多重拓扑降耦优化原理和一般方法,使之能应用于一般的多回路平面和空间并联机构。

2 基于POC方程的并联机构拓扑设计理论

2.1 串、并联机构的POC方程

串、并联机构的POC方程^[8-9]分别为

$$M_{bi} = \bigcup_{j=1}^m M_{Ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中: M_{Ji} 为第*i*个运动副 J_i 的POC集; M_{bi} 为第*i*条支链 b_i 末端的POC集; M_{Pa} 为机构动平台 P_a 的POC集。

2.2 基于SOC单元的机构组成原理

由式(2)可知,含独立回路数 v 的并联机构由1、2条支链(b_1, b_2)以及动、静平台的一部分构成第1个独立回路(第1子并联机构);第3条支链 b_3

与第1子并联机构构成第2个回路(第2子并联机构)……;第 $j+1$ 条支链 $b_{(j+1)}$ 与前第 $j-1$ 个子并联机构构成第*j*个等效回路(第*j*子并联机构)……;直到第 n_b ($n_b = v + 1$)条支链,与前第 $v-1$ 个子并联机构构成最后的第 v 个子并联机构,即并联机构本身,该机构组成原理可记为

$$PM[F, v] = \sum_{j=1}^{v+1} SOC_j = \sum Sub - PM \quad (3)$$

由于上述形成的每个回路可视为一等效支链,而等效支链与新增的支链构成下一个回路,故这些回路可称为等效回路(E-Loop);因新的等效回路仍为等效支链,也可视为由新的等效支链和新增支链构成的一个两支链子并联机构。综上,从等效回路或子并联机构单元的角度来阐述机构的组成,比用单开链SOC单元的角度来阐述机构组成更容易精准地理解。

2.3 自由度(DOF)计算及驱动副的选定原则

机构自由度是指确定该机构(回路)位置所需的独立变量数目^[18]。文献[5-7]给出了适用于一般过约束机构和无过约束机构的非瞬时自由度公式:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (4)$$

$$\xi_{Lj} = \dim \cdot \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{bi}) \cup M_{b(i+1)} \} \quad (5)$$

式中: F, F_j 为分别为机构、第*j*个回路的新增自由度; v 为独立回路数($v = m - n + 1, n$ 为构件数; m 为机构总运动副数); f_j 为第*j*个回路中新添加上去的支链(首次参与计算)的每个运动副自由度(不含局部自由度); ξ_j 为第*j*个回路的独立位移方程数; $\dim \cdot \{ \}$ 为方位特征集的维数; $\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ 为前*j*条支链组成的子并联机构POC集; $M_{b(i+1)}$ 为前*j+1*条支链末端构件的POC集。

式(4)是按式(3)所述的由简单支链组成的典型机构提出的,自由度计算的路径往往是“串联”的,但对于含两条及以上混合支链(HSOC)的复杂并联机构,自由度计算的“路径”长,且计算过程复杂。为此,本文提出基于最短回路(shortest loop, S-Loop)的自由度计算公式。S-Loop指机构中回路自由度为最小的回路,有以下两种情况:①回路独立位移方程数相同时回路运动副自由度总数最少;②运动副自由度总数相同时回路独立位移方程数最大。因回路自由度总数最小,其回路“长度”一般为最短,故称为“最短”回路。

基于S-Loop的一般过约束机构和无过约束机构的非瞬时自由度公式为^[19]

$$F = \sum_{i=1}^v F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_j + \dots + F_v \quad (6)$$

$$F_j = \sum f_j - \xi_j \quad (7)$$

式(6)、式(7)的物理意义如下:①机构自由度 F 等于组成该机构各回路的新增自由度 F_j 之代数和(式(6));而各回路的新增自由度 F_j 等于回路中新添加上去的支链所包含运动副的自由度总数减去该回路的独立位移方程数(式(7));回路的独立位移方程数由式(5)计算;②自由度计算与回路的选取无关,但按最短回路的系列集来计算自由度是最方便、简单的。

驱动副的选定原则:自由度计算后,按形成回路的单开链的最小约束度(零或 Δ_{\min})的原则,在回路中分配并取机架上的运动副为驱动副,使其位置具有确定性。

一旦按驱动副的选定原则确定机构的驱动副后,即可对并联机构划分为一系列子运动链(SK),并进行其耦合度 k 的计算等工作。

2.4 子运动链(SK)及其耦合度 k 的计算

2.4.1 约束度

由式(3)的机构组成原理可知,任一机构可分解为一系列有序单开链 SOC,第 j 个 SOC 的约束度^[5-7]定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (8)$$

式中: m_j 为第 j 个 SOC 的运动副数; I_j 为第 j 个 SOC 的驱动副数。

并证明总有 $\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$ 。

比较式(7)、式(8)易知,单开链约束度的简易计算式为

$$\Delta_j = F_j - I_j \quad (9)$$

2.4.2 子运动链(SK)及其划分准则

对于每个具有最小约束度值 Δ_{\min} 的 SOC 组成的 v 个有序 SOC,满足约束度之和等于零的最小区间(可含有驱动副)定义为子运动链(sub-kinematics chain, SK)^[5-7],即一个 SK 仅含一个零自由度、不可再拆分、独立回路数为 v 的基本运动链(basic kinematics chain, BKC)^[14](包括平面 BKC^[18]、空间 BKC^[14]两种)。而 SK 或 BKC 的耦合度定义为

$$k = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (10)$$

其中, $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$ 表明 SK 分解为 v 个 SOC(Δ_j),可有多种分配方案,取 $\sum |\Delta_j|$ 为最小者。

2.5 机构拓扑解析表达式

独立回路数为 v 的并联机构可视为由一系列的 SK 以串、并联(或混联)方式连接而成,因为 SK 单元是机构运动学、动力学分析的基本单元,基于 SK 的任意机构拓扑解析表达式^[14]记为

$$\begin{aligned} & {}^{aTbR} PM^k [F(f_1, f_2, \dots, f_v), v(m_1, m_2, \dots, m_v)] = \\ & \sum_{j=1}^v SOC_j(\Delta_j, \xi_j) = \\ & \sum_{j=1}^v p_k {}^{aTb'R} SKC^k [F', v'(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_v; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)] = \\ & F - J_{in} + \sum_{j=1}^v p_k BKC^k(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_v; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,上式第1个等号左边表达式表示自由度为 F (每个回路的自由度数分别为 f_1, f_2, \dots, f_v 。当机构仅含1个回路时可省略)、回路数为 v (每个回路的运动副数分别为 m_1, m_2, \dots, m_v)、耦合度为 k 、动平台能产生 $aTbR$ ($a \leq 3, b \leq 3$) 输出运动的并联机构(PM); $F - J_{in}$ 为 F 个驱动副(joint of input); p_k 为耦合度为 k 的 SKC/BKC 的数目; ${}^{aTb'R} SKC^k [F', v'(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_v; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)]$ 表示子运动链(SK)具有 F' 个 DOF、 v' 个回路且回路拓扑结构特性为 $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_v; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)$ 、耦合度为 k 、能产生 $a'Tb'R$ 的输出运动 ($a' \leq 3, b' \leq 3$),为简便书写,常将之简写为 ${}^{aTb'R} SKC^k(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_v; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)$ 。

3 并联机构的多重拓扑降耦优化原理和一般方法

3.1 拓扑降耦的一般原理

所谓机构的拓扑降耦是指在保持已有机构基本功能(POC、DOF)不变的前提下,将其耦合度 k 值较大的 SK“优化”为若干个耦合度 k 值较小、甚至为零的 SK。

由耦合度计算式(10)可知,子运动链(SK)耦合度 k 值的大小取决于它包含的组成第1条回路的单开链的约束度值 Δ 。因此,要减小 SK 的耦合度 k 值,至少须先减小其第1条回路的约束度值。

由约束度计算式(8),要减小约束度 Δ 值,可采用以下三种拓扑降耦原理:①在 ξ, I 值不变的前提下应减少回路中的运动副自由度总数 $\sum f_j$,即减少回路中的运动副数;②在 $\sum f_j, \xi$ 值不变的前提下应增大回路中的主动副数目 I_j ,即增加回路中

的驱动支链数;③在 Σf_j 、 I 值不变的前提下可增加回路中的独立位移方程数目 ξ_j 。

进一步,对于拓扑降耦原理情况③,由式(5)可知,若要增加回路的独立位移方程数目 ξ_j ,则需要改变支链 b_i 的拓扑结构;而一旦改变支链 b_i 的拓扑结构,由式(1)、式(2)知,则会改变方位特征POC的性质(POC的类型及其数目),与拓扑降耦的前提之一(POC不变)相违背。因此,本文不讨论情况③。

对于拓扑降耦原理的情况②,可采用基于被动方位特征支链主动化的拓扑降耦优化方法^[13],即将被动方位特征支链中的被动副变为驱动副,同时去除一条无约束驱动支链。这一原理和方法仅适合于少数含有被动特征支链的并联机构,详见文献[13]。

3.2 多重拓扑降耦优化原理与方法

拓扑降耦原理的情况①最易实现,且具有普遍性,因此,本文主要讨论基于拓扑降耦原理①的多重拓扑降耦优化原理与方法,具体步骤如下:

1)对于给定的并联机构,先进行拓扑分析,计算出其所含的SKC及其耦合度 $k(k \geq 1)$,对于 $k \geq 1$ 的并联机构则有拓扑降耦的可能,此时,已有各回路具体的约束度值。

2)选取第1支链,将其邻近的作为第2支链的末端运动副移至第1支链的某个构件上,并使两者形成的第1回路的约束度值比原来的第1回路的约束度值少1;而第1支链上余留的运动副则和第3支链构成第2回路,其约束度值也会发生变化,其他支链不变。这样,可使其回路所在的SKC的耦合度减1,最终使其机构的耦合度减1。

3)仿照步骤2)进行多次优化,直至将机构的耦合度降低为所期望的耦合度值(最理想的情况是各SKC的耦合度值均为零)。

4 举例

本节以6-DOF 6-6R机构($k=4$)、6-DOF Stewart-Gough平台($k=3$)两个复杂并联机构的多重拓扑降耦优化过程为例,阐述并联机构多重拓扑降耦的优化过程与一般方法。

4.1 6-DOF 6-6R并联机构的多重(四次)拓扑降耦优化

4.1.1 原始机构——动平台为六边形的6-DOF 6-6R并联机构($k=4$)

图2所示的6-DOF无约束并联机构由6条简单支链并联地连接于六边形的静、动平台之间构

成,每条支链由6个任意轴线转动副串联而成^[6],即 $R_{i1}-R_{i2}-R_{i3}-R_{i4}-R_{i5}-R_{i6}$ (i 取1~6),简称6R支链,因此,机构简称6-6R并联机构。

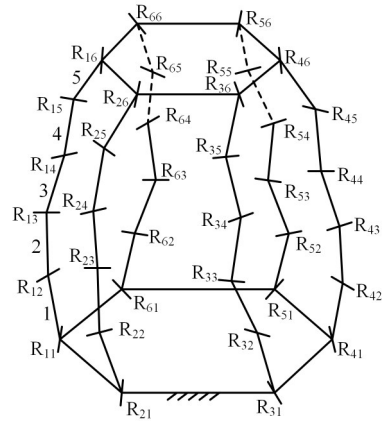


图2 6-6R机构($k=4$)

Fig.2 6-6R mechanism ($k=4$)

目前,该机构的耦合度最大($k=4$),其正向运动学问题求解极其复杂,故其研究报道较少。但由于其每个回路的独立位移方程数均为 $\xi_j=6$ (j 取1~5),也无需每次计算 ξ_j ,故它是一个理解并联机构多重拓扑降耦优化方法及其子并联机构组成、DOF计算公式、子运动链拓扑解析的最合适的例子,具体分析如下。

由式(1)知,每条支链末端的POC集为三平移三转动(3T3R)。由式(2)知,机构动平台的POC集也为三平移三转动(3T3R)。

4.1.1.1 各回路的形成

显然,该机构有5个独立回路,具体如下:

1)第1子并联机构(Loop₁)由第1、2支链构成,即 Loop₁: $R_{11}-R_{12}-R_{13}-R_{14}-R_{15}-R_{16}-R_{26}-R_{25}-R_{24}-R_{23}-R_{22}-R_{21}$ 。

2)第2子并联机构(Loop₂)由上述第1子并联机构和第3支链构成,简记为 Loop₂: $R_{36}-R_{35}-R_{34}-R_{33}-R_{32}-R_{31}$ 。

3)第3子并联机构(Loop₃)由上述第2子并联机构和第4支链构成,简记为 Loop₃: $R_{46}-R_{45}-R_{44}-R_{43}-R_{42}-R_{41}$ 。

4)第4子并联机构(Loop₄)由上述第3子并联机构和第5支链构成,简记为 Loop₄: $R_{56}-R_{55}-R_{54}-R_{53}-R_{52}-R_{51}$ 。

5)第5子并联机构(Loop₅)由上述第4子并联机构与第6支链构成,简记为 Loop₅: $R_{66}-R_{65}-R_{64}-R_{63}-R_{62}-R_{61}$,它是最后一个子并联机构,即为并联机构本身。

4.1.1.2 各回路的自由度

因上述5个回路的独立位移方程数均为 $\xi_j=$

6(j 为1~5),它们各自的自由度由式(7)分别计算为

$$F_1=(6+6)-6=6 \quad F_2=6-6=0$$

$$F_3=6-6=0 \quad F_4=6-6=0 \quad F_5=6-6=0$$

机构自由度由式(6)计算为

$$F=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=6+0+0+0+0=6$$

因此,当取静平台0上转动副 R_{i1} (i 取1~6)为驱动副时,机构动平台可实现三平移三转动(3T3R)的输出运动。

4.1.1.3 耦合度 k 的计算

形成上述5个回路的单开链约束度由式(9)分别计算为

$$\Delta_1=F_1-I_1=6-2=4 \quad \Delta_2=F_2-I_2=0-1=-1$$

$$\Delta_3=F_3-I_3=0-1=-1 \quad \Delta_4=F_4-I_4=0-1=-1$$

$$\Delta_5=F_5-I_5=0-1=-1$$

根据2.4节的子运动链划分准则,上述5个回路构成一个子运动链(SK_C),即SK_C(4,-1,-1,-1,-1;6,6,6,6,6),其耦合度由式(10)求得:

$$k=\frac{1}{2} \min \sum |\Delta_j|=\frac{1}{2}(4+|-1|+|-1|+|-1|+|-1|+|-1|)=4$$

根据式(11),该机构的拓扑结构解析可表示为

$${}^{3T3R}PM^4[6(6,0,0,0,0),5(12,6,6,6,6)]=$$

$$1-{}^{3T3R}SKC^4(4,-1,-1,-1,-1;6,6,6,6,6)=$$

$$6-J_{in}+1-BKC^4(4,-1,-1,-1,-1;6,6,6,6,6) \quad (12)$$

4.1.2 一次拓扑降耦:动平台为五边形的6-DOF(HSOC²)+4R并联机构($k=3$)

在图2所示6-DOF 6-6R并联机构的基础上,选定第1支链为 $R_{11}-R_{12}-R_{13}-R_{14}-R_{15}-R_{16}$,将第2支链上的末端转动副 R_{26} 从动平台上移走,而将之连接在第1支链的构件5上,其余不变,得到图3所示的机构。此时,该机构由1条含有1个回路的混合支链和4条简单支链构成,因混合支链中的1个回路由两条支链构成,故混合支链记为HSOC²。因此,该机构记为(HSOC²)+4R并联机构。

4.1.2.1 各回路的形成

1)第1子并联机构(Loop₁)由第1支链上的一部分($R_{11}-R_{12}-R_{13}-R_{14}-R_{15}$)与第2支链构成,即Loop₁: $R_{11}-R_{12}-R_{13}-R_{14}-R_{15}-R_{26}-R_{25}-R_{24}-R_{23}-R_{22}-R_{21}$ 。

2)第2子并联机构(Loop₂)由第1子并联机构、第1支链上剩余的一个转动副 R_{16} 以及第3支链三者构成,简记为Loop₂: $R_{16}-R_{36}-R_{35}-R_{34}-R_{33}-R_{32}-R_{31}$ 。

3)第3子并联机构(Loop₃)由第2子并联机构与第4支链构成,简记为Loop₃: $R_{46}-R_{45}-R_{44}-R_{43}-$

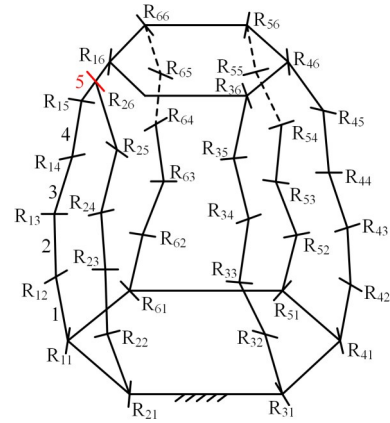


图3 一次降耦:(HSOC²)+4R机构($k=3$)
Fig.3 Primary decoupling:(HSOC²)+4R mechanism ($k=3$)

$R_{42}-R_{41}$ 。

4)第4子并联机构(Loop₄)由第3子并联机构与第5支链构成,简记为Loop₄: $R_{56}-R_{55}-R_{54}-R_{53}-R_{52}-R_{51}$ 。

5)第5子并联机构(Loop₅)由第4子并联机构与第5支链构成,简记为Loop₅: $R_{66}-R_{65}-R_{64}-R_{63}-R_{62}-R_{61}$,它是最后一个子并联机构,即并联机构本身。

4.1.2.2 各回路的自由度

易知,上述5个回路的独立位移方程数 $\xi_j=6$ (j 取1~5),于是,它们的自由度由式(7)分别计算为

$$F_1=(5+6)-6=5 \quad F_2=(1+6)-6=1$$

$$F_3=6-6=0 \quad F_4=6-6=0 \quad F_5=6-6=0$$

因此,机构自由度由式(6)计算为

$$F=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=5+1+0+0+0=6$$

同上,取静平台0上转动副 R_{i1} (i 取1~6)为驱动副,机构可实现三平移三转动(3T3R)的输出运动。

4.1.2.3 耦合度 k 的计算

形成上述5个回路的约束度由式(9)分别计算为

$$\Delta_1=F_1-I_1=5-2=3 \quad \Delta_2=F_2-I_2=1-1=0$$

$$\Delta_3=F_3-I_3=0-1=-1 \quad \Delta_4=F_4-I_4=0-1=-1$$

$$\Delta_5=F_5-I_5=0-1=-1$$

根据2.4节的子运动链划分准则,上述5个回路构成一个子运动链(SK_C),即SK_C(3,0,-1,-1,-1;6,6,6,6,6),其耦合度由式(10)求得:

$$k=\frac{1}{2} \min \sum |\Delta_j|=\frac{1}{2}(3+0+|-1|+|-1|+|-1|)=3$$

根据式(11),该机构的拓扑结构解析可表示为

$${}^{3T3R}PM^3[6(5,1,0,0,0),5(11,7,6,6,6)]=$$

$$1 - {}^{3T3R}SKC^3(3,0,-1,-1,-1;6,6,6,6,6,6) = 6 - J_{in} + 1 - BKC^3(3,0,-1,-1,-1;6,6,6,6,6,6) \quad (13)$$

由式(12)、式(13)可知:

1) 机构耦合度 k 从 4 降至 3, 减少了 1, 即进行了 1 次拓扑降耦优化。

2) 第 1~5 回路的自由度数分别从 (6, 0, 0, 0, 0) 变化至 (5, 1, 0, 0, 0), 而运动副自由度数分别从 (12, 6, 6, 6, 6) 变化至 (11, 7, 6, 6, 6), 其约束度值从 (4, -1, -1, -1, -1) 变化至 (3, 0, -1, -1, -1)。进一步, 第 1 回路的运动副自由度数从 12 降至 11, 其约束度值从 4 降至 3; 第 2 回路的运动副自由度数从 6 增至 7, 其约束度值从 -1 提高至 0, 从而变为无约束回路; 而其他三条支链的运动副数目没有发生变化; 从而导致 SKC 的性质 (耦合度 k 、各回路的约束度 Δ 值) 发生了变化, 但 SKC 的数目没有发生变化 (仍为 1 个)。

4.1.3 二次拓扑降耦: 动平台为四边形的 6-DOF (HSOC³) + 3R 并联机构 ($k=2$)

如图 4 所示, 仍选定前述的第 1 支链, 将第 2 支链上的末端转动副 R_{26} 从动平台上移走, 而将之连接在第 1 支链的构件 4 上; 同时, 将其他任意一条支链, 如邻近第 1 支链的第 6 支链上的末端转动副 R_{66} 从动平台上移走, 而将之连接在第 1 支链的构件 5 上, 其余不变。此时, 并联机构由 1 条含有 2 个回路的混合支链和 3 条简单支链构成, 因混合支链中的 2 个回路由三条支链构成, 故混合支链记为 HSOC³。因此, 该机构记为 (HSOC³) + 3R 并联机构。

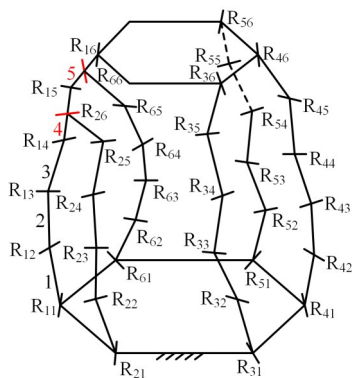


图 4 二次降耦: (HSOC³) + 3R 机构 ($k=2$)

Fig.4 Secondary decoupling: (HSOC³) + 3R mechanism ($k=2$)

4.1.3.1 各回路的形成

1) 第 1 子并联机构 (Loop₁) 由第 1 支链上的一部分 (R_{11} - R_{12} - R_{13} - R_{14}) 与第 2 支链构成, 即 Loop₁: R_{11} - R_{12} - R_{13} - R_{14} - R_{26} - R_{25} - R_{24} - R_{23} - R_{22} - R_{21} 。

2) 第 2 子并联机构 (Loop₂) 由上述第 1 子并联机

构、第 1 支链上剩余的转动副 R_{15} 与第 6 支链三者构成, 简记为 Loop₂: R_{15} - R_{66} - R_{65} - R_{64} - R_{63} - R_{62} - R_{61} 。

3) 第 3 子并联机构 (Loop₃) 由上述第 2 子并联机构、第 1 支链上剩余的最后第一个转动副 R_{16} 与其余任意 1 条支链 (如第 3 支链) 构成, 简记为 Loop₃: R_{16} - R_{36} - R_{35} - R_{34} - R_{33} - R_{32} - R_{31} 。

4) 第 4 子并联机构 (Loop₄) 由上述第 3 子并联机构与其余的任意一条支链, 如第 4 支链构成, 简记为 Loop₄: R_{46} - R_{45} - R_{44} - R_{43} - R_{42} - R_{41} 。

5) 第 5 子并联机构 (Loop₅) 由上述第 4 子并联机构与余下的最后 1 条即第 5 支链构成, 简记为 Loop₅: R_{56} - R_{55} - R_{54} - R_{53} - R_{52} - R_{51} , 它是最后一个子并联机构, 即并联机构本身。

4.1.3.2 各回路的自由度

易知, 上述 5 个回路的独立位移方程数 $\xi_j=6$ (j 取 1~5), 于是, 它们的自由度由式(7)分别计算为

$$\begin{aligned} F_1 &= (4+6) - 6 = 4 & F_2 &= (1+6) - 6 = 1 \\ F_3 &= (1+6) - 6 = 1 & F_4 &= 6 - 6 = 0 \\ F_5 &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

因此, 机构自由度由式(6)计算为

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 4 + 1 + 1 + 0 + 0 = 6$$

4.1.3.3 耦合度 k 的计算

形成上述 5 个回路的约束度由式(9)分别计算为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 - I_1 = 4 - 2 = 2 & \Delta_2 &= F_2 - I_2 = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_3 &= F_3 - I_3 = 1 - 1 = 0 & \Delta_4 &= F_4 - I_4 = 0 - 1 = -1 \\ \Delta_5 &= F_5 - I_5 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

根据 2.4 节的子运动链划分准则, 上述 5 个回路构成一个子运动链 (SKC), 为 SKC (2, 0, 0, -1, -1; 6, 6, 6, 6, 6), 其耦合度由式(10)求得:

$$k = \frac{1}{2} \min \sum |\Delta_j| = \frac{1}{2} (2 + 0 + 0 + |-1| + |-1|) = 2$$

根据式(11), 该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^2[6(4,1,1,0,0), 5(10,7,7,6,6)] = \\ & 1 - {}^{3T3R}SKC^2(2,0,0,-1,-1;6,6,6,6,6) = \\ & 6 - J_{in} + 1 - BKC^2(2,0,0,-1,-1;6,6,6,6,6) \quad (14) \end{aligned}$$

由式(13)、式(14)可知:

1) 机构耦合度 k 从 3 降至 2, 又减少 1, 即进行了第 2 次拓扑降耦优化。

2) 第 1~5 回路的自由度数分别从 (5, 1, 0, 0, 0) 变化至 (4, 1, 1, 0, 0), 而运动副自由度数分别从 (11, 7, 6, 6, 6) 变化至 (10, 7, 7, 6, 6), 其约束度值从 (3, 0, -1, -1, -1) 变化至 (2, 0, 0, -1, -1); 进一步, 第 1 回路的运动副自由度数从 11 降至 10, 其约束度值从 3 降至 2; 第 2 回路的运动副自

由度数不变(仍为7),其约束度值也没有变化(为0),仍为无约束回路,但第3回路也已变为零约束度的无约束回路;其他两条支链的性质没有发生变化;从而导致SKC的性质(耦合度 k 、各回路的约束度 Δ 值)发生了变化,但SKC的数目没有发生变化(仍为1个)。

4.1.4 三次拓扑降耦:动平台为三角形的6-DOF (HSOC⁴)+2R 并联机构($k=1$)

如图5所示,仍选定前述的第1支链,将第2支链上的末端转动副 R_{26} 从动平台上移走,而将之连接在第1支链的构件3上;同时,将其他任意一条支链,如邻近第2支链的第3支链上的末端转动副 R_{36} 从动平台上移走,而将之连接在第1支链的构件4上;再将其他任意一条支链,如邻近第1支链的第6支链上的末端转动副 R_{66} 从动平台上移走,而将之连接在第1支链的构件5上,其余不变。此时,并联机构由1条含有3个回路的混合支链和2条简单支链构成,因混合支链中的3个回路由四条支链构成,故混合支链记为HSOC⁴。因此,该机构记为(HSOC⁴)+2R 并联机构。

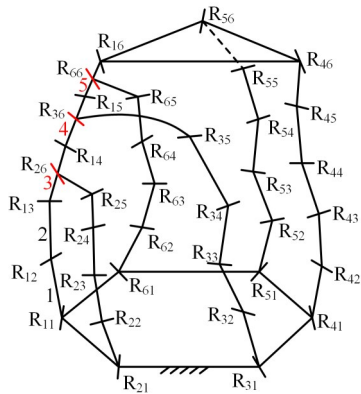


图5 三次降耦:(HSOC⁴)+2R 并联机构($k=1$)
Fig.5 Tertiary decoupling: (HSOC⁴)+2R parallel mechanism($k=1$)

4.1.4.1 各回路的形成

1)第1子并联机构(Loop₁)由第1支链上的一部分(R_{11} - R_{12} - R_{13})与第2支链构成,即Loop₁: R_{11} - R_{12} - R_{13} - R_{26} - R_{25} - R_{24} - R_{23} - R_{22} - R_{21} 。

2)第2子并联机构(Loop₂)由上述第1子并联机构、第1支链上剩余的转动副 R_{14} 与第3支链三者构成,简记为Loop₂: R_{14} - R_{36} - R_{35} - R_{34} - R_{33} - R_{32} - R_{31} 。

3)第3子并联机构(Loop₃)由上述第2子并联机构、第1支链上剩余的转动副 R_{15} 与第6支链三者构成,简记为Loop₃: R_{15} - R_{66} - R_{65} - R_{64} - R_{63} - R_{62} - R_{61} 。

4)第4子并联机构(Loop₄)由上述第3子并联机构、第1支链上剩余的最后一个转动副 R_{16} 与其

余的任意支链,如第4支链三者构成,简记为Loop₄: R_{16} - R_{46} - R_{45} - R_{44} - R_{43} - R_{42} - R_{41} 。

5)第5子并联机构(Loop₅)由上述第4子并联机构和最后一条即第5支链构成,简记为Loop₅: R_{56} - R_{55} - R_{54} - R_{53} - R_{52} - R_{51} ,它是最后一个子并联机构,即为并联机构本身。

4.1.4.2 各回路的自由度

易知,上述5个回路的独立位移方程数 $\xi_j=6$ (j 取1~5),它们各自新增的自由度由式(7)分别计算为

$$\begin{aligned} F_1 &= (3+6) - 6 = 3 & F_2 &= (1+6) - 6 = 1 \\ F_3 &= (1+6) - 6 = 1 & F_4 &= (1+6) - 6 = 1 \\ F_5 &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

因此,机构自由度由式(6)计算为

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 3 + 1 + 1 + 1 + 0 = 6$$

4.1.4.3 耦合度 k 的计算

上述5个回路的约束度由式(9)分别计算为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 - I_1 = 3 - 2 = 1 & \Delta_2 &= F_2 - I_2 = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_3 &= F_3 - I_3 = 1 - 1 = 0 & \Delta_4 &= F_4 - I_4 = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_5 &= F_5 - I_5 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

根据2.4节的子运动链划分准则,上述5个回路构成一个子运动链(SKC),为SKC(1,0,0,0,-1;6,6,6,6,6),其耦合度由式(10)求得:

$$k = \frac{1}{2} \min \sum |\Delta_j| = \frac{1}{2} (1 + 0 + 0 + 0 + |-1|) = 1$$

根据式(11),该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^4[6(3,1,1,1,0),5(9,7,7,7,6)] = \\ & 1 - {}^{3T3R}SKC^1(1,0,-0,0,-1;6,6,6,6,6) = \\ & 6 - J_{in} + 1 - BKC^1(1,0,-0,0,-1;6,6,6,6,6) \end{aligned} \quad (15)$$

由式(14)、式(15)可知:

1)机构耦合度 k 从2降至1,又减少了1,即进行了第3次拓扑降耦优化。

2)第1~5回路的自由度数分别从(4,1,1,0,0)变化至(3,1,1,1,0),而运动副自由度数分别从(10,7,7,6,6)变化至(9,7,7,7,6),其约束度值从(2,0,0,-1,-1)变化至(1,0,0,0,-1)。进一步,第1回路的运动副自由度数从10降至9,其约束度值从2降至1,第2、3、4回路的约束度值均为零约束度的无约束回路,最后一条支链的性质没有发生变化,从而导致SKC的性质(耦合度 k 、各回路的约束度 Δ 值)发生了变化,但SKC的数目没有发生变化(仍为1)。

4.1.5 四次拓扑降耦:动平台为二副杆的6-DOF (HSOC³)+(HSOC³) 并联机构($k=0$)

如图6所示,在原6-6R 并联机构的左侧选定第1支链为 R_{11} - R_{12} - R_{13} - R_{14} - R_{15} - R_{16} ,将第2支链上

的末端转动副 R_{26} 从动平台上移走, 而将之连接在第 1 支链的构件 2 上。同时, 将其他任意一条支链, 如邻近第 1 支链的第 6 支链上的末端转动副 R_{66} 从动平台上移走, 而将之连接在第 1 支链的构件 3 上。

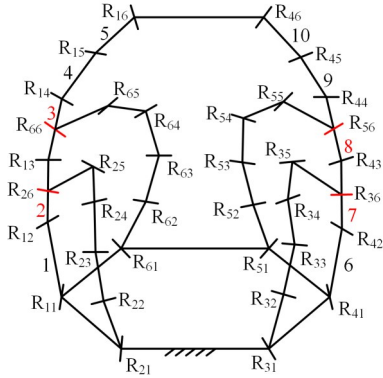


图 6 四次降耦: $(\text{HSOC}^3)+(\text{HSOC}^3)$ 并联机构 ($k=0$)
 Fig.6 Quaternary decoupling: $(\text{HSOC}^3)+(\text{HSOC}^3)$ parallel mechanism ($k=0$)

同时, 在原 6-6R 并联机构的右侧选定第 4 支链为 $R_{41}-R_{42}-R_{43}-R_{44}-R_{45}-R_{46}$, 将邻近第 4 支链的第 3 支链上的末端转动副 R_{36} 从动平台上移走, 而将之连接在第 4 支链的构件 7 上。同时, 将其他任意一条支链, 如邻近第 4 支链的第 5 支链上的末端转动副 R_{56} 从动平台上移走, 而将之连接在第 4 支链的构件 8 上。

这样, 原 6-6R 并联机构演化为由左右两侧各含 2 个回路的两条混合支链组成的两支链并联机构。此时, 动平台变为二副杆 (2 个转动副为 R_{16} 、 R_{56}), 因每条混合支链中的 2 个回路由 3 条支链构成, 故混合支链记为 HSOC^3 。因此, 该机构记为 $(\text{HSOC}^3)+(\text{HSOC}^3)$ 并联机构。

4.1.5.1 各回路的形成

此时, 机构的左侧包含第 1、2 子并联机构, 而机构的右侧包含第 3、4 子并联机构, 具体如下:

1) 第 1 子并联机构 (Loop_1) 由左侧的第 1 支链上的一部分 ($R_{11}-R_{12}$) 与第 2 支链构成, 即 $\text{Loop}_1: R_{11}-R_{12}-R_{26}-R_{25}-R_{24}-R_{23}-R_{22}-R_{21}$ 。

2) 第 2 子并联机构 (Loop_2) 由上述左侧第 1 子并联机构、第 1 支链上剩余的转动副 R_{13} 与邻近第 1 支链的第 6 支链三者构成, 简记为 $\text{Loop}_2: R_{13}-R_{66}-R_{65}-R_{64}-R_{63}-R_{62}-R_{61}$ 。

3) 第 3 子并联机构 (Loop_3) 由右侧的第 4 支链上的一部分 ($R_{41}-R_{42}$) 与第 3 支链两者构成, 简记为 $\text{Loop}_3: R_{41}-R_{42}-R_{36}-R_{35}-R_{34}-R_{33}-R_{32}-R_{31}$ 。

4) 第 4 子并联机构 (Loop_4) 由上述右侧第 3 子并联机构、第 4 支链上剩余的转动副 R_{43} 与邻近第

4 支链的第 5 支链三者构成, 简记为 $\text{Loop}_4: R_{43}-R_{56}-R_{55}-R_{54}-R_{53}-R_{52}-R_{51}$ 。

5) 第 5 子并联机构 (Loop_5) 由第 1 支链上的余留子链 $R_{14}R_{15}R_{16}$ 与第 4 支链上的余留子链 $R_{46}R_{45}R_{44}$ 以及第 2、4 子并联机构四者构成, 简记为 $\text{Loop}_5: R_{14}-R_{15}-R_{16}-R_{46}-R_{45}-R_{44}$, 它是最后一个子并联机构, 即并联机构本身。

4.1.5.2 各回路的自由度

易知, 上述 5 个回路的独立位移方程数 $\xi_j=6$ (j 取 1~5), 它们各自新增的自由度由式 (7) 分别计算为

$$\begin{aligned} F_1 &= (2+6) - 6 = 2 & F_2 &= (1+6) - 6 = 1 \\ F_3 &= (2+6) - 6 = 2 & F_4 &= (1+6) - 6 = 1 \\ F_5 &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

因此, 机构自由度由式 (6) 计算为

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 2 + 1 + 2 + 1 + 0 = 6$$

4.1.5.3 耦合度 k 的计算

上述 5 个回路的约束度由式 (9) 分别计算为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 - I_1 = 2 - 2 = 0 & \Delta_2 &= F_2 - I_2 = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_3 &= F_3 - I_3 = 2 - 2 = 0 & \Delta_4 &= F_4 - I_4 = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_5 &= F_5 - I_5 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

根据 2.4 节的子运动链划分准则, 上述 5 个回路分别各自构成 1 个子运动链, 即 $\text{SKC}_1(0;6) \sim \text{SKC}_5(0;6)$, 因此, 它们的耦合度由式 (10) 分别计算为

$$k_j = \frac{1}{2} \min \sum |\Delta_j| = 0 \quad (j = 1 \sim 5)$$

根据式 (11), 该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3\text{TR}}\text{PM}^q[6(2, 1, 2, 1, 0), 5(8, 7, 8, 7, 6)] = \\ & 5 - {}^{3\text{TR}}\text{SKC}^0(0;6) = 6 - J_m + 5 - \text{BKC}^0(0;6) \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (15)、式 (16) 可知:

1) 机构耦合度 k 从 1 又降至 0 (为最小值), 即进行了第 4 次拓扑降耦。至此, 拓扑降耦优化完成。

2) 第 1~5 回路的自由度数分别从 (3, 1, 1, 1, 0) 变化至 (2, 1, 2, 1, 0), 而运动副自由度数分别从 (9, 7, 7, 7, 6) 变化至 (8, 7, 8, 7, 6), 其约束度值从 (1, 0, 0, 0, -1) 变化至 (0, 0, 0, 0, 0), 从而导致 SKC 的性质、数目均发生了变化, 即从一个“大”的 1 约束度的 SKC “优化” 为 5 个零约束度的 SKC。

至此, 不难发现:

1) 式 (12)~式 (16) 较清晰、全面地表述了一个机构的拓扑特性随拓扑降耦过程而变化的过程; 每一步都可视为一次拓扑降耦优化; 经过 4 次拓扑降耦优化后, 原始的 6-DOF 6-6R 机构达到

了最优构型6-DOF 6-2R机构。

2)在拓扑降耦过程中,各回路的自由度和运动副数目发生了变化,导致约束度值发生了变化,从而导致SKC的性质、数目也发生了变化。最后,从一个耦合度较大($k=4$)、“外形较大”的SKC优化为耦合度最小($k=0$)、“外形较小”的5个SKC。

3)实际拓扑降耦优化设计时,根据动平台承载、刚度需求(取不同的动平台所需的受力点)而取相应的拓扑降耦优化构型,即6-6R机构($k=4$)、(HSOC²)+4R机构($k=3$)、(HSOC³)+3R机构($k=2$)、(HSOC⁴)+2R机构($k=1$)、(HSOC³)+(HSOC³)机构($k=0$)。

4.2 典型6-DOF Stewart-Gough平台的多重(五次)拓扑降耦优化及其衍生机型

4.2.1 原始机构——6-DOF Gough-Stewart机构($k=3$)

典型的6-DOF Gough-Stewart机构为全对称性机构,它由动、静平台以及6条S-P-S的简单支链组成,动、静平台上的球副均可空间任意布置,如图7a所示,记为6-6型(6-6两个数字分别代表静、动平台的边数或球铰接点),为目前具有实用价值的、拓扑结构复杂的6-DOF SPS并联机构^[15]。

显然,图7a所示原始机构的每条支链均为S_{*i*}P_{*i*}S_{*i+6*}(i 取1~6),其末端构件的POC以及动平台的POC集均为三平动三转动,同时,该机构有5个独立回路,其独立位移方程数均为 $\xi_i=6$ (i 取1~5)。

4.2.1.1 回路形成及其自由度(DOF)的计算

1)因该并联机构完全对称,第1回路可由任意两条支链组成,例:S₁-P₁-S₇和S₂-P₂-S₈,故可简记为Loop₁{S₁-P₁-S₇-S₈-P₂-S₂},该回路的自由度由式(7)计算为

$$F_1 = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_1 = (7+7-1-1-1-1) - 6 = 10 - 6 = 4$$

注: F_1 的计算式中,4个“-1”分别指应扣除第1回路中分别绕(S₁S₂)、(S₇S₈)连线的局部转动自由度(记为R₁₂⁰、R₇₈⁰,但这两者应计入第2回路中)以及分别绕(S₁S₇)与(S₂S₈)连线的局部转动自由度。

2)第2回路(第2子并联机构)由上述第1个子并联机构、分别绕(S₁S₂)、(S₇S₈)连线的局部转动自由度R₁₂⁰、R₇₈⁰以及第3支链S₃-P₃-S₉四部分组成,简记为Loop₂{R₁₂⁰-R₇₈⁰-S₃-P₃-S₉},其自由度由式(7)计算为

$$F_2 = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_2 = (2+7-1) - 6 = 2$$

注: F_2 的计算式中的“-1”是指应扣除第2回路中绕S₃S₉连线的局部转动自由度。

3)第3回路(第3子并联机构)由上述第2个子并联机构、支链S₄-P₄-S₁₀两部分组成,简记为Loop₃{S₄-P₄-S₁₀},因此,其自由度由式(7)计算为

$$F_3 = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_3 = (6+1-1) - 6 = 0$$

注: F_3 的计算式中的“-1”是指应扣除第3回路中绕S₄S₁₀连线的局部转动自由度。

4)第4回路(第4子并联机构)由上述第3个子并联机构、支链S₅-P₅-S₁₁两部分组成,简记为Loop₄{S₅-P₅-S₁₁},显然,其自由度由式(7)计算为

$$F_4 = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_4 = (6+1-1) - 6 = 0$$

注: F_4 的计算式中的“-1”是指应扣除第4回路中绕S₅S₁₁连线的局部转动自由度。

5)第5回路(第5子并联机构)由上述第4个子并联机构、支链S₆-P₆-S₁₂两部分组成,简记为Loop₅{S₆-P₆-S₁₂},因此,其自由度由式(7)计算为

$$F_5 = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_5 = (6+1-1) - 6 = 0$$

注: F_5 的计算式中的“-1”是指应扣除第5回路中绕S₆S₁₂连线的局部转动自由度。

因此,并联机构的DOF由式(6)计算为

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_5 = 4 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 6$$

当取6条支链中的移动副P_{*i*}(i 取1~6)为驱动副时,该机构动平台可实现3T3R的独立输出运动。

4.2.1.2 耦合度 k 的计算

上述6个回路的约束度由式(9)分别计算为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 - I_1 = 4 - 2 = 2 & \Delta_2 &= F_2 - I_2 = 2 - 1 = 1 \\ \Delta_3 &= F_3 - I_3 = 0 - 1 = -1 & \Delta_4 &= F_4 - I_4 = 0 - 1 = -1 \\ \Delta_5 &= F_5 - I_5 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

由2.4节SKC划分准则知,这5个回路构成一个SKC,其耦合度值由式(10)计算为

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (2 + 1 + |-1| + |-1| + |-1|) = 3$$

由式(11)知,该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R} \text{PM}^3 [6(4, 2, 0, 0, 0, 0), 5(10, 8, 6, 6, 6)] = \\ & {}^{3T3R} \text{SKC}^3 (2, 1, -1, -1, -1; 6, 6, 6, 6, 6) = \\ & 6 - J_m + \text{BKC}^3 (2, 1, -1, -1, -1; 6, 6, 6, 6, 6) \quad (17) \end{aligned}$$

上述分析表明:该机构耦合度 $k=3$,所以机构5个回路之间具有很强的耦合性;机构6个驱动副(P₁~P₆)均布置于一个SKC内,所以机构无输入-输出运动解耦性,且为强耦合。这些问题使得该机构的正向运动学求解、奇异性、工作空间、动力

学分析等问题非常复杂,国内外学者对此进行了研究^[14-16,20-25]。本文从机构拓扑特征之一的耦合度 k 的角度对 6-DOF SPS 机构进行改进研究。

4.2.2 五次拓扑降耦 (k 分别为 2, 1, 1, 1, 0)

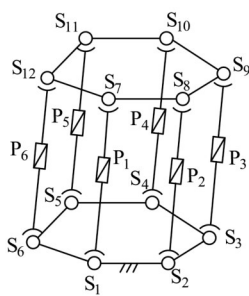
1)如图 7b 所示,将 S_1 - P_1 - S_7 上的球副 S_7 “连接”到 S_2 - P_2 - S_8 支链的活塞杆上,为方便起见,将 S_7 、 S_8 合并于动平台上,形成一个二重球副,即用 1 条二重混合支链替换 2 条 SPS 型支链,此时,动平台为五边形,静平台仍为六边形,简称为 6-5 型 2-1-1-1-1 式 6-SPS (注:2 表示二重球副 HSOC,1 表示简单支链 SOC,以下 3 表示三重球副 HSOC)。

经机构拓扑分析,该机构耦合度为 2^[16],该机构的拓扑结构解析可表示为

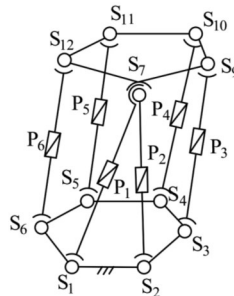
$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^2[6(4,2,0,0,0), 5(10,8,6,6,6)] = \\ & {}^{2T1R}SKC^0(0;6) + {}^{3T3R}SKC^2(2,0,-1,-1;6,6,6,6,6) = \\ & 6 - J_m + BKC^0(0;6) + BKC^2(2,0,-1,-1;6,6,6,6,6) \end{aligned} \quad (18)$$

2)在图 7b 的基础上再用 1 条二重混合支链替代 2 条 SPS 支链,如图 7c 所示,此时,动平台变为四边形,即得到 6-4 型 2-2-1-1 式 6-SPS。经机构拓扑分析,该机构耦合度为 1^[16],该机构的拓扑结构解析可表示为

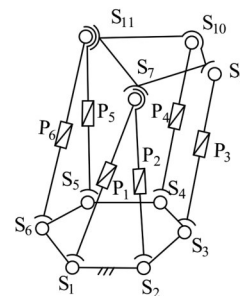
$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^2[6(2,2,2,0,0), 5(8,8,8,6,6)] = \\ & 2 - {}^{2T1R}SKC^0(0;6) + {}^{3T3R}SKC^2(1,0,-1,-1;6,6,6,6) = \end{aligned}$$



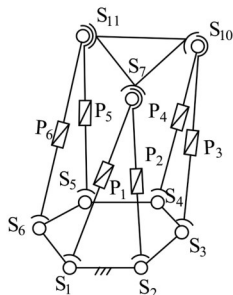
(a)6-6 型原机构 ($k=3$)



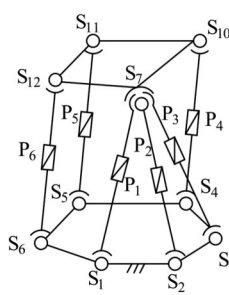
(b)2-1-1-1-1 ($k=2$)



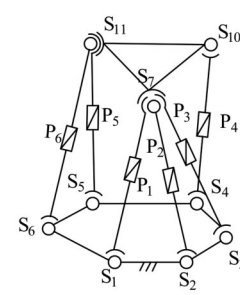
(c)2-2-1-1 ($k=1$)



(d)2-2-2 ($k=1$)



(e)3-1-1-1 ($k=1$)



(f)3-2-1 ($k=0$)

图 7 典型 6-DOF Stewart-Gough 机构及其拓扑降耦优化

Fig.7 Typical 6-DOF Stewart-Gough mechanism and its topological decoupling optimization

这样,通过对原始机构不断地进行多重拓扑降耦优化,得到图 7b~图 7f 所示的 5 个“简化型”衍生机构。进一步分析这些机构可以发现:

$$6 - J_m + BKC^0(0;6) + BKC^2(1,0,-1;6,6,6) \quad (19)$$

3)在图 7c 的基础上再用 1 条二重混合支链替代 2 条 SPS 支链,如图 7d 所示,此时,动平台变为三角形,即得到 6-3 型 2-2-2 式 6-SPS。经机构拓扑分析,该机构耦合度为 1^[16],该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^1[6(2,2,2,1,-1), 5(8,8,8,7,5)] = \\ & 3 - {}^{2T1R}SKC^0(0;6) + {}^{3T3R}SKC^1(1,-1;6,6,6) = \\ & 6 - J_m + 3 - BKC^0(0;6) + BKC^1(1,-1;6,6,6) \end{aligned} \quad (20)$$

4)如图 7e 所示,将 3 条 SPS 支链在动平台上的球副 S_7 、 S_8 、 S_{10} 合并,即用 1 条三重混合支链替换 3 条 SPS 支链,而其他三条支链不变,此时动平台为四边形,即得到 6-4 型 3-1-1-1 式 6-SPS。经机构拓扑分析,机构耦合度为 1^[16],该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^2[6(2,1,2,0,1), 5(8,7,8,6,7)] = \\ & {}^{2T}SKC^0(0;6) + {}^{3T3R}SKC^1(1,0,-1;6,6,6) = \\ & 6 - J_m + 2 - BKC^0(0;6) + BKC^1(1,0,-1;6,6,6) \end{aligned} \quad (21)$$

5)在图 7e 的基础上再用 1 条二重混合支链替代 2 条 SPS 支链,如图 7f 所示,此时,动平台为三角形,得到 6-3 型 3-2-1 式 6-SPS。经机构拓扑分析,机构耦合度为 0^[16],该机构的拓扑结构解析可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{3T3R}PM^0[6(2,2,2,1,-1), 5(8,8,8,7,5)] = \\ & 5 - {}^{2T1R}SKC^0(0;6) = 6 - J_m + 5 - BKC^0(0;6) \end{aligned} \quad (22)$$

1)这些衍生机构的自由度 $DOF(F=6)$ 、POC 集(3T3R)都没有变化,但它们各回路的自由度/约束度发生了变化,使得 SKC 的耦合度 k 都发生了较

大的变化,耦合度 k 从3开始降至2、1、0。

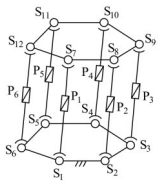
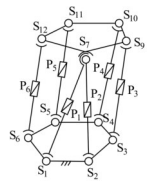
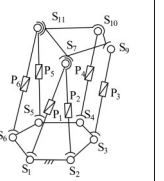
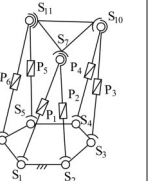
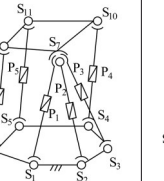
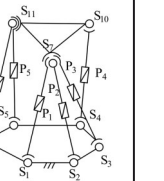
2)机构的位置正解形式(符号解、封闭解、数值解)与耦合度值的高低之间存在相应的关系,具体如下:图7f所示 $k=0$ 的6-3型3-2-1式6-SPS机构可直接求出符号式位置正解;而对于 $k=3, 2, 1$ 的其他5个机构(图7a~图7e),可用代数法求得位置正解的封闭解,或用数值法(如 k 维搜索法)求得数值解^[14]。

3)含有三重混合支链的6-4型3-1-1-1式6-SPS机构(图7e, $k=1$)和6-3型3-2-1式6-SPS机构(图7f, $k=0$)具有输入-输出部分运动解耦性,这表明机构的多重拓扑降耦优化不仅降低了耦合度,而且使部分机构具有运动解耦性,这是多重拓扑降耦的一个显著优点。

为清晰起见,将上述6种6-SPS三平移三转动并联机构的耦合度 k 等特性列于表1。

表1 基于多重拓扑降耦的6-SPS并联机构的衍生机构及其耦合度 k

Tab.1 Derivative mechanisms of 6-SPS parallel mechanism via topological decoupling and coupling degrees k

	6-6型	6-5型 2-1-1-1-1式	6-4型 2-2-1-1式	6-4型 2-2-2式	6-4型 3-1-1-1式	6-3型 3-2-1式
机构简图						
k	3	2	1	1	1	0
解耦性	无运动解耦性				位置-姿态分离:有运动解耦性	

根据上述拓扑降耦方法,又对其他并联机构进行了多重拓扑降耦优化^[24-27],使之POC、DOF不变而拓扑学、运动学以及动力学性能求解方便,详见文献^[25-26]。

需要注意的是:并非所有拓扑降耦优化机构在加工安装方面都比原机构更具有优势,如二/三重球副的出现增加了制造、加工难度。为避免这一缺陷,笔者提出了“二/三重球副的易制造结构”,即将两/三个球分开一段较短的距离,并布置在同一线性驱动器的活塞杆上,这样机构耦合度仍为零,可求得符号式位置正解,但在设计、加工制造上仍属于单个球副,详见文献^[28-29]。其他有关并联机构拓扑结构优化的分析详见文献^[30-31]。

5 结论

本文提出了基于基本功能(POC、DOF)不变但可降低机构耦合度的多重拓扑降耦优化原理与方法,其基本思想如下:每次拓扑降耦应使各回路的自由度、运动副数目发生变化,使约束度值变小,从而导致SKC的性质、数目也发生变化;最后,从一个耦合度较大、“外形较大”的SKC优化为耦合度最小($k=0$)、“外形较小”的多个SKC。给出了6-DOF 6-6R无约束并联机构的多重(4次)、典型6-DOF Stewart-Gough平台的多重(5次)拓扑降耦优化过程,并分别得到其降耦优化机型。

多重拓扑降耦优化方法的优点如下:①能降低机构耦合度 k ,便于求解其位置正解的解析解(封闭解或符号解);②对于部分机构,可同时实现拓扑降耦和运动解耦,使其运动控制算法设计更容易;③对于支链数不小于3的机构,根据需要可进行多重拓扑降耦优化,可使机构的运动学、动力学分析求解等更容易,适用于复杂多回路平面与空间并联机构的拓扑结构优化。

参考文献:

- [1] FRISOLI A, CHECCACCI D, SALSEDO F, et al. Synthesis by Screw Algebra of Translating In-parallel Actuated Mechanisms[M]//Advances in Robot Kinematics. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000: 433-440.
- [2] HUANG Zhen, LI Qinchuan, DING Huafeng. Theory of Parallel Mechanisms [M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
- [3] HERVÉ J M. Design of Parallel Manipulators via the Displacement Group [C] //Proc. of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Milan, 1995: 2079-2082.
- [4] LI Qinchuan, HUANG Zhen, HERVE J M. Type Synthesis of 3R2T 5-DOF Parallel Mechanisms Using the Lie Group of Displacements[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 173-180.
- [5] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械

- 工业出版社, 2004.
- YANG Tingli. Topology Structure Design of Robot Mechanisms [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [6] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and Application of Robot Mechanism Topology[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [7] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology Design of Robot Mechanisms[M]. Singapore: Springer Nature Singapore, 2018.
- [8] GOGU G. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 1: Methodology [M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2008.
- [9] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构拓扑学理论的基本思想与数学方法——从方法论角度回顾几种原创性理论与方法[J]. 机械工程学报, 2020, 56(3): 1-15.
- YANG Tingli, SHEN Huiping, LIU Anxin, et al. Basic Ideas and Mathematical Methods of Mechanism Topology Theory—Review of Several Original Mechanism Topology Theories in a Methodological Perspective[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(3): 1-15.
- [10] LI Ju, WU Guanglei, SHEN Huiping, et al. Topology of Robotic Mechanisms: Framework and Mathematics Methods - in Conjunction with a Review of Four Original Theories[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 175: 104895.
- [11] KONG Xianwen, GOSSELIN C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms[M]. Heidelberg: Springer, 2007.
- [12] 高峰, 杨加伦, 葛巧德. 并联机器人型综合的GF集理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- GAO Feng, YANG Jialun, GE Qiaode. GF set theory of parallel robot type synthesis [M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [13] 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102-113.
- SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and Design Method for Structure Coupling-reducing of Parallel Mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102-113.
- [14] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- SHEN Huiping. Topological Characteristics-based Kinematics for Robotic Mechanisms [M]. Beijing: Higher Education Press, 2021.
- [15] (伊朗)塔吉拉德 Taghirad, Hamid D. 并联机器人: 机构学与控制[M]. 刘山, 译. 北京: 机械工业出版社, 2018.
- TAGHIRAD HAMID D. Parallel Robots: Mechanics and Control [M]. LIU Shan, Trans. Beijing: China Machine Press, 2018.
- [16] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
- SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on Forward Position Solutions for 6-SPS Parallel Mechanisms Based on Topology Structure Analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70-80.
- [17] SHEN H P, YANG L J, MENG Q M, et al. Topological Structure Coupling-reducing of Parallel Mechanisms[C]//Proceedings of the 14th IFToMM World Congress. Taipei, 2015: 348-357.
- [18] 杨廷力. 机械系统基本理论结构学·运动学·动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- YANG Tingli. Basic Theory of Mechanical System [M]. Beijing: China Machine Press, 1996.
- [19] 沈惠平, 李菊, 朱小蓉, 等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报, 2024, 60(19): 40-52.
- SHEN Huiping, LI Ju, ZHU Xiaorong, et al. New Method and Formula for Degree-of-freedom Calculation of Parallel Mechanism Based on Optimal Paths [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(19): 40-52.
- [20] SELIG J M. Geometrical Methods in Robotics[M]. New York: Springer New York, 1996.
- [21] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- HUANG Zhen. Mechanism Theory and Control of Parallel Robot[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
- [22] 刘辛军, 谢福贵, 汪劲松. 并联机器人机构学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- LIU Xinjun, XIE Fugui, WANG Jinsong. Fundamental of Parallel Robotic Mechanisms [M]. Beijing: Higher Education Press, 2018.
- [23] WU Guanglei, SHEN Huiping. Parallel PnP Robots: Parametric Modeling, Performance Evaluation and Design Optimization[M]. Singapore: Springer Singapore, 2021.
- [24] 沈惠平, 李菊, 王振, 等. 基于结构降耦和运动解耦的并联机构拓扑结构优化及其性能改善[J]. 机械工程学报, 2017, 53(19): 176-186.

- SHEN Huiping, LI Ju, WANG Zhen, et al. Topology Structure Optimization and Performance Improvement for Parallel Mechanisms Based on Structure Coupling-reducing and Motion Decoupling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(19): 176-186.
- [25] 许正骁. 三平移一转动并联操作手的设计与运动学、刚度及动力学分析[D]. 常州:常州大学, 2019.
- XU Zhengxiao. Design, Kinematic, Stiffness and Dynamic Analysis of a 3-Translational-1-Rotational Parallel Manipulator [D]. Changzhou: Changzhou University, 2019.
- [26] 沈惠平, 许正骁, 许可, 等. 零耦合度且部分解耦的3T1R并联机构设计与运动分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382-392.
- SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and Kinematic Analysis of Zero Coupling and Partially Decoupled 3T1R Parallel Mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382-392.
- [27] 沈惠平, 许可, 杨廷力, 等. 一种零耦合度且运动解耦的新型3T1R并联操作手2-(RPa3R)₃R的设计及其运动学[J]. 机械工程学报, 2019, 55(5): 53-64.
- SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. New 3T1R Parallel Manipulator 2-(RPa3R)₃R with Zero Coupling Degree and Partial Decoupling: Design and Kinematics [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(5): 53-64.
- [28] WANG Z, SHEN H P, Deng J M, et al. An Easily Manufactured 6-DOF 3-1-1-1 SPS Type Parallel Mechanism and Its Forward Kinematics [C]//The 2nd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics. Beijing, 2012: 12-14.
- [29] YU Tongzhu, SHEN Huiping, DENG Jiaming, et al. An Easily Manufactured Structure and Its Analytic Solutions for Forward and Inverse Position of 1 - 2 - 3-SPS Type 6-DOF Basic Parallel Mechanism [C]//2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). Guangzhou, 2012: 1194-1199.
- [30] 沈惠平, 李菊, 吴广磊, 等. 并联机器人机构的拓扑结构优化[M]. 北京:高等教育出版社, 2025.
- SHEN Huiping, LI Ju, WU Guanglei, et al. Topological Structure Optimization for Parallel Robotic Mechanism [M]. Beijing: Higher Education Press, 2025.
- [31] 沈惠平. 并联机器人机构拓扑分析方法与技巧及应用[M]. 南京:江苏凤凰教育出版社, 2025.
- SHEN Huiping. Topological Analysis for Parallel Robotic Mechanisms [M]. Nanjing: Phoenix Education Publishing Ltd., 2025.

(编辑 陈 勇)

作者简介:李 菊,女,1981年生,副教授、博士。研究方向为并联机器人、机电一体化等。E-mail: wangju0209@163.com。

沈惠平*(通信作者),男,1965年生,教授、博士研究生导师。研究方向为机构学与机器人机构学。E-mail:shp65@126.com。

本文引用格式:

李菊,郭跃,沈惠平,等. 并联机构多重拓扑降耦的优化原理与一般方法[J]. 中国机械工程, 2025, 36(8): 1700-1712.

LI Ju, GUO Yue, SHEN Huiping, et al. Optimization Principle and General Method for Multiple Topology Decoupling of Parallel Mechanisms [J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(8): 1700-1712.

(上接第1699页)

ZHANG Xin, LIU Jinguo. Model-free Attitude Decoupling Control of Space Robots Based on Time-delay Estimation [J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(9): 1150-1161.

(编辑 陈 勇)

作者简介:周志伟,男,1987年生,博士研究生。研究方向为微电子装备制造、多轴运动平台控制。发表论文6篇。

高 健*(通信作者),女,1964年生,教授、博士研究生导师。研究方向为微电子封装装备技术、数字化制造与再制造技术。发表论文百余篇,

获发明专利授权120件,出版专著1部。E-mail: gaojian@gdut.edu.cn。

本文引用格式:

周志伟,高健,张揽宇. 对称并联运动机构的无模型交叉耦合控制[J]. 中国机械工程, 2025, 36(8): 1692-1699.

ZHOU Zhiwei, GAO Jian, ZHANG Lanyu. A Model-free Cross-coupling Control Method for Parallel Kinematic Mechanisms with Symmetric Structure [J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(8): 1692-1699.