

斜齿轮表面形貌分形特征对时变接触刚度的影响

吴石* 高增阔 王明珠 赵成睿

哈尔滨理工大学机械动力工程学院, 哈尔滨, 150080

摘要: 基于改进的 W-M 分形函数, 利用齿高和齿宽表征斜齿轮齿面的表面形貌。采用圆锥微凸体并考虑啮合过程中斜齿轮接触曲率半径的时变性建立了斜齿轮时变接触刚度模型, 计算发现基于圆锥微凸体模型计算的时变啮合刚度与 ISO6336-1—2006 标准计算所得结果接近。研究结果表明, 斜齿轮的时变接触载荷和时变接触刚度随着分形维数、特征尺度系数、量纲一接触面积、材料塑性指数的变化而表现出不同的变化趋势。

关键词: 斜齿轮啮合; 表面形貌; 分形特征; 圆锥微凸体; 时变接触刚度

中图分类号: TH132.41

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2025.01.006

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Influences of Fractal Features of Helical Gear Surface Topography on Time-varying Contact Stiffness

WU Shi* GAO Zengkuo WANG Mingzhu ZHAO Chengrui

School of Mechanical Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin, 150080

Abstract: Based on the improved W-M fractal function, the surface morphology of helical gear teeth was characterized from tooth height and tooth width. A time-varying contact stiffness model for helical gears was established by adopting a conical asperity and considering the time-varying contact radius of curvature of helical gears during the meshing processes. The time-varying mesh stiffness calculated based on the conical asperity model was found to be close to that obtained from the calculation of the ISO6336-1—2006 standard. The results show that the time-varying contact load and time-varying contact stiffness of helical gears exhibit different trends with changes in fractal dimension, characteristic scale coefficient, dimensional contact area, and material plasticity index.

Key words: helical gear mesh; surface topography; fractal feature; conical asperity; time-varying contact stiffness

0 引言

斜齿轮的接触性能对自动变速器的承载能力和振动噪声有重大影响, 而接触性能主要体现在斜齿轮表面的微观形貌, 故通过研究表面形貌对接触刚度的影响来提高斜齿轮的接触性能具有重要意义。基于分形理论的 W-M (Weierstrass-Mandelbrot) 分形函数可表征具有分形特征的工程粗糙表面。W-M 函数满足表面处处连续却不可微且具有自相似和尺寸独立性, 故选择 W-M 函数表征斜齿轮齿面表面形貌。M-B (Majumdar-Bhushan) 分形接触模型是分形理论用于表面接触分析的主要方法, 它将分形理论与 Hertz 理论相结合, 通过对齿轮进行合理和准确的接触性能分析为齿轮的优化设计提供理论基础。

对粗糙表面的分形模拟^[1]主要有分形布朗函数模拟、时间序列模拟、分形差值模拟、W-M 函数

模拟、傅里叶变换模拟、复合分形模拟, 以上大多数模拟都是对二维轮廓的模拟。改进 W-M 函数^[2]因可模拟三维表面而成为表征齿轮表面形貌的主要方法。

对于粗糙表面接触, 国外学者提出了许多模型。GREENWOOD 等^[3]基于严格的假设条件建立了经典统计学模型(GW 模型), 提出的粗糙表面建模与简化方法被众多学者采用。在此基础上, 研究人员将 GW 模型扩展到弹塑性接触, 相继提出了 W-A 模型、CEB 模型、MB 模型、KE 模型等。近年来, 国内学者提出许多改进的分形接触模型, 而修正接触微凸体成为主要研究方向。兰国生等^[4]建立了基于圆锥微凸体的结合面法向接触刚度分形模型。谭文兵等^[5]建立了依据各向异性分形理论的椭圆形微凸体法向接触刚度分形模型。陈永会等^[6]提出的指数函数形式的微凸体弹塑性模型在接触特性上有单调、光滑、连续的优点。孙献光等^[7]提出一种考虑摩擦因数和微凸体

相互作用的粗糙表面接触热导分形模型。田红亮等^[8]构建了一种具有圆锥微凸体的有限元分析模型。

M-B 分形接触模型不能用于曲面接触分析,故研究者们提出了考虑摩擦因素的两圆柱体表面接触分形模型^[9]、带有摩擦的两圆柱体粗糙表面的加载-卸载接触模型^[10]、修正 M-B 模型^[11]、考虑摩擦因素的两球结合面法向接触刚度分形模型^[12]。赵韩等^[13]构建两圆柱体结合面的法向接触刚度分形模型来研究齿轮的曲面接触。王晓鹏等^[14]建立具有微点蚀特征的分形预估模型来研究不同加工工艺齿面和不同程度微点蚀的渐开线齿轮的法向接触刚度特性。莫海军等^[15]结合分形理论对微粒子喷丸齿轮表面微观形貌进行表征,考虑单个微凸体弹性-弹塑性-塑性变形及微凸体间相互作用关系,建立了微粒子喷丸齿轮法向接触刚度的分析模型。

目前,对齿轮接触面的研究大多将表面微凸体等效为球形,但表面微凸体的形状还包括椭球形、圆柱形、圆锥形等。因此本文首先利用改进 W-M 分形函数表征斜齿轮齿面的表面形貌,并对

比实际形貌与表征形貌的差异。然后,在 M-B 分形接触模型中采用圆锥微凸体建立基于圆锥微凸体的接触力学模型。其后,在基于圆锥微凸体的接触力学模型中引入表面接触系数,修正微凸体接触面积分布规律以用于斜齿轮曲面接触,考虑啮合过程中齿轮接触曲率半径的时变性,建立时变接触刚度模型,研究分形维数、特征尺度系数、接触面积和材料塑性指数对时变接触刚度的影响。最终,比较圆锥微凸体模型和 M-B 分形接触模型的差异,将时变接触刚度代入基于势能法的时变啮合刚度模型与 ISO6336-1—2006 标准,通过对比计算的啮合刚度来验证基于圆锥微凸体的时变接触刚度模型的合理性。

1 基于改进 W-M 分形函数的斜齿轮表面形貌表征方法

1.1 斜齿轮表面形貌的测量

自动变速器行星轮系的基本结构如图 1a 所示,斜齿轮实物如图 1b 所示,齿轮参数如表 1 所示。

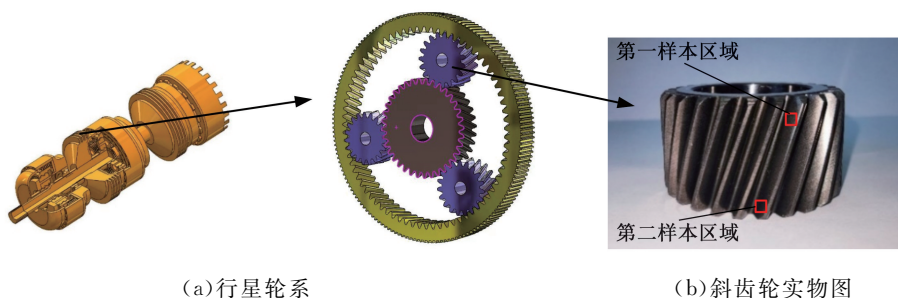


图 1 自动变速器行星轮系示意图

Fig.1 Schematic diagram of the planetary gear train of an automatic transmission

表 1 斜齿轮基本参数

Tab.1 Basic parameters of helical gears

参数	数值
主动轮齿数/从动轮齿数	26/34
模数/mm	1.25
压力角/(°)	20
齿顶高系数	1
齿宽/mm	20
螺旋角/(°)	15
材料	20CrMnTi

由文献^[16]可知,斜齿轮齿面磨损主要发生在齿面的齿根和齿顶部分,因此选择图 1b 中单个齿面的齿根和齿顶位置获取齿面的表面形貌,红色方框为样本区域位置。白光干涉仪测得的样本区域三维表面形貌如图 2 所示,齿宽、齿高方向的斜齿轮表面形貌二维轮廓如图 3 所示。

根据不同尺度下的轮廓离散数据计算结构函

数值。定义结构函数为粗糙表面轮廓函数的增量方差,其表达式^[17]为

$$S(\tau) = \langle [z(x+\tau) - z(x)]^2 \rangle = CG^{2(D-1)} \tau^{4-2D} \quad (1)$$

$$C = \Gamma(2-3D) \sin \frac{\pi(2D-3)}{2(4-2D) \ln \gamma} \quad (2)$$

式中: x 代表轮廓水平方向上任意一点坐标; τ 为轮廓水平方向上的步长; $z(*)$ 为齿轮表面轮廓的高度; $\langle * \rangle$ 表示空间平均值; D 为分形维数; G 为特征尺度系数; $\Gamma(*)$ 代表第二类欧拉积分; γ 为尺度因子,对于正态分布的随机曲面,通常取常数 1.5。

对式(1)两边同时取对数,可得

$$\lg S(\tau) = (4-2D) \lg \tau + \lg CG^{2(D-1)} \quad (3)$$

$\lg S(\tau)$ 与 $\lg \tau$ 成线性关系,根据回归分析拟合式(3)的曲线,如图 4 所示,其中,分形维数 D 通过直线的斜率 $K_s = 4-2D$ 得到,特征尺度系数 G 通过直线的截距 $B = \lg CG^{2(D-1)}$ 得到。

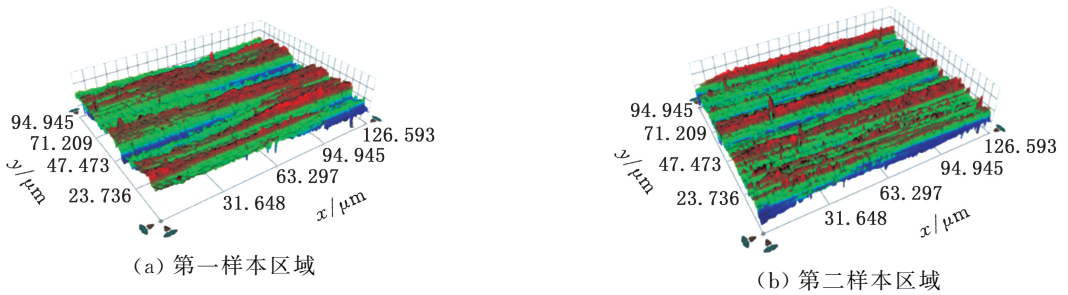
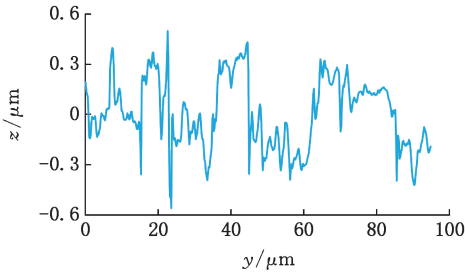
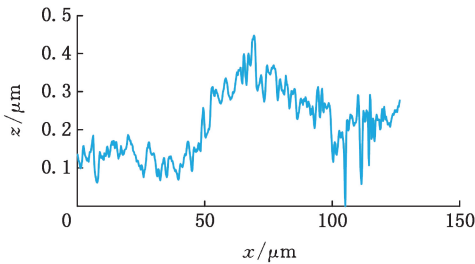


图 2 斜齿轮齿面三维表面形貌

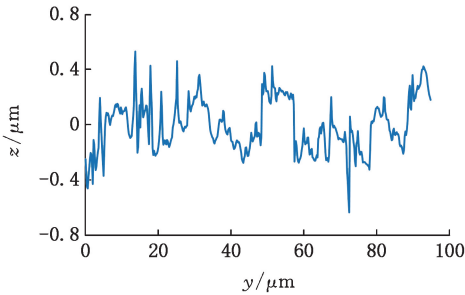
Fig.2 Three-dimensional surface topography of helical gear tooth surfaces



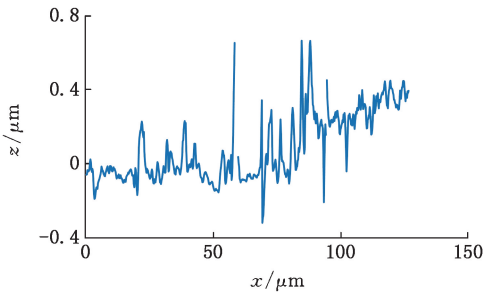
(a) 第一样本区域齿高方向



(b) 第一样本区域齿宽方向



(c) 第二样本区域齿高方向

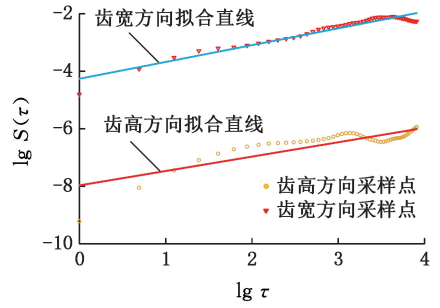


(d) 第二样本区域齿宽方向

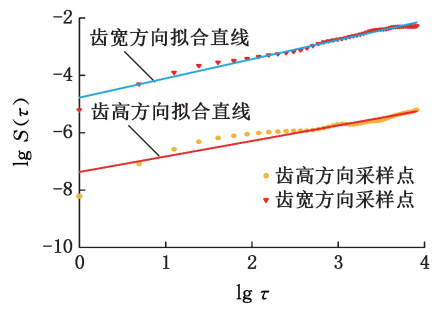
图 3 斜齿轮齿面表面形貌二维轮廓图

Fig.3 Two-dimensional contour of the surface topography of the helical gear tooth surface

通过上述斜率和截距公式得到的 2 个样本区域的齿高、齿宽方向的分形参数,如表 2 所示。



(a) 第一样本区域



(b) 第二样本区域

图 4 结构函数直线拟合

Fig.4 Structural function straight line fitting

表 2 分形参数数值

Tab.2 The fractal parameters

样本区域	方向	分形参数	数值
第一区域	齿高	分形维数 D	1.630
		特征尺度系数 G	7.54×10^{-8}
	齿宽	分形维数 D	1.617
		特征尺度系数 G	8.32×10^{-8}
第二区域	齿高	分形维数 D	1.638
		特征尺度系数 G	8.78×10^{-8}
	齿宽	分形维数 D	1.631
		特征尺度系数 G	9.03×10^{-8}

1.2 斜齿轮齿面表面形貌的分形表征

为表征图 2 所示的实际形貌,采用基于 W-M 函数^[2]的斜齿轮表面形貌三维分形函数,其表达式为

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} \left(\frac{\ln \gamma}{M} \right)^{1/2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{n(D-3)} \{ \cos \varphi_{m,n} - \cos \left[\frac{2\pi \gamma^n \sqrt{x^2 + y^2}}{L} \cos \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi m}{M} \right) \right] + \varphi_{m,n} \} \quad (4)$$

式中: $z(x, y)$ 为轮廓高度; L 为取样长度; M 为重建一个表面时叠加的峰数; m, n 为频率指数; $\varphi_{m,n}$ 为在 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机相位。

根据文献[18], 令 $M = 1, m = 1$, 则有

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L}\right)^{D-2} \sqrt{\ln \gamma} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\gamma^{n(3-D)}} [\cos \varphi_{1,n} - \cos(\frac{2\pi \gamma^n x}{L} - \varphi_{1,n})] \quad (5)$$

由齿轮加工成形方法可知, 斜齿轮齿面由形状一致的齿轮加工刀具反复加工而成, 齿轮加工表面的加工纹理存在一定的方向性, 局部具有一定的相似性。齿轮加工过程中存在重复装夹定位、刀具刃角磨损等加工误差, 齿轮的实际加工表面一般具有双分形或多分形特征, 通过一组分形参数很难模拟出实际加工表面多个方向的纹理特征, 因此, 本文采用双方向 W-M 分形函数表征斜齿轮表面形貌。根据式(5) 通过叠加齿高和齿宽

两个方向(对应下标 y, x) 的分形参数来表征斜齿轮齿面表面形貌, 对应公式为

$$z(x, y) = L_y \left(\frac{G_y}{L_y}\right)^{D_y-2} \sqrt{\ln \gamma} \sum_{n_y=0}^{n_{y\max}} \frac{1}{\gamma^{n_y(3-D_y)}} \cdot [\cos \varphi_{1,n_y} - \cos(\frac{2\pi \gamma^{n_y} y}{L_y} - \varphi_{1,n_y})] + L_x \left(\frac{G_x}{L_x}\right)^{D_x-2} \sqrt{\ln \gamma} \sum_{n_x=0}^{n_{x\max}} \frac{1}{\gamma^{n_x(3-D_x)}} \cdot [\cos \varphi_{1,n_x} - \cos(\frac{2\pi \gamma^{n_x} x}{L_x} - \varphi_{1,n_x})] \quad (6)$$

为分析分形维数和特征尺度系数对斜齿轮表征形貌的影响, 保持特征尺度系数不变, 观察不同分形维数对应的表面形貌。由图 5 可以看出, 随着分形维数的增大, 表面形貌的特征更加精细, 即分形维数主要影响表面形貌复杂程度, 且随着表面精细程度的上升, 表面形貌峰谷差值有所减小。

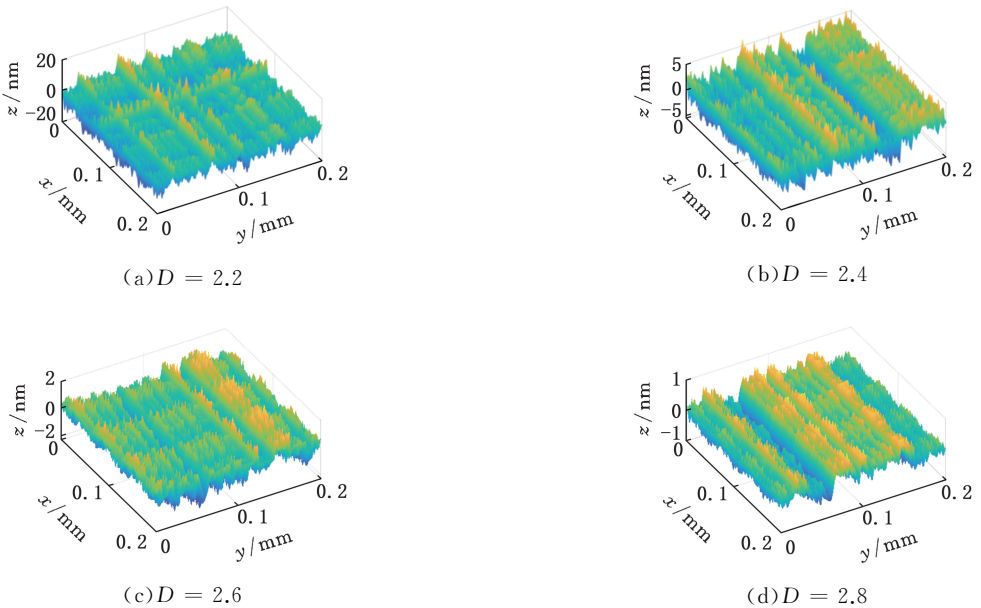


图 5 表征斜齿轮齿面表面形貌($G = 1 \times 10^{-8}$)

Fig.5 Characterize the surface topography of helical gear tooth surfaces($G = 1 \times 10^{-8}$)

保持分形维数不变, 观察不同特征尺度系数对应的表面形貌。由图 6 可以看出, 随着特征尺度系数的增大, 形貌峰谷差值逐渐增大, 即特征尺度系数与表面形貌平整性正相关; 随着特征尺度系数的增大, 表面形貌平整性变差, 表面峰谷差值增大, 表面形貌粗糙度增大。

综上所述, 分形维数增大时, 表面形貌变得更精细; 特征尺度系数增大时, 表面形貌峰谷差值增大, 表面变得更粗糙; 分形维数和特征尺度系数一起使用才能完整表征形貌。

将表 2 中的分形参数代入式(6), 可得斜齿轮齿面表征形貌。实际形貌和表征形貌的形貌参数如表 3 所示。由图 7a、图 7b 可看到形貌中大量微

凸体堆叠形成的沟壑和凸起基本一致。由表 3 可知, 表面形貌参数误差为 4.7% ~ 9.7%, 表明改进 W-M 分形函数采用齿高和齿宽综合表征斜齿轮齿面的表面形貌误差较小。由图 7c 可以看到表征形貌未表现真实形貌中的 X 方向沟壑状形貌。

2 考虑圆锥微凸体的斜齿轮时变接触刚度研究

2.1 斜齿轮圆锥微凸体接触力学模型

如图 8 所示, 斜齿轮 M-B 分形接触模型将余弦波的曲率半径变化作为微凸体接触面积的变化, 而实际的表面微凸体接触面积变化小于余弦波变化, 这导致单个等效微凸体的体积和接触面

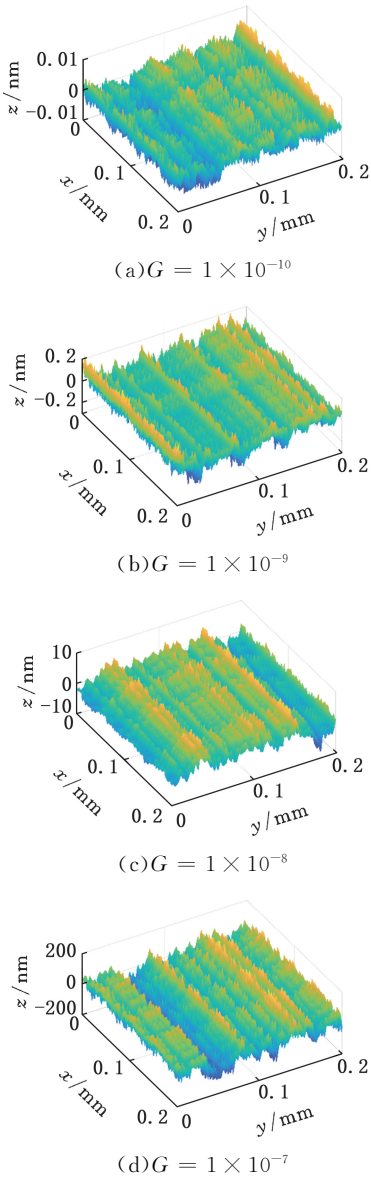


图6 表征斜齿轮齿面表面形貌($D = 2.4$)

Fig.6 Characterize the surface topography of helical gear tooth surfaces($D = 2.4$)

表3 形貌参数对比

Tab.3 Comparison of topography parameters

形貌参数	测量图	仿真图	相对误差
$Ra/\mu\text{m}$	0.1709	0.1629	4.7%
$Rp/\mu\text{m}$	1.1346	1.2299	8.4%
$Rq/\mu\text{m}$	0.2094	0.1891	9.7%
$Rt/\mu\text{m}$	2.3816	2.5650	7.7%
$Rv/\mu\text{m}$	-1.2469	-1.1646	6.6%

积偏离真实情况。齿轮粗糙齿面微凸体形状更接近圆锥微凸体^[19],因此以圆锥微凸体接触模型计算斜齿轮接触刚度。

微凸体的变形量可等效为 W-M 函数的峰谷高度差,即圆锥微凸体的变形量:

$$\delta = 2\sqrt{\ln \gamma} G^{D-2} (2r)^{3-D} = g_1(D) a^{(3-D)/2} \quad (7)$$

$$g_1(D) = 2^{4-D} \pi^{(D-3)/2} \sqrt{\ln \gamma} G^{D-2}$$

式中: a 为微凸体接触面积, $a = \pi r^2$; r 为微凸体接触

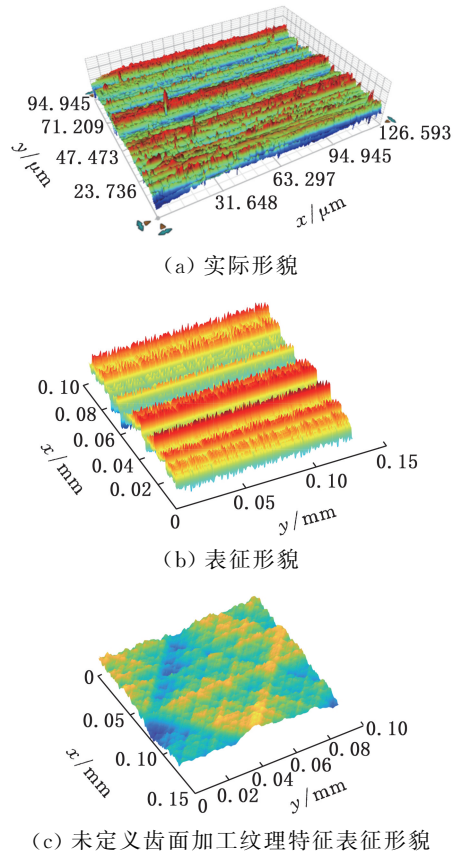


图7 实际形貌与表征形貌对比

Fig.7 Comparison of actual morphology and characteristic morphology

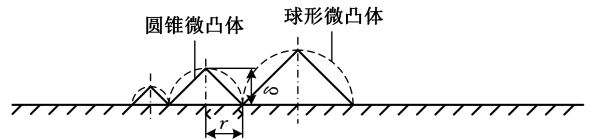


图8 单个微凸体等效模型

Fig.8 A single micro convex equivalent model

半径。

圆锥微凸体在弹性阶段所受接触载荷和接触面积的关系^[20]为

$$F_c(a) = 0.2E\sqrt{\pi}g_1(D)a^{(4-D)/2} \quad (8)$$

$$E = \frac{1}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}$$

式中: E 为复合弹性模量; E_1 、 E_2 为 2 种接触材料相的弹性模量; ν_1 、 ν_2 为 2 种接触材料相的泊松比。

圆锥微凸体发生塑性变形时,所受接触载荷 $F_p(a)$ 和接触面积 a 的关系为

$$F_p(a) = Ha \quad (9)$$

式中: H 为齿轮材料中较软材料的硬度, $H = 2.8\sigma_y$; σ_y 为齿轮接触中较软材料的屈服强度, $\sigma_y = \phi E$; ϕ 为塑性指数。

海洋岛屿分布规律^[21] 为

$$N(A > a_r) = (a_d/a_r)^{D/2} \quad (10)$$

式中: A 为截面积; a_d 为最大岛屿面积; a_r 为任意岛屿的

面积。

MAJUMDAR 等^[1] 基于海洋岛屿分布规律建立了粗糙表面接触时微凸体的面积分布公式：

$$n(a) = \frac{D-1}{2} \frac{a_{\max}^{(D-1)/2}}{a^{(D+1)/2}} \quad (11)$$

式中： a_{\max} 为最大接触微凸体面积。

对式(11) 所示的接触面积分布函数求期望可得粗糙表面接触时的总接触面积：

$$A_r = \int_0^{a_{\max}} n(a) a da = \frac{D-1}{3-D} a_{\max} \quad (12)$$

齿面接触为曲面接触,接触时需要考虑表面曲率,通过构造的表面接触系数 λ 来修正接触面积分布函数：

$$n'(a) = \lambda n(a) \quad (13)$$

$$\lambda = \lambda_0 F^{C_2 x_h} \quad (14)$$

$$\lambda_0 = \left[\frac{C_1}{\pi(R_1 + R_2)} \left(\frac{4B}{\pi E} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \right)^{C_2} \right]^{x_h}$$

式中： λ_0 为初始表面接触系数； F 为齿轮结合面法向力； C_1 、 C_2 为与曲面几何形状有关的系数，齿轮接触时取 $C_1 = 1$ 、 $C_2 = 0.5$ ； x_h 为综合曲率系数， $x_h = 1/R_1 \pm 1/R_2$ ； B 为有效接触长度； R_1 、 R_2 分别为圆柱 1 和 2 的曲率半径。

齿轮啮合过程中,齿轮接触点的曲率半径是时变的,每一时刻的表面接触系数不同,因此单轮齿一个啮合周期的接触刚度会变化。斜齿轮螺旋角使得接触线与齿轮端面方向存在夹角,啮合接触线的端面投影为一条线段,而非直齿轮的端面投影为一个点,故以接触线中点在齿轮端面投影点为曲率半径的求解点。

由图 9 推导曲率半径变化规律,假设啮合线上任意一点为 K ,则 K 点对应的主动轮、从动轮的曲率半径可表示为 KN_1 和 KN_2 , AB 为实际的啮合线长度。首先计算出在节点 P 处的主从动轮的曲率半径 PN_1 和 PN_2 ：

$$\left. \begin{aligned} PN_1 &= m_p z_1 \cos \alpha_{11} \tan \alpha'_{11} / 2 \\ PN_2 &= m_p z_2 \cos \alpha_{12} \tan \alpha'_{12} / 2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$N_1 N_2 = PN_1 + PN_2$$

$$R_1 = KN_2 = r_{b2} \tan(\alpha'_{12} + \theta)$$

$$R_2 = KN_1 = N_1 N_2 - R_1$$

式中： m_p 为端面模数； z_1 、 z_2 分别为主从动轮齿数； α_{11} 、 α_{12} 分别为主从动轮的端面压力角； α'_{11} 、 α'_{12} 分别为主从动轮的

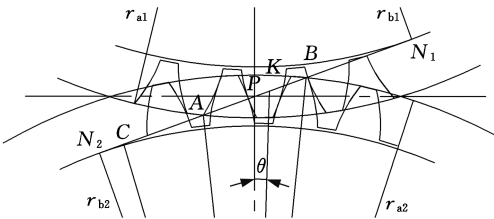


图 9 斜齿轮端面啮合示意图

Fig.9 Schematic diagram of helical gear end face meshing

端面啮合角； θ 为啮合旋转角度， r_{b2} 为从动轮基圆半径。

由式(15) 可得斜齿轮啮合过程曲率半径的变化曲线。由图 10 可知,在一个啮合周期 T 内,齿轮综合曲率半径先增大后减小。

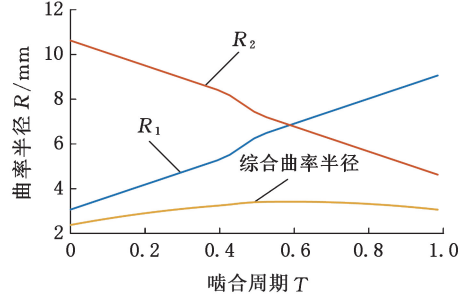


图 10 啮合过程曲率变化

Fig.10 Curvature change during meshing

2.2 斜齿轮法向时变接触刚度的建模

建立时变接触刚度模型应考虑接触载荷的分布,计算齿面载荷的方法通常有最小势能法和接触线百分比法。为简化计算,本文采用接触线百分比法。根据渐开线齿轮啮合过程中的啮合接触点应分布于啮合线上,为便于分析,构建啮合平面示意图(图 11)。图 11 中,矩形平面 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 为齿轮接触线的接触平面, B_2 为两齿啮入点, B_3 为两齿啮出点, b 为齿宽, β_b 为基圆螺旋角, P_{bt} 为基圆齿距, $\epsilon_a P_{bt}$ 为端面重合度对应的啮合线长度, $\epsilon_\beta P_{bt}$ 为轴面重合度对应的啮合线长度。

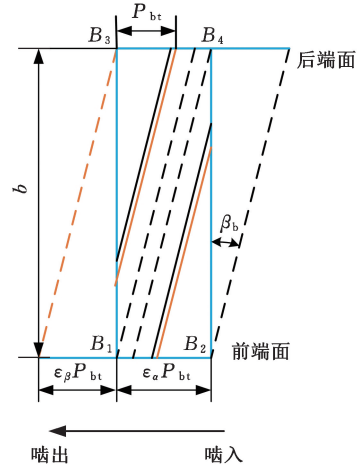


图 11 啮合平面示意图

Fig.11 Schematic diagram of the meshing plane

斜齿轮啮合过程中,总重合度一般大于 2,且部分时段的啮合齿数会发生变化。圆柱斜齿轮的重合度一般为 2 ~ 3。齿轮轴面重合度取决于齿宽,由于本文采用的齿轮为变速器用斜齿轮,所以只考虑端面重合度大于轴面重合度的情况。

设 L_z 为接触线总长度, $l_{\max} = b / \cos \beta_b$ 为单齿接触线最大值, t_z 为单齿距啮合周期,则某一时刻单齿接触线长度

$$l = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \cup t \in ((\epsilon_\beta + \epsilon_\alpha)t_z, \infty) \\ l_{\max}/[(\epsilon_\beta t_z)t] & t \in [0, \epsilon_\beta t_z] \\ l_{\max} & t \in [\epsilon_\beta t_z, \epsilon_\alpha t_z] \\ l_{\max}/[\epsilon_\beta(\epsilon_\beta + \epsilon_\alpha - t/t_z)] & t \in [\epsilon_\alpha t_z, (\epsilon_\beta + \epsilon_\alpha)t_z] \end{cases}$$

某一时刻啮合的总接触线长度为

$$L_z(t) = l_1(t - 2t_z) + l_2(t - t_z) + l_3(t) + l_4(t + t_z) + l_5(t + 2t_z)$$

式中: l_i 为啮合过程中进入啮合的第 i 个轮齿的单齿接触线长, $i = 1, 2, \dots, 5$ 。

不同啮合时刻的第 i 个轮齿上的齿面接触载荷为

$$F_i = l_i F_n / L_z \quad (16)$$

式中: F_n 为齿面法向总接触载荷。

齿面法向总接触载荷包括弹性接触载荷和塑性接触载荷两部分, 法向总接触载荷为

$$F_n = \int_{a_s}^{a_c} F_p(a) \dot{n}(a) da + \int_{a_c}^{a_{\max}} F_e(a) \dot{n}(a) da \quad (17)$$

$$a_c = \left(\frac{H}{0.2E\sqrt{\pi}g_1(D)} \right)^{2/(2-D)} = \left(\frac{14\varphi}{\sqrt{\pi}g_1(D)} \right)^{2/(2-D)}$$

式中: a_c 为临界接触面积; a_s 为最小接触面积, 取 0。

将式(8)、式(9)、式(13)代入式(17)可得

$$F'_n =$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}E(D-1)g_1(D)}{5(5-2D)} a_{\max}^{(D-1)/2} \lambda (a_{\max}^{(5-2D)/2} - a_c^{(5-2D)/2}) + \frac{\lambda H(D-1)}{3-D} a_{\max}^{(D-1)/2} a_c^{(3-D)/2} & D \neq 2.5 \\ a_{\max}^{3/4} (0.3\sqrt{2G\ln\gamma}\pi^{1/4} \ln \frac{a_{\max}}{a_c} + 3H\lambda a_c^{1/4}) & D = 2.5 \end{cases} \quad (18)$$

量纲一化 F'_n 可得

$$(F'_n)^* = \begin{cases} \frac{F_{n1}^*}{A_n E} \left(\frac{A_n E}{\lambda_0} \right)^{\frac{1}{1+C_2 x_h}} & D \neq 2.5 \\ \frac{F_{n2}^*}{A_n E} \left(\frac{A_n E}{\lambda_0} \right)^{\frac{1}{1+C_2 x_h}} & D = 2.5 \end{cases} \quad (19)$$

式中: A_n 为理论接触面积; F_{n1}^* 、 F_{n2}^* 为未带入表面接触系数时的接触载荷; n_1 、 n_2 分别代表 $D \neq 2.5$ 和 $D = 2.5$ 两种情况。

接触刚度为接触过程中载荷对形变量的导数, 则单个圆锥微凸体的法向接触刚度可表示为

$$k_n = \frac{dF_e}{da} \frac{da}{d\delta} = 0.4\sqrt{\pi\alpha}E \frac{4-D}{3-D} \quad (20)$$

刚度表示材料抵抗弹性变形的能力, 因此接触面法向刚度适用于塑性变形阶段的微凸体, 故接触面法向总刚度表达式为

$$K_n = \int_{a_c}^{a_{\max}} k_n n'(a) da \quad (21)$$

将式(13)、式(20)代入式(21)可得

$$K_n = \frac{0.4\sqrt{\pi}\lambda(D-1)E}{2-D} a_{\max}^{(D-1)/2} (a_{\max}^{(2-D)/2} - a_c^{(2-D)/2}) \quad (22)$$

量纲一化 K_n 可得

$$K_n^* = \frac{K_n}{E\sqrt{A_n}} \quad (23)$$

3 斜齿轮啮合的法向时变接触刚度仿真分析

3.1 分形参数、接触面积、材料属性对时变接触载荷的影响

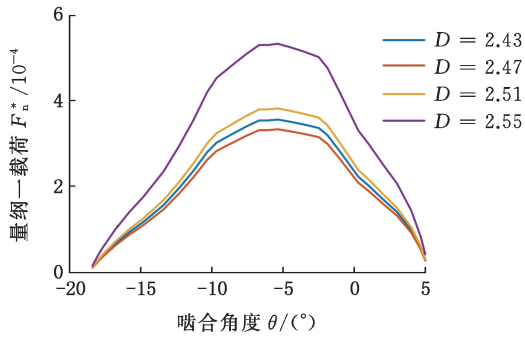
将齿轮齿数、压力角、螺旋角、模数代入式(15), 如图9所示, AB 为从动轮与主动轮前端面接触时的接触长度, 对应的啮合角度 θ 为 $-5.4^\circ \sim -5.2^\circ$; AC 为从动轮与主动轮后端面接触时的接触长度, 对应的啮合角度 θ 为 $-18.6^\circ \sim -5.4^\circ$ 。自动变速器齿轮材料为 20CrMnTi, 齿轮加工精度一般为 6~8 级, 对应粗糙度 Ra 为 $0.8 \mu\text{m}$ 、 $1.25 \mu\text{m}$ 和 $2.0 \mu\text{m}$ (根据 GB/Z 18620.4—2008 给定的参考值)。以 $0.8 \sim 2.0 \mu\text{m}$ 为粗糙度 Ra 的取值范围, 并代入文献[19]的公式, 得到的分形维数 D 为 $2.43 \sim 2.55$, 特征尺度系数 G 为 $6.0 \times 10^{-9} \sim 5.2 \times 10^{-8}$, 表面的量纲一接触面积 A_r^* 为 $0.1 \sim 0.25$ 、接触面塑性指数为 $0.7 \sim 2.5$ 时, 对量纲一时变接触载荷进行仿真分析。

由图 12a 可得, 量纲一时变接触载荷随啮合角度的增大先增大后减小; θ 为 $-10^\circ \sim -2^\circ$ 时, 接触载荷变化较慢; θ 为 -5.3° 时, 接触载荷取得最大值。其他参数不变时, 量纲一时变接触载荷随分形维数的增大先减小后增大, 且变化速率逐渐减小。分形维数由 2.43 变为 2.47 后, 临界接触面积增大, 部分微凸体的弹性变形变为塑性变形, 接触表面相同接触面积区域内产生接触的微凸体增多(量纲一时变接触刚度减小的主要因素)。分形维数由 2.47 变为 2.55 后, 临界接触面积增大, 部分微凸体的弹性变形变为塑性变形(时变接触载荷增大的主要因素), 接触表面相同接触面积区域内产生的接触微凸体增多。

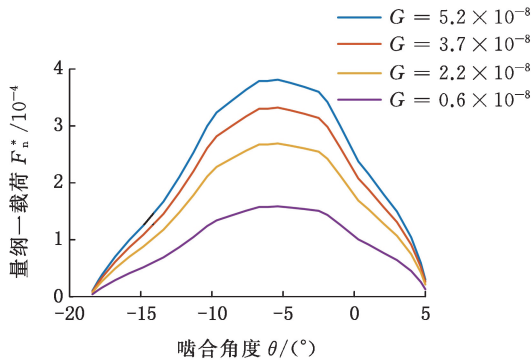
由图 12b 可得, 量纲一时变接触载荷随特征尺度系数的增大而增大, 但变化速率缓慢减小。随着特征尺度系数的增大, 临界接触面积增大, 部分微凸体的弹性变形变为塑性变形, 但接触表面相同接触面积区域内接触的微凸体数量不变, 最终使时变接触载荷增大。

由图 12c 可得, 量纲一时变接触载荷随量纲一接触面积的增大而增大, 但变化速率缓慢减小。

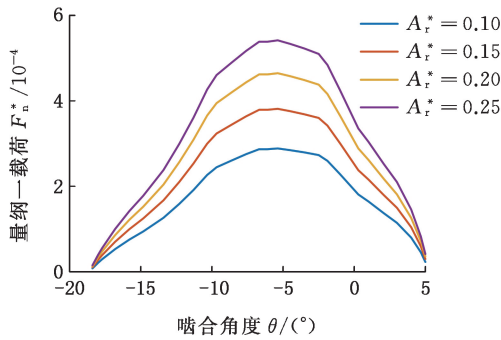
由图 12d 可得, 量纲一时变接触载荷基本不随材料塑性指数的增大而变化。



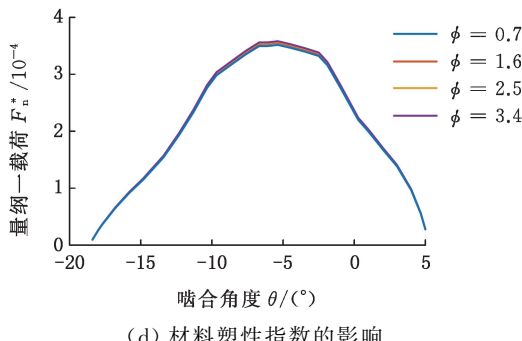
(a) 分形维数的影响



(b) 特征尺度系数的影响



(c) 接触面积的影响



(d) 材料塑性指数的影响

图 12 分形维数、特征尺度系数、接触面积和材料塑性指数对量纲一时变接触载荷的影响

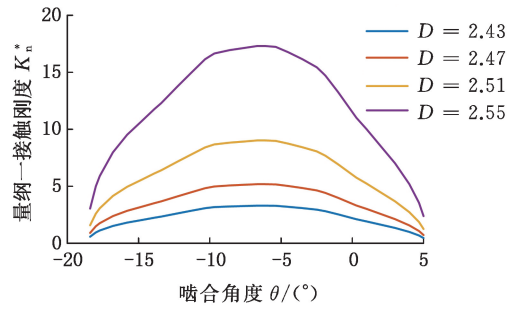
Fig.12 The effects of fractal dimension, eigenscale

coefficient, contact area, and material plasticity index on dimensionless time-varying contact loads

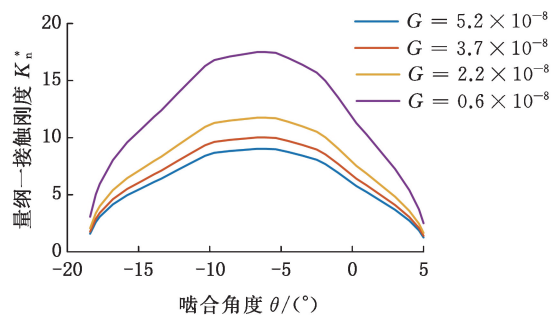
3.2 分形参数、接触面积、材料属性对时变接触刚度的影响

为分析接触面分形维数、特征尺度系数、量纲一接触面积和材料塑性指数对量纲一时变接触刚度的影响,选取与时变接触载荷相同的参数范围

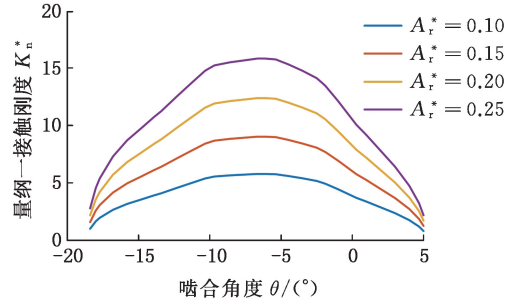
(分形维数 D 为 2.43 ~ 2.55,特征尺度系数 G 为 $6.0 \times 10^{-9} \sim 5.2 \times 10^{-8}$,表面量纲一接触面积 A_r^* 为 0.1 ~ 0.25,接触面塑性指数 ϕ 为 0.7 ~ 2.5) 对量纲一时变接触刚度进行仿真分析,结果如图 13 所示。



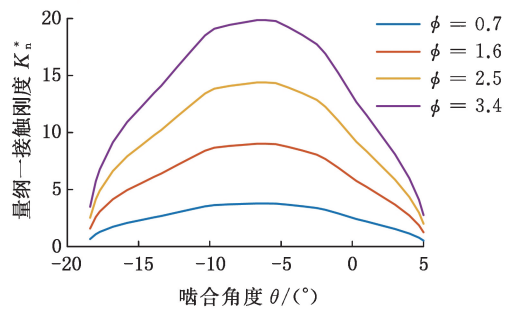
(a) 分形维数的影响



(b) 特征尺度系数的影响



(c) 接触面积的影响



(d) 材料塑性指数的影响

图 13 分形维数、特征尺度系数、接触面积和材料塑性指数对量纲一时变接触刚度的影响
Fig.13 The effects of fractal dimension, eigenscale coefficient, contact area and material plasticity index on dimensionless time-varying contact stiffness

由图 13a 可得,量纲一时变接触刚度随啮合角度的增大先增大后减小, θ 为 $-10^\circ \sim -2^\circ$ 的时

变接触刚度变化缓慢,这与载荷的变化趋势一致,说明载荷是影响接触刚度的主要因素。 θ 为 $-6.7^\circ \sim -6.1^\circ$ 时,量纲一时变接触刚度取得最大值。其他参数不变时,随着分形维数的增大,量纲一时变接触刚度非线性增大,且变化较快。随着分形维数的增大,临界接触面积增大,部分微凸体的弹性变形变为塑性变形;接触表面相同接触面积区域内接触的微凸体增多(量纲一时变接触刚度增大的主要因素)。

由图 13b 可得,随着特征尺度系数的增大,量纲一时变接触刚度非线性减小;临界接触面积增大,部分微凸体由弹性变形变为塑性变形(量纲一时变接触刚度减小的主要因素),接触表面相同接触面积区域内接触的微凸体增多。

由图 13c 可得,随着量纲一接触面积的增大,量纲一时变接触刚度增大,但变化速率较小。

由图 13d 可得,随着塑性指数的增大,量纲一时变接触刚度线性增大,临界接触面积减小,弹性状态微凸体增多;接触表面相同接触面积区域内接触的微凸体数量不变,使得量纲一时变接触刚度增大。

3.3 时变接触刚度模型的对比分析

为分析圆锥微凸体模型和 M-B 分形接触模型^[9] 差异,将相同参数带入圆锥微凸体模型和 M-B 分形接触模型。由图 14 可知圆锥微凸体模型计算得到的刚度较小。这是因为圆锥微凸体模型的临界面积公式变化导致圆锥微凸体模型临界面积变化快,致使计算得到的接触刚度较小。

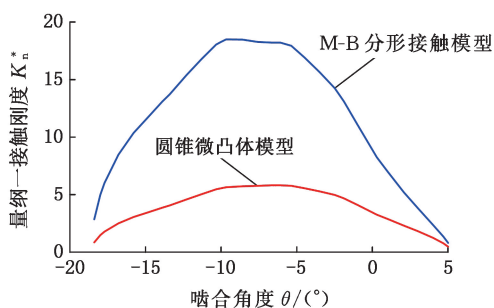


图 14 圆锥微凸体与 M-B 分形接触模型的对比

Fig.14 Comparison of conical micro convex body and M-B fractal contact model

将考虑赫兹接触刚度与分形接触刚度的时变啮合刚度模型^[22] 进行对比分析,表 1 所示斜齿轮参数的变啮合刚度如图 15 所示。

分形接触刚度计算的啮合刚度最大值为 520.26 MN/m,啮合刚度平均值为 497.92 MN/m;赫兹接触刚度计算的啮合刚度最大值为 482.50 MN/m,啮合刚度平均值为 452.52 MN/m。两种接触刚度对应的啮合刚度相对误差的最大值为

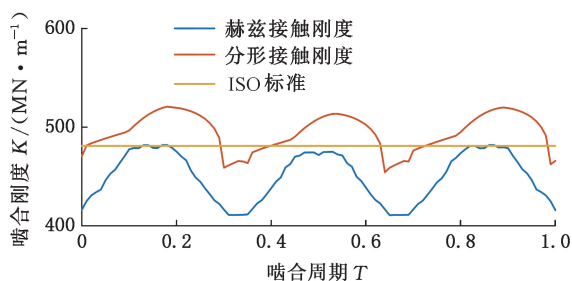


图 15 不同接触刚度下的啮合刚度

Fig.15 Meshing stiffness at different contact stiffnesses

7.25%,平均值为 9.12%,均小于 10%。

根据 ISO6336-1—2006 标准(直齿轮和斜齿轮承载能力计算第 1 部分:基本原理、概述及通用影响系数)计算的啮合刚度为 480.95 MN/m,与分形接触刚度算法的相对误差为 3.52%,与赫兹接触刚度算法的相对误差为 6.29%。

4 结论

1)采用改进 W-M 函数以齿高、齿宽综合表征斜齿轮齿面形貌,表征形貌与实际形貌的相对误差小于 10%。

2)斜齿轮时变接触载荷随啮合角度的增大而先增大后减小; θ 为 $-10^\circ \sim -2^\circ$ 时,接触载荷变化较慢; θ 为 -5.3° 时,接触载荷取得最大值。斜齿轮时变接触载荷随分形维数的增大而先减小后增大,随特征尺度系数、量纲一接触面积的增大而增大,但不随材料塑性指数的增大而变化。

3)斜齿轮时变接触刚度随啮合角度的增大而先增大后减小, θ 为 $-10^\circ \sim -2^\circ$ 时,接触载荷变化较为缓慢,这与载荷的变化趋势一致,说明载荷是影响刚度的主要因素,表面形貌为次要因素; θ 为 $-6.7^\circ \sim -6.1^\circ$ 时,时变接触刚度取得最大值。斜齿轮的时变接触刚度随分形维数、特征尺度系数、量纲一接触面积、材料塑性指数的增大而增大。

4)斜齿轮圆锥微凸体模型和 M-B 分形接触模型的对比结果表明,圆锥微凸体模型更符合实际的齿轮表面接触刚度的变化规律。考虑分形接触刚度和赫兹接触刚度的斜齿轮时变啮合刚度模型计算数值相对误差的最大值为 7.25%,平均值为 9.12%;考虑分形接触刚度与 ISO 标准计算的时变啮合刚度相对误差为 3.52%。

参考文献:

- [1] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal Model of Elastic-plastic Contact between Rough Surfaces[J]. Journal of Tribology, 1991, 113(1):1-11.
- [2] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact Analysis of Elastic-plastic Fractal Surfaces[J]. Journal of

- Applied Physics, 1998, 84(7):3617-3624.
- [3] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of Nominally Flat Surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1966, 295 (1442):300-319.
- [4] 兰国生, 孙万, 谭文兵, 等. 基于圆锥微凸体的结合面法向刚度分形模型研究[J]. 振动与冲击, 2021, 40(15):207-215.
LAN Guosheng, SUN Wan, TAN Wenbing, et al. Cone Elastoplastic Fractal Model of Two Contact Rough Surfaces[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(15):207-215.
- [5] 谭文兵, 兰国生, 张学良, 等. 依据各向异性分形理论的固定结合面椭圆弹塑性法向接触刚度建模及仿真分析[J]. 固体力学学报, 2021, 42(1):63-76.
TAN Wenbing, LAN Guosheng, ZHANG Xueliang, et al. Modeling and Simulation Analysis of Elliptic-plastic Normal Contact Stiffness of Joint Surface Based on Anisotropic Fractal Theory[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(1):63-76.
- [6] 陈永会, 张学良, 温淑花, 等. 粗糙表面弹塑性接触连续光滑指数函数模型与法向接触刚度研究[J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(7):58-67.
CHEN Yonghui, ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, et al. Research on Continuous Smooth Exponential Model of Elastic-plastic Contact and Normal Contact Stiffness of Rough Surface[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(7):58-67.
- [7] 孙献光, 孟春晓, 段田堂. 考虑摩擦因数和微凸体相互作用的粗糙表面接触热导分形模型[J]. 摩擦学学报, 2020, 40(5):626-633.
SUN Xianguang, MENG Chunxiao, DUAN Tiantang. A Fractal Model of Thermal Contact Conductance of Rough Surfaces Considering Friction Coefficient and Asperity Interaction[J]. Journal of Tribology, 2020, 40(5):626-633.
- [8] 田红亮, 董元发, 钟先友, 等. 圆锥微凸体在粗糙表面接触分析中的应用[J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(11):71-78.
TIAN Hongliang, DONG Yuanfa, ZHONG Xianyou, et al. Application of Conical Asperity in Contact Analysis of Rough Surfaces[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017, 51(11):71-78.
- [9] 陈奇, 黄守武, 张振, 等. 考虑摩擦因素的两圆柱体表面接触承载能力的分形模型研究[J]. 机械工程学报, 2016, 52(7):114-121.
CHEN Qi, HUANG Shouwu, ZHANG Zhen, et al. Research on Fractal Contact Model for Contact Carrying Capacity of Two Cylinders' Surfaces Considering Friction Factors[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(7):114-121.
- [10] WANG Honghai, JIA Peng, WANG Liquan, et al. Modeling of the Loading - Unloading Contact of Two Cylindrical Rough Surfaces with Friction[J]. Applied Sciences, 2020, 10(3):742.
- [11] YUAN Yuan, CHENG Yu, LIU Kai, et al. A Revised Majumdar and Bushan Model of Elastoplastic Contact between Rough Surfaces[J]. Applied Surface Science, 2017, 425:1138-1157.
- [12] CHEN Qi, XU Fan, LIU Peng, et al. Research on Fractal Model of Normal Contact Stiffness between Two Spheroidal Joint Surfaces Considering Friction Factor[J]. Tribology International, 2016, 97:253-264.
- [13] 赵韩, 陈奇, 黄康. 两圆柱体结合面的法向接触刚度分形模型[J]. 机械工程学报, 2011, 47(7):53-58.
ZHAO Han, CHEN Qi, HUANG Kang. Fractal Model of Normal Contact Stiffness between Two Cylinders' Joint Interfaces[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(7):53-58.
- [14] 王晓鹏, 刘世军. 微点蚀齿轮法向接触刚度分形预估模型[J]. 机械工程学报, 2021, 57(1):68-76.
WANG Xiaopeng, LIU Shijun. Fractal Prediction Model of Normal Contact Stiffness of Micro-pitting Gear [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(1):68-76.
- [15] 莫海军, 赵航, 成雨, 等. 微粒子喷丸齿轮法向接触刚度模型[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2022, 50(9):90-98.
MO Haijun, ZHAO Hang, CHENG Yu, et al. Normal Contact Stiffness Model of Fine Particle Shot Peening Gear[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2022, 50(9):90-98.
- [16] 孙秀全, 王铁, 张瑞亮, 等. 斜齿轮渐进性磨损对齿轮振动特性的影响分析[J]. 机械传动, 2021, 45(1):17-22.
SUN Xiuquan, WANG Tie, ZHANG Ruiliang, et al. Analysis of the Influence of Progressive Wear of Helical Gear on Gear Vibration Characteristic[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(1):17-22.
- [17] 孙万. 两接触粗糙表面法向接触特性三维分形模型[D]. 太原:太原科技大学, 2021.
SUN Wan. Three-dimensional Fractal Model of Normal Contact Characteristics of Two Contact Rough Surfaces [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2021.
- [18] MAO Hancheng, SUNYongguo, XU Tiantian, et al. Numerical Calculation Method of Meshing Stiffness for the Beveloid Gear Considering the Effect of Surface Topography[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 2021:8886792.

- Inspired Topology Optimization Method[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2014, 84:33-44.
- [4] 丁晓红, 张俊, 张横. 三点支撑 T 形床身机床垫铁位置多目标优化设计[J]. 中国机械工程, 2019, 30(21):2615-2621.
- DING Xiaohong, ZHANG Jun, ZHANG Heng. Multi-objective Design Optimization of Pad-iron Positions for Three-point Supporting T-shaped Bed Machine Tools[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(21):2615-2621.
- [5] 周向阳, 陈立平, 黄正东. 连续体结构与支撑综合拓扑优化设计方法[J]. 农业机械学报, 2008, 39(4):128-131.
- ZHOU Xiangyang, CHEN Liping, HUANG Zhengdong. Topology Optimization Design of Structure and Supports for Continuum-type Structures [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(4):128-131.
- [6] BUHL T. Simultaneous Topology Optimization of Structure and Supports[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2002, 23(5):336-346.
- [7] 胡天男, 丁晓红. 连续体结构及其支撑位置协同优化设计方法[J]. 机械强度, 2021, 43(3):629-635.
- HU Tiannan, DING Xiaohong. Hybrid Optimization Method of Continuum Structure and Its Supporting Locations[J]. Journal of Mechanical Strength, 2021, 43(3):629-635.
- [8] LEE T U, XIE Yi min. Simultaneously Optimizing Supports and Topology in Structural Design[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2021, 197:103633.
- [9] ZHU J H, ZHANG W H. Integrated Layout Design of Supports and Structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(9/12):557-569.
- [10] XIE Y M, STEVEN G P. A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization [J]. Computers & Structures, 1993, 49(5):885-896.
- [11] DING X, YAMAZAKI K. Stiffener Layout Design for Plate Structures by Growing and Branching Tree Model (Application to Vibration-proof Design)[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 26(1):99-110.
- [12] SHEN Lei, DING Xiaohong, HU Tiannan, et al. Simultaneous Optimization of Stiffener Layout of 3D Box Structure Together with Attached Tuned Mass Dampers under Harmonic Excitations [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 64(2):721-737.

(编辑 张 洋)

作者简介:李 简,男,1998 年生,硕士研究生。研究方向为结构优化与分析。E-mail:942748064@qq.com。丁晓红* (通信作者),女,1965 年生,教授、博士研究生导师。研究方向为机械系统和结构的优化设计理论与方法。发表论文 150 余篇。E-mail:dingxsh021@126.com。

本文引用格式:

李简,丁晓红,张轶杰,等.箱型结构加强筋分布及支撑位置的协同优化设计[J].中国机械工程,2025,36(1):69-77.

LI Jian, DING Xiaohong, ZHANG Yijie, et al. Hybrid Optimization for Box Structure Stiffener and Support Location[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(1):69-77.

(上接第 68 页)

- [19] 葛世荣, 朱华. 摩擦学的分形[M]. 北京:机械工业出版社, 2005:126-149.
- GE Shirong, ZHU Hua. Fractal of Tribology[M]. Beijing:China Machine Press, 2005:126-149.
- [20] JOURANI A. A New Three-dimensional Numerical Model of Rough Contact: Influence of Mode of Surface Deformation on Real Area of Contact and Pressure Distribution [J]. Journal of Tribology, 2015, 137(1):011401.
- [21] 刘鹏, 赵韩, 黄康, 等. 线齿段齿轮法向接触刚度的改进分形模型研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7):114-122.
- LIU Peng, ZHAO Han, HUANG Kang, et al. Research on Normal Contact Stiffness of Micro-segments Gear Based on Improved Fractal Model [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7):114-122.
- [22] 刘文, 李锐, 张晋红, 等. 斜齿轮时变啮合刚度算

法修正及影响因素研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(2):1-10.

LIU Wen, LI Rui, ZHANG Jinhong, et al. Study on Correction Algorithm of Time-varying Mesh Stiffness of Helical Gears and Its Influencing Factors[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(2):1-10.

(编辑 张 洋)

作者简介:吴 石*,男,1971 年生,教授、博士研究生导师。研究方向为传动系统设计及智能制造技术、过程检测与诊断技术、机床误差分析。发表论文 70 余篇。E-mail:wushi971819@163.com。

本文引用格式:

吴石,高增阔,王明珠,等.斜齿轮表面形貌分形特征对时变接触刚度的影响[J].中国机械工程,2025,36(1):59-68.

WU Shi, GAO Zengkuo, WANG Mingzhu, et al. Influence of Fractal Features of Helical Gear Surface Topography on Time-varying Contact Stiffness[J]. China Mechanical Engineering, 2025, 36(1):59-68.