

一种运动可解耦的 Stewart 型并联机构的 正运动学及奇异性

黄宁宁¹ 尤晶晶^{1,2*} 叶鹏达³ 沈惠平³ 李成刚⁴ 吴洪涛⁴

1. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京, 210037

2. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆, 400044

3. 常州大学机械与轨道交通学院, 常州, 213164

4. 南京航空航天大学机电学院, 南京, 210016

摘要:六自由度并联机构的正运动学方程非线性且强耦合,一般不具有符号式正解,不利于机器人的实时反馈控制。设计了一种在结构上弱耦合但在运动上可解耦的“7-4”式 Stewart 型并联机构,解析求解了正运动学方程和杆长协调方程,并开展了奇异性研究。基于“2-1”式运动链综合出六自由度“7-4”式 Stewart 型并联机构,并基于方位特征集理论,分析了机构的结构耦合特性。基于13个相容方程并运用四面体几何理论,提出了正运动学方程的一种解析求解算法,同时还证明出一般位形下实数解的个数为8(它们两两关于同一平面对称)。根据动球铰之间的几何约束关系,构建了杆长协调方程,研究发现,该方程也具有符号解。推导了机构的 Jacobian 矩阵,并分析了各种奇异类型。剖析了并联机构正运动学与奇异性之间的内在联系。

关键词:并联机构;正运动学;型综合;奇异性;运动解耦

中图分类号:TH112

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2025.09.006

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Forward Kinematics and Singularity of Kinematically Decoupled Stewart-type Parallel Mechanisms

HUANG Ningning¹ YOU Jingjing^{1,2*} YE Pengda³ SHEN Huiping³ LI Chenggang⁴ WU Hongtao⁴

1.College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing, 210037

2.State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing, 400044

3.College of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu, 213164

4.College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016

Abstract: The forward kinematics equation of the six-degree-of-freedom parallel mechanisms was nonlinear and strongly coupled, and generally did not have a symbolic positive solution, which was not conducive to the real-time feedback control of the robots. Thus, a “7-4” Stewart-type parallel mechanism was designed with weak coupling in structures but decoupled in motions. The forward kinematics equation and link length coordination equation were solved analytically, and the singularity research was carried out. Firstly, based on the “2-1” kinematic links, a six-degree-of-freedom “7-4” Stewart-type parallel mechanism was synthesized, and the structural coupling characteristics of the mechanisms were analyzed based on the azimuth feature set theory. Secondly, based on 13 compatible equations and the theory of tetrahedral geometry, an analytical algorithm for solving the forward kinematics equation was proposed. At the same time, it was proved that the number of real solutions under general configuration was 8(they were symmetrical about the same plane). Then, according to the geometric constraint relationship between the moving ball hinges, the link length coordination equation was constructed. It is found that the equation also has a symbolic solution. The Jacobian matrix of the mechanisms was derived, and various singular types were analyzed. Finally, the internal relationship between the forward kinematics and singularity of the parallel mechanisms was analyzed.

收稿日期:2024-06-10

基金项目:国家自然科学基金(51405237);高端装备机械传动
全国重点实验室开放基金(SKLM-T-MSKFKT-202330)

Key words: parallel mechanism; forward kinematics; type synthesis; singularity; kinematically decoupled

0 引言

并联机构的本质功能是输出运动或者抵抗外负载,具有刚度大、输出精度高、动态特性好等诸多优点^[1],可应用于光纤对接、航空航天、康复治疗等高精尖领域^[2]。在六自由度并联机构中,Stewart型并联机构的应用最为广泛^[3],它是由1个动平台、1个静平台和若干个SPS(S为球面副、P为移动副)支链组成。与Stewart平台机构不同的是,Stewart型并联机构的支链数可以大于6,且动、静平台上的铰链均允许不在一个平面内。

机构正运动学(也称“位置正解问题”)的研究有助于解决机器人的工作精度、效率等问题^[4]。数值法不能得到正运动学方程的全部解,且过于依赖初始值的选取^[5],因此,推导位置正解的符号解(也称“解析解”)具有重要意义。

然而,一般六自由度并联机构的正运动学方程高度非线性且强耦合,不存在符号式正解^[6]。研究发现,并联机构的耦合度越低,则其正解越简单^[7];当多条支链共用一个球铰链时,可大幅度降低机构的耦合度。文献[3]分析了“6-3”式Stewart型并联机构,结果显示,该机构的结构弱耦合,但运动可解耦。然而,由于该机构涉及三重复合球铰链,带来了加工难、装配复杂等多个新的问题。之后,文献[4]设计了“12-6”式Stewart型并联机构,其耦合度为1,且具有符号式正解。虽然该机构中不含三重复合球铰链,但是由于支链的数目过多,工作时容易产生碰撞,这导致机器人的可达工作空间偏小。

奇异性是并联机构的重要性能之一。由于六自由度并联机构的输入、输出量较多,故一般难以辨识出机构的全部奇异位形。该问题的研究方法主要有Jacobian代数法、Grassmann几何法、几何代数法等。ZHAO等^[8]运用Jacobian代数法研究了一种运动冗余并联机构的奇异性,并确定了三类奇异位形。LACOMBE等^[9]运用Jacobian代数法研究了另一种运动冗余并联机构的奇异性,并计算了无奇异工作空间。MONSARRAT等^[10]基于Grassmann几何法找出了六自由度平台型并联机构的奇异位形,并绘制了奇异曲面。CHENG等^[11]基于几何代数法的思想,提出了辨识六自由度并联机构部分奇异位形的一种新方法,并验证了方法的可行性。

本文以二重复合球铰链所在的闭环运动链为突破口,通过“三步法”综合出一种运动可解耦的“7-4”式Stewart型并联机构。分析新机构的结构耦合特性,并解析求解机构的正运动学方程及杆长协调方程。运用Jacobian代数法分析机构的运动特性,并分析了奇异性能。最后,剖析位置正解个数与奇异性的关联。

1 机构的型综合及结构耦合特性分析

1.1 构型综合

1)确定“2-1”式运动链的静球铰位置。图1为“2-1”式运动链简图(“2”和“1”分别代表支链数和动球铰个数),P为动球铰, O_0 、 O_{0^*} 为静球铰。在全局坐标系OXYZ中,它们的坐标分别为 (x_P, y_P, z_P) 、 (x_0, y_0, z_0) 、 $(x_{0^*}, y_{0^*}, z_{0^*})$ 。 O_0P 、 $O_{0^*}P$ 的长度分别为 L_0 、 L_{0^*} 。

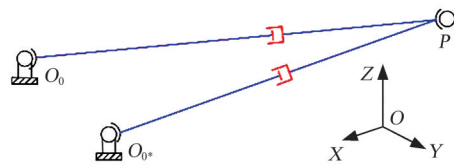


图1 “2-1”式运动链

Fig.1 “2-1” kinematic link

建立杆长约束方程:

$$(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 + (z_P - z_0)^2 = L_0^2 \quad (1)$$

$$(x_P - x_{0^*})^2 + (y_P - y_{0^*})^2 + (z_P - z_{0^*})^2 = L_{0^*}^2 \quad (2)$$

式(1)减去式(2),有

$$L_{0^*}^2 - L_0^2 + x_0^2 - x_{0^*}^2 - 2x_0x_P + 2x_{0^*}x_P + y_0^2 - y_{0^*}^2 - 2y_0y_P + 2y_{0^*}y_P + (z_P - z_0)^2 - (z_P - z_{0^*})^2 = 0 \quad (3)$$

我们发现,若静球铰布置在同一坐标轴上,则式(3)会变得更简单。比如,两个静球铰均布置在Y轴上,则式(3)中的待求量仅剩 y_P 。此时,三元二次方程将退化为线性方程,具有符号解。

2)构造3个“2-1”式运动链。如图2所示,设计由3个“2-1”式运动链组成的“6-3”式Stewart型并联机构。其中,静球铰 O_{1^*} 、 O_1 、 O_3 、 O_{3^*} 位于X轴线上; O_{4^*} 、 O_4 位于Y轴线上;动球铰 Q_1 、 Q_3 、 Q_4 位于一条直线上。此时, Q_1 、 Q_3 、 Q_4 的未知坐标分量数仅剩6个,这大大降低了运动学方程的求解难度。

3)额外添加1条冗余支链。在任意位置添加一条SPS支链(Q_2 位于直线 Q_1Q_3 外即可),如图3所示,综合出“7-4”式Stewart型并联机构。

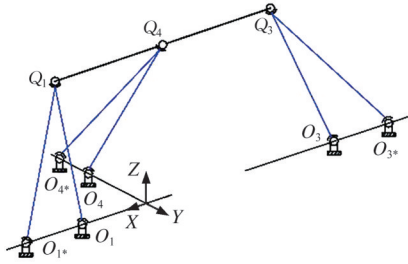


图2 “6-3”式 Stewart 型并联机构
Fig.2 “6-3” Stewart-type parallel mechanism

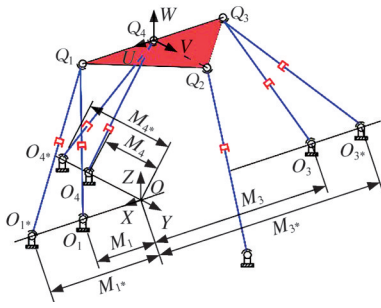


图3 “7-4”式 Stewart 型并联机构
Fig.3 “7-4” Stewart-type parallel mechanism

1.2 结构耦合特性分析

“7-4”式 Stewart 型并联机构在本质上属于 3-HSOC{-R^(3S-2P)-P^(3S-2P)-P^(3S-2P)-S-}-SOC{-O₂-Q₂-}型(HSOC、SOC 分别表示含回路的混合单开链和一般单开链)。所以,动平台的方位特征集(POC 集)等价于 3 个 HSOC 支路末端构件和 1 个 SOC 支路末端构件方位特征集的交集:

$$\dot{M}_P = \bigcap_{i=1}^4 \dot{M}_i = \bigcap_{i=1}^4 \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: \dot{M}_P 为动平台的方位特征集; \dot{M}_i 为第 i 条支路的方位特征集; t^3 和 r^3 表示三个正交方向上均存在移动和转动。

基于机构拓扑结构的分解原则^[12],可确定 SOC 分解路线。首先,取 SOC₁{-O₁*-Q₁-O₁-}, 计算其约束度:

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_1 = 8 - 2 - 6 = 0 \quad (5)$$

式中: m_1 为 SOC₁ 的运动副数; f_i 为第 i 个运动副的自由度(不含局部自由度); I_1 为 SOC₁ 的驱动副数; ξ_1 为第 1 个回路的独立位移方程数。

根据基本运动链的判定方法^[12],SOC₁ 符合约束度的“最小划分”原则,且对应于第 1 条基本运动链,其耦合度为

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} |\Delta_1| = 0 \quad (6)$$

取 SOC₂{-O₄*-Q₄-O₄-}、SOC₃{-O₃*-Q₃-O₃-}, 分别对应于第 2、3 条基本运动链,同理可得

$$\kappa_2 = \kappa_3 = 0 \quad (7)$$

分别将绕 O₁*O₁ 和 O₄*O₄ 的转动记为 R^(O₁*-O₁)、R^(O₄*-O₄)。取 SOC₄{-R^(O₁*-O₁)-Q₁-Q₄-R^(O₄*-O₄)-}, 其约束度为

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{m_4} f_i - I_4 - \xi_4 = 7 - 0 - 6 = 1 \quad (8)$$

分别将绕 Q₁Q₄ 和 O₃*O₃ 的转动记为 R^(Q₁-Q₄)、R^(O₃*-O₃)。取 SOC₅{-R^(Q₁-Q₄)-Q₃-R^(O₃*-O₃)-}, 其约束度为

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{m_5} f_i - I_5 - \xi_5 = 5 - 0 - 6 = -1 \quad (9)$$

第 4 条 BKC(基本运动链)的耦合度为

$$\kappa_4 = \frac{1}{2} (|\Delta_4| + |\Delta_5|) = 1 \quad (10)$$

取 SOC₆{-O₂-Q₂-}, 约束度以及基本运动链的耦合度分别为

$$\Delta_6 = \sum_{i=1}^{m_6} f_i - I_6 - \xi_6 = 6 - 0 - 6 = 0 \quad (11)$$

$$\kappa_5 = 0 \quad (12)$$

由于耦合度是基本运动链的一种拓扑不变量^[13],故整个机构的耦合度为恒定值,即

$$\kappa = \max(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_5) = 1 \quad (13)$$

结果表明,“7-4”式 Stewart 型并联机构在结构上具有弱耦合特性,因此,每条回路的相关变量不能单独求解,而需要对多条回路联立求解。

2 正向运动学模型

2.1 符号式位置正解

为便于描述,将 Q₄ 布置在线段 Q₁Q₃ 的中点。如图 3 所示,建立动坐标系 Q₄UVW, 其原点位于 Q₄ 处,U 轴与 Q₁Q₃ 重合。三条边 Q₁Q₃、Q₁Q₂、Q₂Q₃ 的长度分别为 2N₁、N₂、N₃, 支链的实际长度记为 L_i、L_i* (i=1,3,4)、L₂。

全局坐标系下,静球铰的坐标为

$$\begin{matrix} (O_1, O_{1*}, O_2, O_3, O_{3*}, O_4, O_{4*}) = \\ \begin{bmatrix} M_1 & M_{1*} & x' & -M_3 & -M_{3*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y' & 0 & 0 & -M_4 & -M_{4*} \\ 0 & 0 & z' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (14)$$

式中:M₁、M₁*、M₃、M₃*、M₄、M₄* 分别表示静球铰 O₁、O₁*、O₃、O₃*、O₄、O₄* 至全局坐标系原点的距离,x'、y'、z' 分别表示静球铰 O₂ 在全局坐标系中三个方向的坐标分量。

将动球铰的全局坐标设为待定量:

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{bmatrix} \quad (15)$$

动球铰坐标之间满足如下关系:

$$Q_1 + Q_3 = 2Q_4 \quad (16)$$

$$|Q_1Q_4| = |Q_3Q_4| = N_1 \quad (17)$$

$$|Q_2Q_1| = N_2 \quad (18)$$

$$|Q_2Q_3|=N_3 \tag{19}$$

根据式(14)~式(19),可得

$$\begin{cases} x_3 = 2x - x_1 \\ y_3 = 2y - y_1 \\ z_3 = 2z - z_1 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y + M_4)^2 + z^2 = L_4^2 \\ x^2 + (y + M_{4*})^2 + z^2 = L_{4*}^2 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} (x_1 - M_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 = L_1^2 \\ (x_1 - M_{1*})^2 + y_1^2 + z_1^2 = L_{1*}^2 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} (x_3 + M_3)^2 + y_3^2 + z_3^2 = L_3^2 \\ (x_3 + M_{3*})^2 + y_3^2 + z_3^2 = L_{3*}^2 \end{cases} \tag{23}$$

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = N_1^2 \tag{24}$$

$$(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2 + (z_2 - z')^2 = L_2^2 \tag{25}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = N_2^2 \tag{26}$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = N_3^2 \tag{27}$$

结合式(20)~式(24),可解析求解出4个未知量:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-L_1^2 + L_{1*}^2 + M_1^2 - M_{1*}^2}{2(M_1 - M_{1*})} \\ x = \frac{L_3^2 - L_{3*}^2 - M_3^2 + M_{3*}^2 + 2M_3x_1 - 2M_{3*}x_1}{4(M_3 - M_{3*})} \\ y = \frac{L_4^2 - L_{4*}^2 - M_4^2 + M_{4*}^2}{2(M_4 - M_{4*})} \\ z = \pm \sqrt{\frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} - N_1^2 + x^2 - 2xx_1 + x_1^2 - y^2} \end{cases} \tag{28}$$

$$\mu_1 = L_1^2 - (x_1 - M_1)^2 \quad \mu_2 = L_3^2 - (2x - x_1 + M_3)^2$$

将 x_1 代入式(22)、式(23),可得 y_1, z_1 的符号解:

$$\begin{cases} y_1 = \mu_3(\mu_1 y - \mu_2 y + 4y^3 + 4yz^2 \mp z\mu_5) \\ z_1 = \mu_4(\mu_1 z^2 - \mu_2 z^2 + 4y^2 z^2 + 4z^4 \pm yz\mu_5) \end{cases} \tag{29}$$

$$\mu_3 = [4(y^2 + z^2)]^{-1} \quad \mu_4 = z^{-1}\mu_3 \quad \mu = \mu_3^{-1}$$

$$\mu_5 = \sqrt{2\mu_1(\mu_2 + \mu) - \mu_1^2 - (\mu_2 - \mu)^2}$$

O_2, Q_2, Q_3, Q_1 构成四面体结构,见图4。

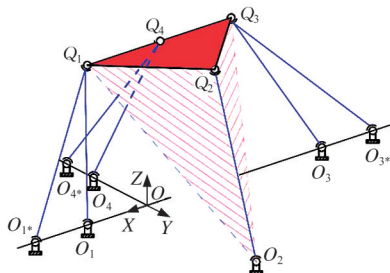


图4 四面体 $Q_2O_2Q_3Q_1$

Fig.4 Tetrahedron $Q_2O_2Q_3Q_1$

联立式(25)~式(29),可解析求得 Q_2 点坐标:

$$\begin{cases} x_2 = f^{(\rho)}(L_i, L_{i*}) \\ y_2 = f^{(\rho)}(L_i, L_{i*}) \\ z_2 = f^{(\rho)}(L_i, L_{i*}) \end{cases} \tag{30}$$

式中: $f^{(\rho)}$ 为关于7个杆长的函数,限于篇幅,不列出具体表达式;角标 ρ 表示多解,取1、2。

完整的推导流程如图5所示。

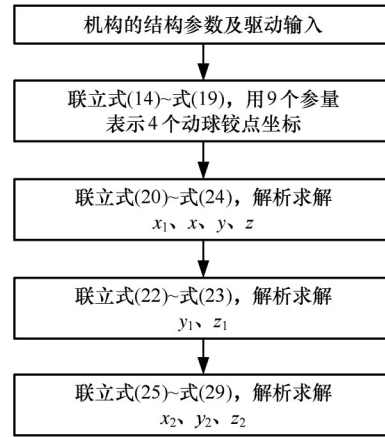


图5 正解流程

Fig.5 Process of forward position solution

一般情况下,“7-4”式 Stewart 型并联机构具有8组位置正解,见表1。

表1 正运动学方程的多解性

Tab.1 Multiple solutions of forward kinematics

组别	Q_4	Q_1	Q_2
1	$^{(1)}Q_4$	$^{(1)}Q_{1(1)}$	$^{(1)}Q_{2(1)}$
2			$^{(1)}Q_{2(2)}$
3		$^{(1)}Q_{1(2)}$	$^{(1)}Q_{2(3)}$
4			$^{(1)}Q_{2(4)}$
5	$^{(2)}Q_4$	$^{(2)}Q_{1(1)}$	$^{(2)}Q_{2(1)}$
6			$^{(2)}Q_{2(2)}$
7		$^{(2)}Q_{1(2)}$	$^{(2)}Q_{2(3)}$
8			$^{(2)}Q_{2(4)}$

注:表中,左上角标表示 Q_4 的多解;右下角标表示 Q_1, Q_2 的多解。

值得一提的是, $^{(1)}Q_4$ 和 $^{(2)}Q_4$ 分别位于 OXY 平面的两侧且关于该平面对称。

2.2 数值算例

任意选取结构参数及输入参数(见表2)。根据式(28)~式(30),计算各球铰的坐标。理论计算结果和虚拟试验结果如图6所示,两者吻合较好,这验证了正向运动学模型的正确性。另外,对应的机构位形简图如表3所示。观察发现,8组解中,两两关于 OXY 平面对称,这与第2节的结论也完全吻合。

3 杆长协调方程

“7-4”式 Stewart 型并联机构属于冗余驱动器

表 2 结构参数及输入参数

Tab.2 Mechanism parameters and input parameters

参数	数值	参数	数值	参数	数值
M_1	20.000	M_4	50.000	L_4	67.823
M_{1^*}	40.000	M_{4^*}	70.000	L_{4^*}	86.023
x'	0.000	L_1	38.356	N_1	30.000
y'	30.000	L_{1^*}	35.323	N_2	42.426
z'	0.000	L_2	35.868	N_3	42.426
M_3	40.000	L_3	43.111		
M_{3^*}	60.000	L_{3^*}	56.878		

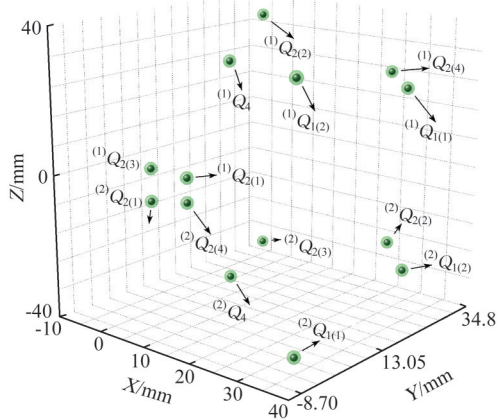


图 6 理论计算和虚拟试验结果

Fig.6 Theoretical calculation and virtual test results

构,其 7 个输入杆长之间存在 1 个协调方程。式(28)、式(29)显示, Q_1, Q_3, Q_4 的坐标式中不含 L_2 , 这说明 O_2Q_2 长度与其他 6 个输入杆长之间不存在协调关系, 因此, $L_1, L_{1^*}, L_3, L_{3^*}, L_4, L_{4^*}$ 之间就必然存在 1 个协调方程。

联立式(20)~式(29)可得

$$[2a_6a_7(a_1 - L_1^2 + L_{1^*}^2) + a_9(a_5 + L_4^2 - L_{4^*}^2) - a_{10}(a_3 + L_3^2 - L_{3^*}^2) + a_2a_2a_6(L_1^2 + L_3^2 - 2L_{4^*}^2 + a_8)] / (2a_2a_2a_6) = 0 \quad (31)$$

$$a_1 = M_1^2 - M_{1^*}^2 \quad a_2 = 2(M_1 - M_{1^*})$$

表 4 理论计算与试验测量数据

Tab.4 Theoretical calculation and experimental measurement data

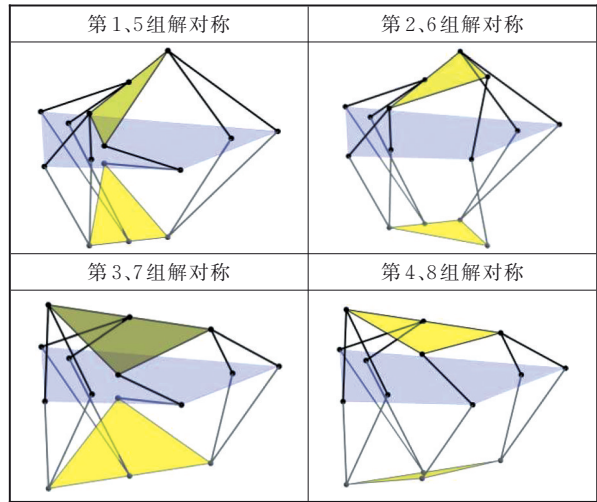
	任意选取的数据/mm					理论计算/mm	试验测量/mm
	L_{1^*}	L_3	L_{3^*}	L_4	L_{4^*}		
1	35.322 97	43.1105 4	56.877 73	67.823 30	86.023 25	38.353 63	38.353 63
2	40.176 93	59.772 10	72.626 50	75.952 01	94.417 73	34.857 32	34.857 32
3	46.904 13	103.453 64	114.832 72	100.749 83	117.764 71	43.452 25	43.452 25

4 奇异性研究

奇异性是机构的固有属性。在奇异位形下, 机构的自由度(包括数目、类型)会发生改变。较为常见的奇异有模型奇异、位形奇异、结构奇异。

表 3 机构位形简图

Tab.3 Schematic diagram of mechanism configuration



$$a_3 = -M_3^2 + M_{3^*}^2 \quad a_4 = 4(M_3 - M_{3^*})$$

$$a_5 = -M_4^2 + M_{4^*}^2 \quad a_6 = 2(M_4 - M_{4^*})$$

$$a_7 = a_4(M_1 + M_3) + 4M_3(M_{3^*} - M_3)$$

$$a_8 = -M_1^2 - M_3^2 + 2M_{4^*}^2 - 2N_1^2$$

$$a_9 = 4a_2a_4M_{4^*}a_{10} \quad a_{10} = 4a_2a_6M_3$$

不失一般性, 将 L_1 视为未知量, 则式(31)是关于 L_1 的一元二次方程, 存在唯一可行的符号解(负根无意义, 应剔除):

$$L_1 = ([a_{10}(a_3 + L_3^2 - L_{3^*}^2) - a_9(a_5 + L_4^2 - L_{4^*}^2) + a_2a_4a_6(2L_{4^*}^2 - L_3^2 - a_8) - 2a_6a_7(a_1 + L_{1^*}^2)] / \{a_6[a_2a_4 - 2a_4(M_1 + M_3) + 8M_3(M_3 - M_{3^*})]\})^{1/2} \quad (32)$$

也就是说, 该冗余并联机构的协调方程也具有符号解。为验证其正确性, 将表 2 中静球铰的坐标代入式(32):

$$L_1 = \sqrt{\frac{5600 + L_{1^*}^2 - 3L_3^2 + 2L_{3^*}^2 + 7L_4^2 - 5L_{4^*}^2}{2}} \quad (33)$$

任意选取 3 组 $L_{1^*}, L_3, L_{3^*}, L_4, L_{4^*}$ 的数据, 根据式(33)计算对应的 L_1 。理论计算与试验测量结果完全一致(表 4)。

其中, 结构奇异只有在动、静平台形状完全相似且对应边呈同方向布置时才会产生。由于“7-4”式 Stewart 型并联机构的动、静平台形状不相似, 故此机构不存在结构奇异。另外, Stewart 型并联机构还可能会存在三类特殊奇异位形, 包括 Hunt 奇

异、Fichter 奇异和共线驱动奇异。

4.1 Jacobian 矩阵

为便于描述,将动平台设置成腰长 $\sqrt{2}n$ 的等腰直角三角形(见图3)。动球铰坐标可表示为

$$Q_i = RQ'_i + Q_4 \quad (34)$$

$$R = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\gamma sa s\beta - s\gamma ca & ca s\beta c\gamma + sa s\gamma \\ s\gamma c\beta & sa s\beta s\gamma + ca c\gamma & s\beta s\gamma ca - c\gamma sa \\ -s\beta & c\beta sa & ca c\beta \end{bmatrix} \quad (35)$$

式中: Q'_i 为动球铰在动坐标系中的坐标; R 为动坐标系相对于全局坐标系的旋转矩阵; c 表示 \cos ; s 表示 \sin ; α, β, γ 为欧拉角。

进一步地,列出机构的运动学方程:

$$\left. \begin{aligned} L_i^2 &= (O_i Q_i)^T (O_i Q_i) \\ L_{i^*}^2 &= (O_{i^*} Q_i)^T (O_{i^*} Q_i) \\ L_2^2 &= (O_2 Q_2)^T (O_2 Q_2) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式(36)各式等号两端同时对时间求一阶导数,整理后可得

$$J' \dot{L} = J \dot{X} \quad (37)$$

$$\dot{L} = (\dot{L}_1, \dot{L}_{1^*}, \dot{L}_2, \dot{L}_3, \dot{L}_{3^*}, \dot{L}_4, \dot{L}_{4^*})^T \quad (38)$$

$$\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T \quad (39)$$

$$J' = \text{diag}(L_1, L_{1^*}, L_2, L_3, L_{3^*}, L_4, L_{4^*}) \quad (40)$$

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & a_{1^*} & a_2 & a_3 & a_{3^*} & a_4 & a_4 \\ b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_3 & b_4 & b_{4^*} \\ d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & d_3 & d_4 & d_4 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_{1^*} & B_2 & B_3 & B_{3^*} & 0 & 0 \\ D_1 & D_{1^*} & D_2 & D_3 & D_{3^*} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (41)$$

式中: J', J 分别为输入、输出 Jacobian 矩阵; \dot{L}, \dot{X} 分别为驱动杆的输入速度矢量、动平台的输出速度矢量; $\dot{L}_1, \dot{L}_{1^*}, \dot{L}_2, \dot{L}_3, \dot{L}_{3^*}, \dot{L}_4, \dot{L}_{4^*}$ 分别为对应驱动杆的速度; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别为动平台的速度及角速度。

J 中部分元素的表达式列于表5中。

4.2 模型奇异

观察式(41)后发现,当 $\beta=90^\circ$ 时, Jacobian 矩阵变成:

$$J_1 = 2[J_{11} \quad J_{12} \quad J_{13} \quad J_{14} \quad J_{15} \quad J_{16}] \quad (42)$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} x - M_1 \\ x - M_{1^*} \\ nc\gamma sa - x' + x - nca s\gamma \\ M_3 + x \\ M_{3^*} + x \\ x \\ x \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ nca c\gamma - y' + y + nsa s\gamma \\ y \\ y \\ M_4 + y \\ M_{4^*} + y \end{bmatrix}$$

表5 J 中部分元素的解析式

Tab.5 Some elements in J

a_j	$2x + 2nc\beta c\gamma - 2M_j$
b_1	$2y + 2nc\beta s\gamma$
d_1	$2z - 2ns\beta$
a_2	$2(x - x' + nc\gamma sa s\beta - nca s\gamma)$
b_2	$2(y - y' + nca c\gamma + nsa s\beta s\gamma)$
d_2	$2(z - z' + nc\beta sa)$
a_e	$2(M_e + x - nc\beta c\gamma)$
b_h	$2(y - nc\beta s\gamma)$
d_3	$2(z + ns\beta)$
a_4	$2x$
b_h	$2(M_h + y)$
d_4	$2z$
B_j	$-2n \{zc\beta + s\beta [(x - M_j)c\gamma + ys\gamma]\}$
D_j	$2nc\beta [yc\gamma + (M_j - x)s\gamma]$
B_e	$2n \{zc\beta + s\beta [(M_e + x)c\gamma + ys\gamma]\}$
D_e	$2nc\beta [-yc\gamma + (M_e + x)s\gamma]$
A_2	$-2n \{sa [(y - y')c\gamma + (x' - x)s\gamma] + ca \{(z' - z)c\beta + s\beta [(x' - x)c\gamma + (y' - y)s\gamma]\}\}$
B_2	$2nsa \{(z' - z)s\beta + c\beta [(x - x')c\gamma + (y - y')s\gamma]\}$
D_2	$2n \{sa s\beta [(y - y')c\gamma + (x' - x)s\gamma] + ca [(x' - x)c\gamma + (y' - y)s\gamma]\}$

注:表中, $j=1, 1^*; e=3, 3^*; h=4, 4^*$ 。

$$J_{13} = \begin{bmatrix} z - n \\ z - n \\ z - z' \\ n + z \\ n + z \\ z \\ z \end{bmatrix} \quad J_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{15} = \begin{bmatrix} n((M_1 - x)c\gamma - ys\gamma) \\ n((M_{1^*} - x)c\gamma - ys\gamma) \\ n(z' - z)sa \\ n((M_3 + x)c\gamma + ys\gamma) \\ n((M_{3^*} + x)c\gamma + ys\gamma) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = n \{sa [(y - y')c\gamma + (x' - x)s\gamma] + ca [(x' - x)c\gamma + (y' - y)s\gamma]\}$$

此时, Jacobian 矩阵的秩为5,这说明机构出现了奇异。改变欧拉角的转动次序(如“3-1-3”式),重新推导 Jacobian 矩阵。结果显示,同一位形下, Jacobian 矩阵满秩。这表明,上述奇异为模型奇异^[14],是由不合适的数学表达导致的。

4.3 位形奇异

4.3.1 姿态奇异

当动平台位于初始位置时,并联机构的姿态

奇异曲面方程为

$$t_2^4(1-t_3^2)(t_3\sqrt{1-t_1^2}+t_1t_2-t_1\sqrt{1-t_2^2}\sqrt{1-t_3^2})^2=0 \quad (43)$$

$$t_1=\cos \alpha \quad t_2=\cos \beta \quad t_3=\cos \gamma$$

特殊地,当 $t_2=0$ (即 $\beta=90^\circ$)时,机构位于模型奇异位形;当 $1-t^2=0$ (即 $\gamma=0^\circ$ 或 180°)时,机构位于 Hunt 奇异位形。

当式(43)的等号左边第三项等于 0 时,绘制机构的奇异曲面图,如图 7 所示。观察图 7 可知,姿态奇异曲面是一个旋转对称图形,且其两端存在凹槽。在曲面上任取一点,其姿态为 $\alpha=144.0675^\circ$ 、 $\beta=30^\circ$ 、 $\gamma=45^\circ$,对应的机构位形如图 8 所示。

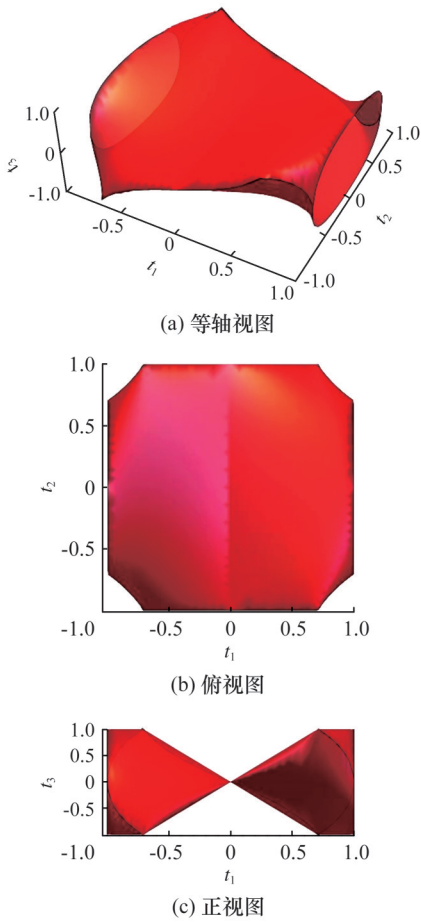


图 7 姿态奇异曲面

Fig.7 Orientation singular surface

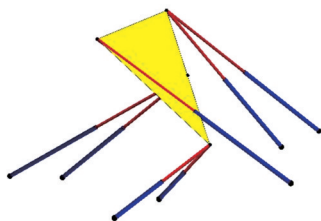


图 8 姿态奇异位形

Fig.8 Orientation singular configuration

4.3.2 位置奇异

当动平台位于初始姿态时,并联机构的位置奇异曲面方程为

$$z^6=0 \quad (44)$$

可见,只有当 $z=0$ 时,机构才会发生奇异,如图 9 所示。

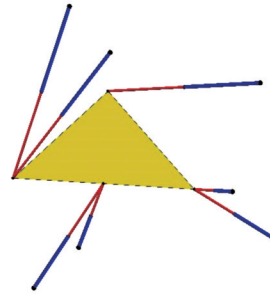


图 9 位置奇异位形

Fig.9 Position singular configuration

4.4 其他几类著名奇异

4.4.1 Hunt 奇异

当全部驱动支链的线矢相交于一条直线时,机构发生 Hunt 奇异^[15]。研究发现,“7-4”式 Stewart 型并联机构可能存在 3 种 Hunt 奇异。

第 1 种 Hunt 奇异:动、静平台共面(图 10)。特殊地,当 $z=\alpha=\beta=0$ 时,Jacobian 矩阵 J_2 如下:

$$J_2=2[J_{21} \quad J_{22} \quad J_{23} \quad J_{24} \quad J_{25} \quad J_{26}] \quad (45)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} x - M_1 + ncy \\ x - M_{1*} + ncy \\ x - nsy \\ M_3 + x - ncy \\ M_{3*} + x - ncy \\ x \\ x \end{bmatrix} \quad J_{22} = \begin{bmatrix} y + nsy \\ y + nsy \\ y - 30 + ncy \\ y - nsy \\ y - nsy \\ M_4 + y \\ M_{4*} + y \end{bmatrix}$$

$$J_{23} = J_{24} = J_{25} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{26} = \begin{bmatrix} n(ycy + (M_1 - x)sy) \\ n(ycy + (M_{1*} - x)sy) \\ n((30 - y)sy - xcy) \\ n((M_3 + x)sy - ycy) \\ n((M_{3*} + x)sy - ycy) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此时,Jacobian 矩阵的秩为 3,说明机构存在 3 个自由度未被约束。结合式(37)可知,该奇异下, \dot{z} 、 ω_x 、 ω_y 的系数为零。这说明,即使锁合全部的驱动副,机构仍具有沿 Z 轴的移动自由度和绕 X 轴、Y 轴的转动自由度。

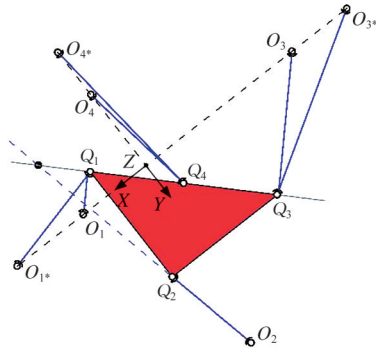


图10 第1种 Hunt 奇异位形

Fig.10 The first Hunt's singularity

第2种 Hunt 奇异:当 $O_1Q_1, O_{1^*}Q_1, O_{3^*}Q_3, O_3Q_3$ 共面, $O_2Q_2, O_{4^*}Q_4, O_4Q_4$ 共面, 且所有支链与 OQ_4 都不平行时, 机构发生 Hunt 奇异(图 11), 此时, OQ_4 为瞬时旋转轴。

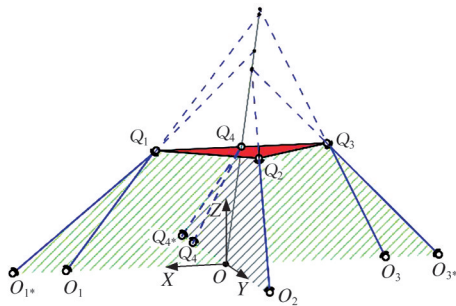


图11 第2种 Hunt 奇异位形

Fig.11 The second Hunt's singularity

特殊地, 当 $x=y=z=0$ 时, Jacobian 矩阵 J_3 如下:

$$J_3 = 2 \begin{bmatrix} J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$J_{31} = \begin{bmatrix} nc\beta - M_1 \\ nc\beta - M_{1^*} \\ nsa s\beta \\ M_3 - nc\beta \\ M_{3^*} - nc\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ nca - 30 \\ 0 \\ 0 \\ M_4 \\ M_{4^*} \end{bmatrix}$$

$$J_{33} = \begin{bmatrix} z - ns\beta \\ z - ns\beta \\ z + nc\beta sa \\ z + ns\beta \\ z + ns\beta \\ z \\ z \end{bmatrix} \quad J_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n(zca c\beta + 30sa) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{35} = \begin{bmatrix} n(M_1s\beta - zc\beta) \\ n(M_{1^*}s\beta - zc\beta) \\ -2nzsa s\beta \\ n(zc\beta + M_3s\beta) \\ n(zc\beta + M_{3^*}s\beta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_{36} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -60nsa s\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此时, Jacobian 矩阵的秩为 5。可见机构存在

一个自由度未被约束, 即沿 OQ_4 轴的转动。

第3种 Hunt 奇异: 若直线 O_2Q_2 与 Q_1Q_3 有交点, 则所有驱动杆所在直线存在公共交线, 此时, 即使锁合全部驱动副, 仍存在 Q_1Q_3 为旋转轴的瞬时转动, 见图 12。

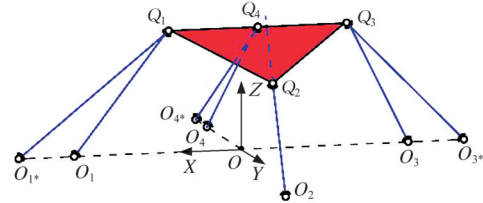


图12 第3种 Hunt 奇异位形

Fig.12 The third Hunt's singularity

4.4.2 Fichter 奇异

当动、静平台平行时, 将动平台绕 Z 轴转动 $\pm 90^\circ$, 若 Jacobian 矩阵失秩, 则机构处于 Fichter 奇异^[16]位形。对于“7-4”式 Stewart 型并联机构, 当 $\alpha=\beta=0, \gamma=90^\circ$ 或 -90° 时, Jacobian 矩阵 J_4 为

$$J_4 = 2 \begin{bmatrix} x - M_1 & \delta + y & z & 0 & -nz & \delta(M_1 - x) \\ x - M_{1^*} & \delta + y & z & 0 & -nz & \delta(M_{1^*} - x) \\ x - \delta & y - 30 & z & nz & 0 & \delta(30 - y) \\ M_3 + x & y - \delta & z & 0 & nz & \delta(M_3 + x) \\ M_{3^*} + x & y - \delta & z & 0 & nz & \delta(M_{3^*} + x) \\ x & M_4 + y & z & 0 & 0 & 0 \\ x & M_{4^*} + y & z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

式中: 当 $\gamma=90^\circ$ 时, $\delta=n$; 当 $\gamma=-90^\circ$ 时, $\delta=-n$ 。

只有当机构的结构参数满足 $M_1=M_{1^*}, M_3=M_{3^*}, M_4=M_{4^*}$ 的特殊几何关系时, Jacobian 矩阵才会失秩。但是, 由于“7-4”式 Stewart 型并联机构的 7 个静球铰互不重合, 故上述关系不成立, 即本机构不存在 Fichter 奇异。

4.4.3 共线驱动奇异

在动平台上任意选取 Q 点为参考点, 根据速度基点法可得

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{L}_{i^*} \\ \dot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i^T & (QQ_i \times h_i)^T \\ h_{i^*}^T & (QQ_{i^*} \times h_{i^*})^T \\ h_2^T & (QQ_2 \times h_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_Q \\ \omega \end{bmatrix} \quad (48)$$

式中: V_Q, ω 为 Q 点的线速度和动平台的角速度; h_i, h_{i^*}, h_2 为支链的单位向量。

将式(48)整理成矩阵形式:

$$\dot{L} = J_5 \dot{X}' \quad (49)$$

$$J_5 = \begin{bmatrix} h_k \\ QQ_1 \times h_k \end{bmatrix}^2 \quad (50)$$

式中: \dot{X}' 为机构动平台的速度矢量, $\dot{X}' = (V_Q, \omega)^T$; J_5 为运用速度基点法得到的 Jacobian 矩阵; k 依次为 1, 1*, 2, 3, 3*, 4, 4*。

运用矩阵理论可知,只要本机构中存在3条共线的支链, J_5 就会失秩,对应于“共线驱动奇异”。“7-4”式 Stewart 型并联机构存在多种共线驱动奇异位形,如 O_1Q_1 和 $O_{1^*}Q_1$ 共线且 O_3Q_3 和 $O_{3^*}Q_3$ 共线(图 13a), O_4Q_4 、 $O_{4^*}Q_4$ 、 O_2Q_2 共线(图 13b)。分析图 13b 可知,7 条驱动杆所在直线的公共交线为 Q_1Q_3 ,基于 4.4.1 节的结论,这同时也属于第 3 种 Hunt 奇异。也就是说,同一个特殊位形可能同时属于多种奇异类型。

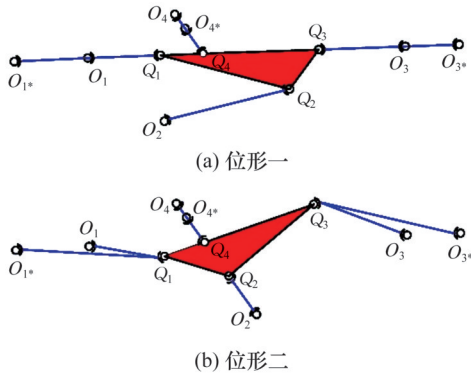


图 13 共线驱动奇异位形

Fig.13 Colinearly actuation singularity

5 位置正解个数与奇异性的关联

基于 2.1 节的研究可知,机构的 8 组位置正解对应的构型中,两两关于 OXY 平面对称,因此,本节仅研究动平台位于 OXY 平面上方时,位置正解个数与奇异性之间的关联。

观察式(29)可知,当 μ_5 为 0 时, Q_1 点坐标存在唯一解。此时

$$2\mu_1(\mu_2 + \mu) - \mu_1^2 - (\mu_2 - \mu)^2 = 0 \quad (51)$$

结合静球铰的布置情况可知,点 Q_1 、 Q_3 的运动轨迹均为垂直于 X 轴且平行于 OYZ 平面的圆(图 14)。当机构的结构参数满足式(51)时,两个圆心的距离与杆 Q_1Q_3 的长度相等。当驱动杆 O_1Q_1 、 $O_{1^*}Q_1$ 、 O_3Q_3 、 $O_{3^*}Q_3$ 、 O_4Q_4 、 $O_{4^*}Q_4$ 之间不存在平行关系时,这 6 个驱动杆所在的线矢存在一条除直线 Q_1Q_3 之外的公共交线,即 Q_4H_2 。

由于 O_2 点可以任意布置,当杆 O_2Q_2 位于平面 $H_2Q_4Q_2$ 上且与 Q_4H_2 不平行时,7 条驱动杆所在的线矢相交于 Q_4H_2 。根据 4.4.1 节的结论,此时机构处于第 2 种 Hunt 奇异位形。

根据文献[3]中的四面体原理,当 Q_2 点坐标存在唯一解时,点 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_2 位于同一平面内(图 15),且直线 Q_2Q_2 与 Q_1Q_3 存在交点 Q_3 。基于 4.4.1 节的结论,此时并联机构处于第 3 种 Hunt 奇异位形。

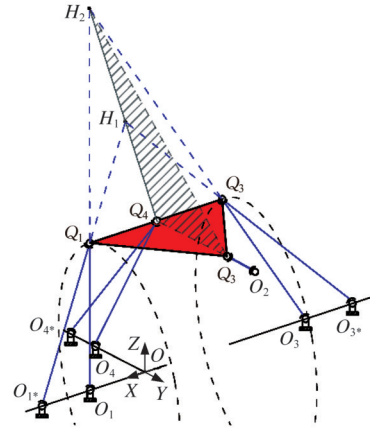


图 14 点 Q_1 、 Q_3 的运动轨迹

Fig.14 Points Q_1 、 Q_3 trajectory of motion

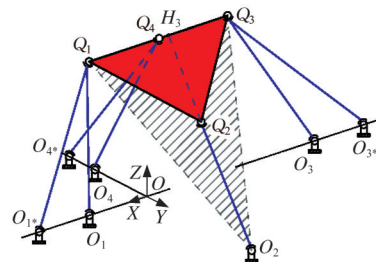


图 15 Q_2 点存在唯一解

Fig.15 Unique solution at point Q_2

综上可得“7-4”式 Stewart 型并联机构的位置正解个数与奇异性之间的对应关系,见表 6。观察表 6 可知,只要 Q_2 的位置正解为重根(Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 O_2 共面),机构就一定处于 Hunt 奇异位形。

6 结论

1) 基于“2-1”式闭环运动链综合出一种运动可解耦的“7-4”式 Stewart 型并联机构。运用 POC 集理论,分析出该机构在结构上表现为弱耦合的拓扑特性,有利于位置正解的求解。

2) 通过构建 13 个相容方程,推导了关于动球铰坐标分量的 10 个二次多项式,并解析求解出 8 组位置正解,它们两两关于 OXY 平面对称。

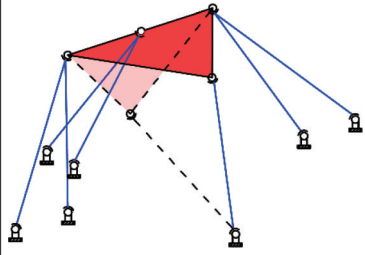
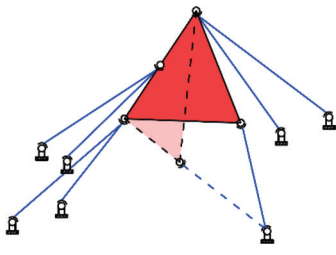
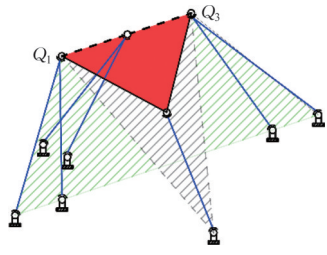
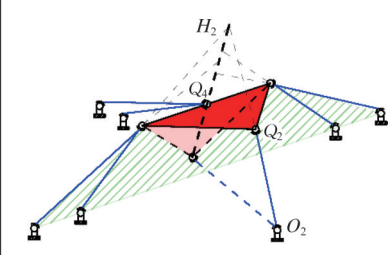
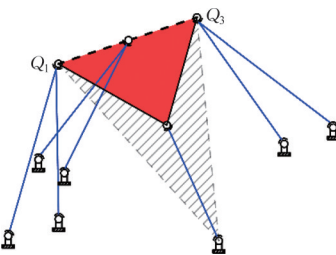
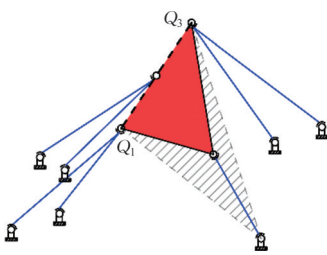
3) 该冗余驱动并联机构的协调关系可表达为一元二次方程,具有符号解,这为机器人的实时协调控制提供了理论条件。

4) 运用 Jacobian 代数法辨识出了该并联机构的模型奇异、位形奇异、3 种 Hunt 奇异、共线驱动奇异。另外,研究发现,该机构不存在结构奇异和 Fichter 奇异。

5) 当动球铰 Q_2 的坐标解个数为 1 时,并联机构最多存在 2 组位置正解,且一定对应于 Hunt 奇异位形。

表6 位置正解个数与奇异性的对应关系

Tab.6 Relationship between the number of forward position solutions and singularity

四组位置正解		一组位置正解	
构型			
奇异	无奇异位形		Hunt 奇异, Q_1Q_3 为瞬时旋转轴
两组位置正解			
构型			
奇异	若 O_2 点位于面 $H_2Q_4Q_2$ 上, 则为 Hunt 奇异, Q_4H_2 为瞬时旋转轴		Hunt 奇异, Q_1Q_3 为瞬时旋转轴

注:表中用浅色阴影表示点的共面情况。

参考文献:

[1] 谢志江,程清,丁军,等. 双支链六自由度并联机构尺度设计与性能分析[J]. 中国机械工程, 2022, 33(14):1680-1690.
XIE Zhijiang, CHENG Qing, DING Jun, et al. Dimensional Design and Performance Analysis of a 6-DOF Parallel Manipulator with Two Limbs[J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(14):1680-1690.

[2] SABATÉ N, ESQUIVEL J P, SANTANDER J, et al. New Approach for Batch Microfabrication of Silicon-based Micro Fuel Cells [J]. Microsystem Technologies, 2014, 20(2):341-348.

[3] YOU Jingjing, XI Fengfeng, SHEN Huiping, et al. A Novel Stewart-type Parallel Mechanism with Topological Reconfiguration: Design, Kinematics and Stiffness Evaluation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 162:104329.

[4] 尤晶晶,符周舟,吴洪涛,等. 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究[J]. 农业机械学报, 2017, 48(12):395-402.
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward Kinematics of General 12-6 Stewart Redundant Parallel Mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12):395-402.

[5] ZHOU Wanyong, CHEN Wuyi, LIU Huadong, et al. A New Forward Kinematic Algorithm for a General Stewart Platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 87:177-190.

[6] YANG Xiaolong, WU Hongtao, LI Yao, et al. A Dual Quaternion Solution to the Forward Kinematics of a Class of Six-DOF Parallel Robots with Full or Reductant Actuation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 107:27-36.

[7] 沈惠平,仲锐,李菊,等. 运动副分布顺序对并联机构运动学与动力学性能的影响[J]. 农业机械学报, 2023, 54(7):412-426.
SHEN Huiping, ZHONG Rui, LI Ju, et al. Influence of Different Distribution Order of Joints on Kinematic and Dynamic Performance of Parallel Mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(7):412-426.

[8] ZHAO Fuqun, GUO Sheng, ZHANG Chengyu, et al. Singularity Analysis and Dexterity Performance on a Novel Parallel Mechanism with Kinematic Redundancy [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019, 16(5):1729881419872641.

[9] LACOMBE J, GOSSELIN C. Singularity Analysis of a Kinematically Redundant (6+2)-DOF Parallel Mechanism for General Configurations [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 176:105015.

[10] MONSARRAT B, GOSSELIN C M. Singularity Analysis of a Three-leg Six-degree-of-freedom Parallel Platform Mechanism Based on Grassmann Line Geometry [J]. The International Journal of Robotics Research, 2001, 20(4):312-328.

(下转第1967页)