

DOI: 10.15886/j.cnki.hdxzbk.2024030201

CSTR: 32403.14.hndk.2024030201

数理基础科学



引用格式: 余怡霖, 仓乃梦, 郭东生, 等. 基于泰勒展开的新型差分公式设计与应用研究 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文), 2025, 43(1): 73–80.

Citation: YU Yilin, CANG Naimeng, GUO Dongsheng, et al. Design and application of a new difference formula based on Taylor's Expansion[J]. Natural Science of Hainan University, 2025, 43(1): 73–80.

基于泰勒展开的新型差分公式设计与应用研究

余怡霖¹, 仓乃梦¹, 郭东生^{1*}, 李煊鲜², 邵 辉²

(1. 海南大学 信息与通信工程学院, 海南 海口 570228;

2. 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 针对欧拉差分公式精度不高的问题, 提出一种新型数值差分公式用以实现对目标函数一阶导数的估算。基于泰勒级数展开原理, 研究目标函数在不同数据点下的展开式, 通过移项变换消除展开式的高阶项, 从而推导得到具有较高计算精度的新型数值差分公式, 并通过理论分析给出新型数值差分公式的最优步长, 数值实验结果验证了所提出的新型数值差分公式的有效性。UR5 机械臂的仿真实验证明了采样时间为 0.01 s 时, 机械臂运动精度提高 10 000 倍, 进一步验证了新型数值差分公式的优越性。

关键词: 泰勒级数展开; 数值差分公式; 一阶导数; 最优步长

中图分类号: O174.42

文献标志码: A

文章编号: 1004-1729(2025)01-0073-08

Design and application of a new difference formula based on Taylor's Expansion

YU Yilin¹, CANG Naimeng¹, GUO Dongsheng^{1*}, LI Xuanxian², SHAO Hui²

(1. School of Information and Communication Engineering, Hainan University, Haikou 570228, China;

2. School of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Aimed at the problem that the accuracy of Euler's difference formula is low, in the report, a new numerical difference formula for estimating the first-order derivative of the objective function was proposed. Based on Taylor Series Expansions, the expanded forms of the objective function at difference data points were presented. Aided with the transposition and conversion, the higher order terms in the expanded forms were eliminated, and the new numerical difference formula with high computational precision was thus derived. The theoretical analysis was performed to obtain the optimal step size of the difference formula. The effectiveness of the proposed new numerical difference formula was verified by the numerical experimental results. The simulation experiment of UR5 manipulator proved that when the sampling time was 0.01 s, the motion accuracy of the manipulator was increased by 10 000 times, which further verified the superiority of the new numerical difference formula.

Keywords: Taylor series expansion; numerical difference formula; first-order derivative; optimal step size

收稿日期: 2024-03-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(U2141234); 海南省重点研发项目(ZDYF2024GXJS003); 海南大学科研启动基金项目(KYQD(ZR)23025)

作者简介: 余怡霖(2000—), 男, 重庆沙坪坝人, 海南大学信息与通信工程学院 2022 级硕士研究生, E-mail: yilinyu2022@163.com

通信作者: 郭东生(1987—), 男, 广西梧州人, 博导, 教授, 研究方向: 数值计算、神经网络、机器人技术, E-mail: gdongsh2022@hainanu.edu.cn

0 引言

数值微分在工程方面的应用十分广泛^[1, 3-4] 常用来求解常微分方程和偏微分方程。数值微分的思想是通过目标函数在不同数据点上的离散值来估算函数的导数,即利用在一些点上的函数值来计算出满足精度要求的目标函数导数的近似值。数值微分的核心是设计数值差分公式来有效估算目标函数的各阶导数^[2]。在数值差分公式的设计方面,较为经典的就是通过插值多项式(如 Lagrange 或 Newton 插值多项式)推导而得到差分公式,相应的公式也称为插值型差分公式^[2, 6-8]。此外,为了提高数值差分公式的计算精度,不同的外推算法(如 Richardson 外推法)被相继提出,并得到数值差分公式的外推形式^[2, 5, 9-11]。根据公式的外推形式,建立相应的计算表格。通过不断地减小步长,得到的计算结果较为准确,从而提高了数值差分公式的精度。

鉴于一阶导数在工程中的重要性,研究学者提出了不同形式的数值差分公式用以实现对目标函数一阶导数的估算^[10, 12-14]。例如,文献[10]基于四次 Lagrange 插值多项式来推导得到五点数数值差分公式;文献[14]则采用 Hermite 函数估计法来设计得到相应的数值差分公式。不同于现有的研究,笔者基于泰勒级数展开原理来设计一种新型数值差分公式来估算目标函数的一阶导数,并通过理论分析和数值实验来验证所提出的数值差分公式的有效性和优越性。

1 新型数值差分公式

根据泰勒级数展开原理^[2, 16-18],一个给定的具有任意阶导数的目标函数可以在任意的数据点下进行展开。对于目标函数在不同数据点上的展开式,可以结合需求,并通过移项变换来消除展开式的高阶项,从而构造具有一定计算精度的数值差分公式^[15-16]。沿着此思路,提出一种新型数值差分公式用于估计目标函数的一阶导数,具体推导如下。

对于一个给定的目标函数 $f(x)$, 其在不同数据点下的泰勒级数展开式描述如下

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + hf^{(1)}(x_k) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x_k) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (1)$$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - hf^{(1)}(x_k) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x_k) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (2)$$

$$f(x_{k-2}) = f(x_k) - 2hf^{(1)}(x_k) + 2h^2f^{(2)}(x_k) - \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x_k) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (3)$$

$$f(x_{k-3}) = f(x_k) - 3hf^{(1)}(x_k) + \frac{9h^2}{2}f^{(2)}(x_k) - \frac{9h^3}{2}f^{(3)}(x_k) + \frac{27h^4}{8}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (4)$$

$$f(x_{k-4}) = f(x_k) - 4hf^{(1)}(x_k) + 8h^2f^{(2)}(x_k) - \frac{32h^3}{3}f^{(3)}(x_k) + \frac{32h^4}{3}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (5)$$

$$f(x_{k-5}) = f(x_k) - 5hf^{(1)}(x_k) + \frac{25h^2}{2}f^{(2)}(x_k) - \frac{125h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{625h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5) \quad (6)$$

其中, $f^{(1)}(x_k)$, $f^{(2)}(x_k)$, $f^{(3)}(x_k)$ 和 $f^{(4)}(x_k)$ 分别表示目标函数 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 点处的一阶、二阶、三阶和四阶导数; h 表示步长且定义为 $h = x_{j+1} - x_j$ ($j = k, k-1, k-2, k-3, k-4, k-5$)。为了求得目标函数 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 点处的一阶导数,即 $f^{(1)}(x_k)$, 可通过以下计算公式来消除泰勒级数展开式(1)~(6)中的高阶项(即 $f^{(2)}(x_k)$, $f^{(3)}(x_k)$ 和 $f^{(4)}(x_k)$),

$$216 \times f(x_{k+1}) - 153.5 \times f(x_{k-1}) - 203 \times f(x_{k-2}) + 13 \times f(x_{k-3}) + 95 \times f(x_{k-4}) - 35.5 \times f(x_{k-5})$$

根据上述计算公式,可得

$$216f(x_{k+1}) - 153.5f(x_{k-1}) - 203f(x_{k-2}) + 13f(x_{k-3}) + 95f(x_{k-4}) - 35.5f(x_{k-5}) = -68f(x_k) + 534hf^{(1)}(x_k) + O(h^5) \quad (7)$$

通过对公式(7)进行移项变换,便可得到如下用于估计目标函数 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 点处一阶导数的新型数

值差分公式

$$f^{(1)}(x_k) = (216f(x_{k+1}) + 68f(x_k) - 153.5f(x_{k-1}) - 203f(x_{k-2}) + 13f(x_{k-3}) + 95f(x_{k-4}) - 35.5f(x_{k-5})) / (534h) + O(h^4) \quad (8)$$

根据上述推导过程可知, 新型数值差分公式(8)的截断误差为 $O(h^4)$ 。此外, 结合舍入误差, 对于新型数值差分公式(8), 有如下的理论结果。

引理 1 当新型数值差分公式(8)用于估计目标函数的一阶导数时, 存在一个最优步长使得式(8)的计算误差最小, 且最优步长为

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{11\ 760\varepsilon_{\max}}{2\ 213M} \right)^{1/5} \quad (9)$$

其中, ε_{\max} 表示舍入误差的最大绝对值, M 表示目标函数 $f(x)$ 的五阶导数的最大绝对值。

证明 对于目标函数 $f(x)$, 考虑每个数据点上的函数值都存在舍入误差, 即

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= y_6 + \varepsilon_6, & f(x_k) &= y_5 + \varepsilon_5, & f(x_{k-1}) &= y_4 + \varepsilon_4, & f(x_{k-2}) &= y_3 + \varepsilon_3 \\ f(x_{k-3}) &= y_2 + \varepsilon_2, & f(x_{k-4}) &= y_1 + \varepsilon_1, & f(x_{k-5}) &= y_0 + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

其中, y_i 表示目标函数 $f(x)$ 在不同数据点的准确值/真实值, ε_i 表示相应的舍入误差, 下标 $i = 0, 1, \dots, 6$ 。考虑舍入误差, 并结合公式(7), 可得如下的数值差分公式

$$f^{(1)}(x_k) = (216f(x_{k+1}) + 68f(x_k) - 153.5f(x_{k-1}) - 203f(x_{k-2}) + 13f(x_{k-3}) + 95f(x_{k-4}) - 35.5f(x_{k-5})) / (534h) + E(f, h) \quad (10)$$

其中, $E(f, h)$ 表示数值差分公式(10)的总体计算误差, 且计算如下

$$\begin{aligned} E(f, h) &= (216\varepsilon_6 + 68\varepsilon_5 - 153.5\varepsilon_4 - 203\varepsilon_3 + 13\varepsilon_2 + 95\varepsilon_1 - 35.5\varepsilon_0) / (534h) - \\ & (h^5 f^{(5)}(C_1) - h^5 f^{(5)}(C_2) + 32h^5 f^{(5)}(C_3) - 243h^5 f^{(5)}(C_4) + 1\ 024h^5 f^{(5)}(C_5) - \\ & 3\ 125h^5 f^{(5)}(C_6)) / (64\ 080h) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, C_1 表示在区间 (x_k, x_{k+1}) 内的一个常数, C_2 表示在区间 (x_{k-1}, x_k) 内的一个常数, C_3 表示在区间 (x_{k-2}, x_k) 内的一个常数, C_4 表示在区间 (x_{k-3}, x_k) 内的一个常数, C_5 表示在区间 (x_{k-4}, x_k) 内的一个常数, C_6 表示在区间 (x_{k-5}, x_k) 内的一个常数, $f^{(5)}(\cdot)$ 表示目标函数的五阶导数。需要说明的是, 对于所提出的新型数值差分公式(8), 其截断误差 $O(h^4)$ 的详细表达式即

$$O(h^4) = (h^5 f^{(5)}(C_1) - h^5 f^{(5)}(C_2) + 32h^5 f^{(5)}(C_3) - 243h^5 f^{(5)}(C_4) + 1\ 024h^5 f^{(5)}(C_5) - 3\ 125h^5 f^{(5)}(C_6)) / (64\ 080h)$$

令 ε_{\max} 为舍入误差的最大绝对值, 即 $\varepsilon_{\max} = \max\{|\varepsilon_i|, i = 0, 1, \dots, 6\}$, 以及 M 为目标函数的五阶导数的最大绝对值, 即 $|f^{(5)}(\cdot)| \leq M$, 则根据式(11)的计算便可得到 $E(f, h)$ 的上界

$$|E(f, h)| \leq \frac{784\varepsilon}{534h} + \frac{2\ 213h^4 M}{32\ 040}$$

为了使得总体计算误差 $E(f, h)$ 最小, 步长 h 的选择就令 $E(f, h)$ 的一阶导数为零, 即

$$E^{(1)}(f, h) = -\frac{784\varepsilon}{534h^2} + \frac{8\ 852h^3 M}{32\ 040} = 0 \quad (12)$$

根据公式(12), 便可计算求得如下步长的计算公式

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{11\ 760\varepsilon_{\max}}{2\ 213M} \right)^{1/5}$$

也就是所提出的新型数值差分公式(8)的最优步长。

证毕。

2 数值实验验证

为了验证新型数值差分公式(8)的有效性, 选取如下的目标函数进行数值实验,

$$f(x) = x^2[\ln x \sin x + 3x]$$

在数值实验中,采用式(8)来估算目标函数 $f(x)$ 在 $x = 1.5$ 点处的一阶导数。为了对比,也采用如下的2种数值差分公式^[19-20]进行估算:

$$f^{(1)}(x_k) = (2f(x_{k+1}) - 3f(x_k) + 2f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})) / (2h) + O(h^2) \quad (13)$$

$$f^{(1)}(x_k) = (24f(x_{k+1}) - 5f(x_k) - 12f(x_{k-1}) - 6f(x_{k-2}) - 4f(x_{k-3}) + 3f(x_{k-4})) / (48h) + O(h^3) \quad (14)$$

显然,数值差分公式(13)和(14)的截断误差分别是 $O(h^2)$ 和 $O(h^3)$ 。采用3种不同的数值差分公式进行目标函数一阶导数估算的误差如表1所示。

表1 采用不同数值差分公式估算目标函数一阶导数的误差

h	数值差分公式(13)	数值差分公式(14)	数值差分公式(8)
0.2	3.64×10^{-1}	5.19×10^{-2}	9.16×10^{-3}
0.1	8.54×10^{-2}	7.02×10^{-3}	3.24×10^{-4}
0.02	3.23×10^{-3}	5.78×10^{-5}	1.59×10^{-7}
0.01	8.02×10^{-4}	7.23×10^{-6}	7.04×10^{-9}
0.002	3.19×10^{-5}	5.79×10^{-8}	7.41×10^{-12}
0.001	7.97×10^{-6}	7.24×10^{-9}	8.10×10^{-13}
2×10^{-4}	3.19×10^{-7}	5.74×10^{-11}	1.11×10^{-12}
1×10^{-4}	7.96×10^{-8}	3.37×10^{-12}	1.02×10^{-12}
2×10^{-5}	3.01×10^{-9}	7.15×10^{-11}	9.68×10^{-11}
1×10^{-5}	3.95×10^{-10}	1.14×10^{-10}	7.88×10^{-11}
2×10^{-6}	6.71×10^{-10}	8.83×10^{-10}	6.96×10^{-10}
1×10^{-6}	2.45×10^{-9}	9.67×10^{-10}	1.01×10^{-9}

从表1每一列的数据可以看到,通过设置合适的步长 h ,无论是数值差分公式(13)和(14),还是新型数值差分公式(8),都能有效地估算目标函数的一阶导数(例如,设置 $h = 0.01$,相应的误差分别在 10^{-4} 、 10^{-6} 和 10^{-9} 的水平上),并且随着步长 h 的减小,3种数值差分公式进行目标函数一阶导数估算的误差也在减小,并有如下的现象:

(1)对于数值差分公式(13),当步长 h 的数值减小到原来的1/10,相应的误差约减小到原来的1/100,这样的误差符合 $O(h^2)$ 的变化规律。

(2)对于数值差分公式(14),当步长 h 的数值减小到原来的1/10,相应的误差约减小到原来的1/1 000,这样的误差符合 $O(h^3)$ 的变化规律。

(3)对于新型数值差分公式(8),当步长 h 的数值减小到原来的1/10,相应的误差约减小到原来的1/10 000,这样的误差符合 $O(h^4)$ 的变化规律。

此外从表1每一行的数据可以看到,在步长 h 设置相同的情况下(例如,都设置为 $h = 0.01$ 或 $h = 0.02$),新型数值差分公式(8)估算目标函数一阶导数的误差要小于数值差分公式(13)和(14)的误差(即前者的计算精度要高于后者的计算精度)。特别地,当步长 h 足够小时(例如, $h = 0.001$),相比于式(13)和(14),式(8)的优势更为明显。显然,对比性实验结果较好地表明了所提出的新型数值差分公式(8)的有效性以及优越性。值得一提的是,从表1的数据可以看到,对于数值差分公式(13),(14)和(8),其误差都会随着步长 h 的持续减小而呈现出来“先减小,后增大”的现象,这说明了在一定范围内减小步长 h 的数值有利于提高数值差分公式的计算精度,但 h 的数值过小就会适得其反,降低数值差分公式的计算精度。因此就有必要去探讨数值差分公式的最优步长^[1-2]。

对于新型数值差分公式(8),同样存在一个最优步长 h_{opt} 。为了验证该最优步长,采用式(8)对如下的目标函数进行一阶导数的估算实验,

$$f(x) = \cos x$$

显然, 目标函数的五阶导数的绝对值为: $|f^{(5)}(x)| = |-\sin x| \leq 1$, 即 $M = 1$ 。同时, 根据软件的计算设置, 所有数值的最大舍入误差为: $\varepsilon_{\max} = 5 \times 10^{-18}$ 。因此, 将 M 和 ε_{\max} 的数值代入计算公式(9), 可得新型数值差分公式(8)的最优步长为: $h_{\text{opt}} \approx 5 \times 10^{-4}$ 。在数值实验中, 采用新型数值差分公式(8)来估算目标函数 $f(x)$ 在不同数据点处(即, $x = \pi/6$, $x = \pi/4$, $x = \pi/3$ 和 $x = 2\pi/3$)的一阶导数, 相应的误差如表 2 所示。

表 2 采用新型数值差分公式(8)估算目标函数一阶导数的误差

h	$x = \pi/6$	$x = \pi/4$	$x = \pi/3$	$x = 2\pi/3$
5×10^{-1}	4.352×10^{-3}	3.505×10^{-4}	3.675×10^{-3}	1.489×10^{-2}
1×10^{-1}	9.548×10^{-6}	1.576×10^{-5}	2.090×10^{-5}	2.526×10^{-5}
5×10^{-2}	7.245×10^{-7}	1.096×10^{-6}	1.392×10^{-6}	1.529×10^{-6}
1×10^{-2}	1.317×10^{-9}	1.885×10^{-9}	2.324×10^{-9}	2.368×10^{-9}
5×10^{-3}	8.347×10^{-11}	1.188×10^{-10}	1.460×10^{-10}	1.473×10^{-10}
1×10^{-3}	9.220×10^{-14}	1.475×10^{-13}	1.613×10^{-13}	1.413×10^{-13}
5×10^{-4}	7.416×10^{-14}	6.539×10^{-14}	8.482×10^{-14}	1.280×10^{-13}
1×10^{-4}	3.650×10^{-13}	4.402×10^{-13}	3.543×10^{-13}	1.086×10^{-12}
5×10^{-5}	1.099×10^{-12}	1.157×10^{-12}	6.204×10^{-13}	4.873×10^{-13}
1×10^{-5}	5.623×10^{-13}	2.835×10^{-12}	6.608×10^{-12}	9.269×10^{-12}

从表 2 每一列的数据可以看到, 设置合适的步长 h , 新型数值差分公式(8)对目标函数一阶导数进行估算的误差将会非常小(例如, 在 10^{-9} 或 10^{-10} 的数量级上), 当步长 h 的数值减小到原来的 $1/10$, 相应的误差约减小到原来的 $1/10\ 000$ (符合 $O(h^4)$ 的变化规律), 实验结果再次表明了新型数值差分公式(8)的有效性。更重要的是, 针对目标函数在每个数据点处一阶导数的估算, 新型数值差分公式(8)的误差都是随着步长 h 的减小而不断减小, 并在 $h = 5 \times 10^{-4}$ 时达到最小值, 此后便逐渐增大。由此可见, 新型数值差分公式(8)的最优步长为 $h_{\text{opt}} = 5 \times 10^{-4}$, 与前文的理论分析结果一致。综上所述, 上述对比性的实验结果(即表 1 和表 2 中的数据)很好地验证了所提出的新型数值差分公式(8)的有效性和优越性, 并且当步长 h 足够小时, 新型数值差分公式(8)对目标函数一阶导数的估算将具有较高的精度。

3 新型数值差分公式应用

机械臂是可以代替人力完成复杂危险任务的一种工具, 其运动规划方案的设计直接影响着任务的完成精度。对于一个期望的运动曲线 $\mathbf{x}_d(t) \in \mathbf{R}^m$, 其运动学函数可以写为

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{x}_d(t)$$

其中, $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 表示非线性映射函数, $\mathbf{q}(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示机械臂的关节角度, n 表示机械臂关节的个数, $t \in \mathbf{R}$ 表示时间, 那么其关节角度求解可用伪逆形式表示。

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{x}}_d(t)$$

其中, $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示关节角速度, $\mathbf{J}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbf{R}^{3 \times n}$ 表示机械臂的雅克比矩阵, $\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \in \mathbf{R}^{n \times 3}$ 表示雅克比矩阵的伪逆形式, $\dot{\mathbf{x}}_d(t) \in \mathbf{R}^m$ 表示轨迹曲线的时间导数, 为了减小运动规划方案的误差, 考虑加入反馈项 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{x}_d(t)$, 得到机械臂的运动规划方案(15)。

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q}(t))(\dot{\mathbf{x}}_d(t) - \lambda \mathbf{e}(t)) \quad (15)$$

其中, $\lambda > 0 \in \mathbf{R}$ 表示收敛系数。

以上的运动规划方案在时间上是连续的, 为了便于计算机处理, 往往需要数值差分公式进行离散化处理, 因此差分公式的性质极大影响着运动规划的精度。欧拉差分公式(16)是一种常用的离散化处理方法

$$\dot{\mathbf{q}}_k = \frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k}{h} \quad (16)$$

其中, k 表示迭代次数且 $k=0,1,2,\dots$, $\dot{\mathbf{q}}_k = \dot{\mathbf{q}}(t_k = hk)$, $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(t_k = hk)$, $h \in \mathbf{R}$ 表示采样时间间隔。将式(16)代入式(15)得到离散化后的运动规划方案(17), 其中, $\alpha = h\lambda > 0$,

$$\mathbf{q}_{k+1} = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{x}}_d(t_k) - \alpha\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_k)\mathbf{e}(t_k) + \mathbf{q}_k \quad (17)$$

但欧拉差分公式离散化处理后的运动规划精度不高, 难以满足实际中的高精度需求。新型数值差分公式(8)具有更好的特性, 可以显著提高运动规划精度, 将式(8)代入(15)中得到新型运动规划方案(18)。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1} = & -\frac{17}{54}\mathbf{q}_k + \frac{153.5}{216}\mathbf{q}_{k-1} + \frac{203}{216}\mathbf{q}_{k-2} - \frac{13}{216}\mathbf{q}_{k-3} - \frac{95}{216}\mathbf{q}_{k-4} + \frac{35.5}{216}\mathbf{q}_{k-5} + \\ & \frac{89}{36}h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{x}}_d(t_k) - \beta\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_k)\mathbf{e}(t_k) + O(h^5) \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\beta = (89/36)h\lambda$ 。显然, 运动规划方案(18)具有 $O(h^5)$ 的截断误差, 这意味着当 h 减小到原来的1/10, 运动规划方案(18)的误差将会减少5个数量级, 能够满足高精度运动规划任务的要求。需要注意的是, 运动规划方案(18)需要6个数值(即, $\{\mathbf{q}_k | k=0,1,2,\dots,6\}$)进行迭代计算, 对于一个给定初值角度 \mathbf{q}_0 , 另外5个数值可由式(19)~(23)求得。

$$\mathbf{q}_1 = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_0)(\dot{\mathbf{x}}_d(t_0) - \lambda\mathbf{e}(t_0)) + \mathbf{q}_0 \quad (19)$$

$$\mathbf{q}_2 = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_1)(\dot{\mathbf{x}}_d(t_1) - \lambda\mathbf{e}(t_1)) + \mathbf{q}_1 \quad (20)$$

$$\mathbf{q}_3 = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_2)(\dot{\mathbf{x}}_d(t_2) - \lambda\mathbf{e}(t_2)) + \mathbf{q}_2 \quad (21)$$

$$\mathbf{q}_4 = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_3)(\dot{\mathbf{x}}_d(t_3) - \lambda\mathbf{e}(t_3)) + \mathbf{q}_3 \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_5 = h\mathbf{J}^+(\mathbf{q}_4)(\dot{\mathbf{x}}_d(t_4) - \lambda\mathbf{e}(t_4)) + \mathbf{q}_4 \quad (23)$$

4 仿真分析

为了验证本文提出的新型数值差分公式离散化处理的运动规划方案(18)的实用性, 将在 Matlab 环境下对比分析运动规划方案(18)和(17)的实验效果。实验对象采用 UR5 机械臂, 其初始关节角度为 $\mathbf{q}_0 = [0; -7\pi/9; -\pi/4; 0; 7\pi/18; 0]$ 。三尖瓣曲线常用来分析机械臂运动规划方案的可行性。定义 $\varphi = 2\pi\sin^2(\pi t/2T)$, $\phi = \pi/6$, 半径 $r = 0.1$ m, 运行周期 $T = 10$ s, 三尖瓣曲线表达式:

$$\mathbf{x}_d(t) = \begin{bmatrix} r(2\cos\varphi + \cos(2\varphi)) - 3r \\ r(2\sin\varphi - \sin(2\varphi))\sin\phi \\ r(2\sin\varphi - \sin(2\varphi))\cos\phi \end{bmatrix}$$

图1为运动规划方案(17)的仿真结果, 其参数设置为 $h = 0.1$, $\alpha = 0.3$ 。从图1中可以看出 UR5 机械臂很好地完成了三尖瓣轨迹的跟踪任务, 并且误差最大值为 -0.00651 m, 证明了运动规划方案(17)的可行性。

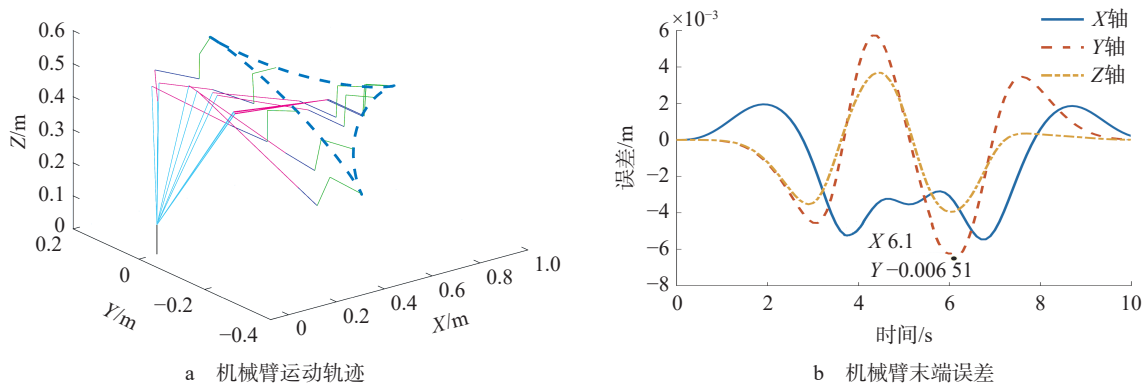


图1 当 $h=0.1$, $\alpha=0.3$ 时运动规划方案(17)仿真结果

图 2 为运动规划方案(18)的仿真结果,其参数设置为 $h=0.1, \beta=0.3$ 。从图 2 中可以看出运动规划方案(18)的误差最大值为 0.000 12 m, 同样很好地完成了三尖瓣曲线的轨迹跟踪任务,证明了经过新型差分公式离散化后的运动规划方案(18)的可行性。在同样的 $h=0.1$ 情况下对比图 1b 和图 2b, 误差减小了 1 个数量级, 说明了运动规划方案(18)优于运动规划方案(17), 也证明了新型数值差分公式(8)在离散化处理上的优越性。

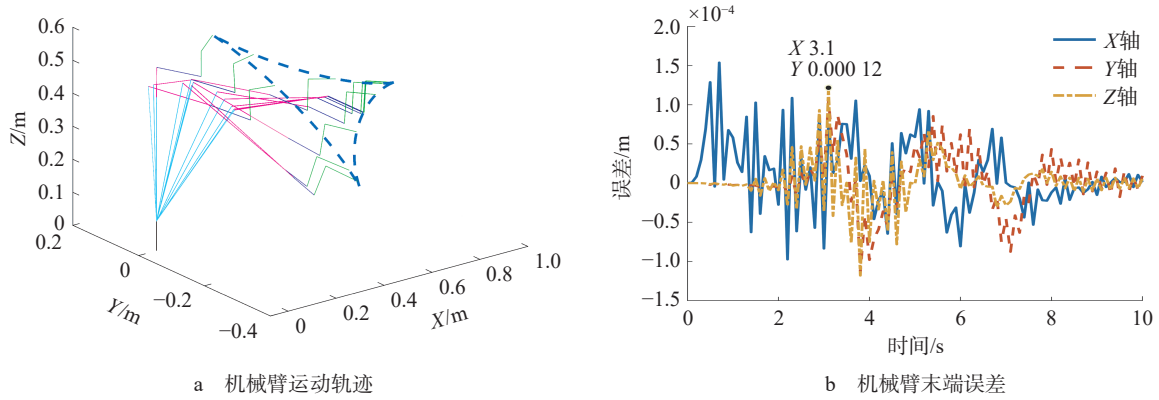


图 2 当 $h=0.1, \beta=0.3$ 运动规划方案(18)仿真结果

图 3 为运动规划方案(18)的仿真结果,其参数设置为 $h=0.01, \beta=0.3$ 。从图 3 中可以看出运动规划方案(18)的误差最大值为 -3.435×10^{-9} m, 相比于图 2b 的 0.000 12 m 误差减小了 5 个数量级, 这表明当 h 减小时, 运动规划方案(18)的精度会显著提升。当 h 减小到原来的 1/10 时轨迹误差约减小到原来的 1/100 000, 符合运动规划方案(18)具有的 $O(h^5)$ 截断误差, 再次证明了新型数值差分公式(8)的理论性。

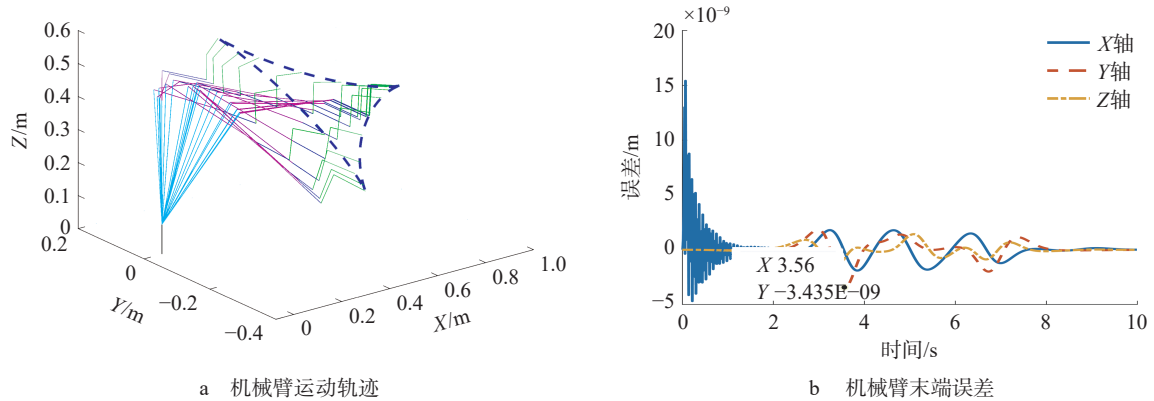


图 3 当 $h=0.01, \beta=0.3$ 运动规划方案(18)仿真结果

为了进一步探讨 h 值对运动规划方案的影响, 分别设置 $h=0.1$ 、 $h=0.01$ 和 $h=0.001$ 并分析运动方案(17)和(18)的误差最大值, 如表 3 所示。从表 3 中可以看出当 h 减小到原来的 1/10 时, 运动方案(18)的误差约减小到原来的 1/100 000, 符合运动规划方案(18)具有的 $O(h^5)$ 截断误差。同样地, 运动方案(17)的误差变化满足 $O(h^2)$ 截断误差。当 $h=0.001$ 时, 运动方案(18)误差达到 10^{-14} 水平, 相比于运动方案(17)中的 10^{-7} 水平, 其运动精度得到了显著提升。

表 3 不同采样时间下运动规划方案(17)和(18)误差最大值

不同运动规划方案	$h=0.1$	$h=0.01$	$h=0.001$	截断误差
方案(17)	-6.505×10^{-3}	-7.141×10^{-5}	-7.155×10^{-7}	$O(h^2)$
方案(18)	1.217×10^{-4}	-3.435×10^{-9}	-3.378×10^{-14}	$O(h^5)$

对比分析图 1 ~ 图 3 和表 3, 可得到如下结论:

(1) 运动规划方案(18)的误差变化满足 $O(h^5)$ 截断误差, 当 h 减小到原来的 1/10 时, 轨迹跟踪误差约减

小到原来的 $1/100\,000$, 符合新型数值差分公式(8)的理论推导。

(2)通过减小 h 值可以进一步增加运动规划方案(18)的精度, 并且与运动规划方案(17)相比具有更好的性能, 证明了新型数值差分公式(8)的可行性和优越性。

5 结 论

为了对目标函数一阶导数进行估算, 基于泰勒级数展开原理, 提出了一种具有 $O(h^4)$ 截断误差的新型数值差分公式(8), 然后从理论层面推导得到新型数值差分公式(8)的最优步长, 针对不同目标函数的实验结果验证了新型数值差分公式(8)的有效性和优越性, 最后通过 UR5 机械臂仿真实验证明了由新型数值差分公式(8)离散化得到的运动规划方案(18)的优越性, 其误差相比于之前的差分公式更小, 能够满足实际中的高精度需求。

参考文献:

- [1] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical Optimization[M]. New York: Springer, 1999.
- [2] MATHEWS J H, FINK K K. Numerical Methods Using MATLAB[M]. 4th ed. New Jersey: Prentice-Hall Inc. , 2004.
- [3] 裴宏宇, 杨功流, 全伟, 等. 基于数值微分计算的 SERF 原子自旋惯性测量动态仿真 [J]. 导航定位与授时, 2021, 8(2): 1-7.
- [4] OTHMANE A, RUDOLPH J, MOUNIER H. Systematic comparison of numerical differentiators and an application to model-free control[J]. European Journal of Control, 2021, 62: 113-119.
- [5] 夏爱生, 夏军剑, 张会鹏. 五点数值微分公式及其外推算法 [J]. 军事交通学院学报, 2014, 16(4): 93-95.
- [6] 周晶, 张红芹. Chebyshev 多项式及其插值法在函数求导中的应用 [J]. 长春大学学报, 2016, 26(12): 56-58, 68.
- [7] 高兴华, 李宏, 刘洋. 非线性分数阶常微分方程的分段线性插值多项式方法 [J]. 应用数学和力学, 2021, 42(5): 531-540.
- [8] 邱淑芳, 叶智群, 胡彬. 近似函数高阶导数的高精度积分逼近方法 [J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(6): 217-224.
- [9] DUBEAU F. A remark on Richardson's extrapolation process and numerical differentiation formulae[J]. Journal of Computational Physics: X, 2019, 2: 100017.
- [10] 王燕. 一阶导数的五点数值微分公式及外推算法 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(6): 163-167.
- [11] 马月珍, 葛永斌, 王燕. 三维泊松方程基于 Richardson 外推法的高阶紧致差分方法 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(8): 146-152.
- [12] 张雨浓, 侯占伟, 郭东生. 基于前向差分的一阶数值微分公式验证与实践 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(3): 199-204.
- [13] SHI Y, QIU B B, CHEN D C, et al. Proposing and validation of a new four-point finite-difference formula with manipulator application[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018, 14(4): 1323-1333.
- [14] ZHAO Z Y, YOU L. A numerical differentiation method based on Legendre expansion with super order Tikhonov regularization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 393: 125811.
- [15] ZHAO Z Y. A hermite extension method for numerical differentiation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2021, 159: 46-60.
- [16] 李琴, 傅莺莺, 莫立坡. 浅谈微积分所蕴含的特征值计算思想方法 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(8): 292-296.
- [17] 曹倩倩. 泰勒级数的若干展开方法 [J]. 阴山学刊, 2016, 30(3): 20-22, 32.
- [18] 王从徐. 基于泰勒级数展开及其应用探讨 [J]. 红河学院学报, 2021, 19(2): 154-156.
- [19] ZHANG Y N, JIN L, GUO D S, et al. Taylor-type 1-step-ahead numerical differentiation rule for first-order derivative approximation and ZNN discretization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 273: 29-40.
- [20] GUO D S, NIE Z Y, YAN L C. Novel discrete-time Zhang neural network for time-varying matrix inversion[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(8): 2301-2310.

(责任编辑: 高 喆)