

DOI: 10.15886/j.cnki.hdxzbk.2024042801

CSTR: 32403.14.hndk.2024042801

数理基础科学



引用格式:周思荣,刘阿明. Kneser 图及其导出子图的顶点可分解性质 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文), 2025, 43(1): 67–72.

Citation: ZHOU Sirong, LIU Aming. Vertex decomposability of Kneser graph and its induced subgraph[J]. Natural Science of Hainan University, 2025, 43(1): 67–72.

Kneser 图及其导出子图的顶点可分解性质

周思荣, 刘阿明*

(海南大学 数学与统计学院, 海南 海口 570228)

摘要: Kneser 图是十分重要的一类图, 许多关于集合的计数以及计算问题可以转换为此类图中的问题加以探讨, 在计算机科学、图论、拓扑中都有重要应用。从代数组合方面出发研究 Kneser 图及其导出子图 Schrijver 图和交错图的组合代数结构, 并完整地刻画了其顶点可分解性质以及 Cohen-Macaulay 性质。

关键词: Kneser 图; Schrijver 图; 交错图; 顶点可分解性质

中图分类号: O157

文献标志码: A

文章编号: 1004-1729(2025)01-0067-06

Vertex decomposability of Kneser graph and its induced subgraph

ZHOU Sirong, LIU Aming*

(School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: Kneser graph is a very important kind of graph. Many problems related to counting and computing sets can be transformed into the problems in this kind of graph. It is widely used in computer science, graph theory, and topology. In the report, in algebraic combination respect, the combinatorial algebraic structures of Kneser graphs and their induced subgraphs, including Schrijver graphs and interlacing graphs were studied, and their vertex decomposability and Cohen-Macaulay properties were fully characterized.

Keywords: Kneser graph; Schrijver graph; interlacing graph; vertex decomposability

0 引言

文中所涉及的图都是连通且不含有孤立点的简单图。记图 $G=\{V, E\}$, 其中 $V=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是图 G 的顶点集, $E=\{x_i x_j \mid x_i, x_j \text{ 在 } G \text{ 中相邻}\}$ 是图 G 的边集。

组合交换代数学家 Stanley^[1] 用交换代数的方法证明了组合学中著名的 UBC 猜想, 为交换代数开拓了一个全新的领域。Stanley-Reisner 理想作为单纯复形与单项式理想的桥梁和纽带, 将组合的问题用代数的方法来解决, 极大地推动了交换代数在组合中的应用。Stanley 在证明 UBC 猜想时, 首先从 Cohen-Macaulay (简写“CM”) 的单纯复形开始, 进而证明对所有的单纯复形都成立。因此, CM 单纯复形的组合与代数性质一直吸引着大批的组合交换代数学家, CM 单纯复形的分类工作是组合交换代数的重要内容。

收稿日期: 2024-04-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(12101165); 海南省自然科学基金项目(423RC429)

作者简介: 周思荣(1999—), 女, 湖南常德人, 海南大学数学与统计学院 2021 级硕士研究生, E-mail: srzhou@hainanu.edu.cn

通信作者: 刘阿明(1988—), 男, 河南周口人, 副教授, 博士生导师, 研究方向: 代数学, E-mail: amliu@hainanu.edu.cn

Villarreal^[2]引入图的边理想,图的边理想实质上是其独立复形的 Stanley-Reisner 理想。因此,可以通过图的结构刻画单纯复形的性质,进而直观刻画相应的代数性质。Villarreal 首次提出了 CM 图的概念,并通过独立复形建立单纯复形与图之间的联系。Björner 等^[3-4]探究从 shellable 推到 CM 图是一个非常好的路径,并给出大量 shellable 的例子。Wachs^[5]引入顶点可分解的单纯复形,并证明顶点可分解的单纯复形满足 shellable,顶点可分解的单纯复形具有较好的组合性质。Woodroffe^[6]首次将顶点可分解单纯复形与图建立联系,引入顶点可分解图,并给出几类较好的顶点可分解图,如树图、圈图 C_3 及 C_5 、弦图等。由于图具有较为直观的结构,所以众多学者开始对 CM 图的结构进行研究,进而刻画 CM 性质。

Cook 等^[7]基于 Villarreal 对 CM 图的研究,将 Francisco 等^[8-10]的结果进行了推广,运用组合技巧给出顶点可分解图的一种新的构造方法。在此基础上,Liu 等^[11-12]引入顶点可分解图的一种新的构造方法“multi-cliquewhisker”,将上述构造加以推广,得到更具一般性的顶点可分解图,从此构造的结构容易证明 Cameron-Walker 图顶点可分解。Guo 等^[13]给出顶点可分解图的一种新的描述方法,诸多关于顶点可分解图的结构在这种描述下变得较为直观。

综上所述,从顶点可分解图性质出发研究 shellable 以及 CM 性质的常用路径,不仅可以利用图的结构来研究代数性质,也充分体现了图结构的直观性。由顶点可分解的图出发可以构造 shellable 单纯复形众多典型实例,从而提供了大量的 CM 单纯复形或序列 CM 单纯复形。结合组合与图结构的研究方法,对顶点可分解性质进行深刻的剖析,将为 CM 性质的研究提供新思路和新方法。笔者从代数组合方面出发研究 Kneser 图及其导出子图 Schrijver 图和交错图的组合代数结构,并完整地刻画其顶点可分解性质以及 CM 性质。

1 基本概念和符号

在图 G 中, $V(G)$ 是顶点集, $E(G)$ 是边集,设 $u, v \in V(G)$,如果 $uv \in E(G)$,记 $uv \in G$ 为 G 的一条边。顶点的度是与该顶点相邻的顶点的个数;孤立点是指这个点的度为 0,即没有其他顶点与其相邻的点。

图 G 的子图 M 指满足 $V(M) \subseteq V(G)$ 且 $E(M) \subseteq E(G)$ 的图。图 G 的导出子图 M 指满足 $V(M) \subseteq V(G)$ 的图,对于任意的图 M 中的点 u, v ,如果 $uv \in E(G)$ 则 $uv \in E(M)$ 。

路径 P_n 顶点集为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,边集 $E(P_n)$ 满足 $x_{i-1}x_i \in E(P_n)$ 当且仅当 $1 \leq i \leq n-1$,称 $n-1$ 为路径 P_n 的长度。用 $d(x, y)$ 表示点 x 与 y 之间最短路的长度。

图 G 中点 x 的邻点集记为 $N_G(x)$,用 $\text{st}x$ 或者 $N_G[x]$ 表示 $N_G(x) \cup \{x\}$ 。如果在图 G 中删掉顶点 x ,记图 $G-x$ 是图 G 的导出子图。完全图是指其任意 2 个顶点都是相邻的图。

对于顶点集 $W \subseteq V(G)$,如果图 W 中的任意 2 个点都不相邻,则称图 W 是图 G 的独立集。如果图 G 的所有不同的极大独立集的顶点个数都相同,则称图 G 是 well-covered。对于顶点集 $M \subseteq V(G)$,如果图 M 中任意 2 个点都相邻,则子集 M 是图 G 的团,用 $\omega(G)$ 表示图 G 的最大团的顶点个数。

令 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$,如果 $2^{[n]}$ 的子集合 Δ 满足以下 2 个条件:

- (1) 对于单点集 $\{v\}$, $\{v\} \in \Delta$;
- (2) 如果 $F \in \Delta$, $E \subseteq F$, 那么 $E \in \Delta$, 即具有子集遗传性,则称 Δ 是单纯复形。

称 F 是单纯复形 Δ 的面,以包含关系的极大元称为 Δ 的极大面。面 F 的维数是 F 中点的个数,如果 Δ 的极大面的维数都相同,则称单纯复形 Δ 是纯的。

通常计单纯复形 $\Delta = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle$,其中 F_i 是单纯复形 Δ 的极大面。

由图 G 的所有极大独立集的所生成的单纯复形,称为图 G 的独立复形,用符号 Δ_G 或 $\text{Ind}(G)$ 表示。

图 G 是顶点可分解图,如果图 G 满足如下条件之一:

- (1) 图 G 只有孤立点或者 $V(G) = \emptyset$;
- (2) 在图 G 中存在点 x 满足以下 2 个性质:
 - (α) $G-x$ 以及 $G-\text{st}x$ 都是顶点可分解图;
 - (β) 对于 $G-\text{st}x$ 任意独立集 W ,都可以在 $G-x$ 中找到点 y 使得 $W \cup \{y\}$ 是独立集。

对于满足上述条件(β)的顶点 x ,称其为弱可分解点;如果 x 满足条件(2),称其为可分解点。

顶点可分解满足 shellable, shellable 满足序列 CM; 对于纯的单纯复形或者 well-covered 图, 已知有: 顶点可分解满足 shellable, shellable 满足 CM。

Kneser 图的顶点 P 是 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 k 子集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 。如果 2 个点 P 和 Q 中的元素不相交, 则此 2 个顶点在 Kneser 图中是相邻的。Kneser 图也是文献 [11] 中定义的布尔图的导出子图。本文中 Kneser 图记为 $KG_{n,k}$ 。

Schrijver 图的顶点 P 是 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 k 子集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 是 k 个不相邻的数, 在此定义数字 1 和 n 相邻。如果 2 个点 P 和 Q 中的元素不相交, 则此 2 个顶点在 Schrijver 图中是相邻的。因此, Schrijver 图是 Kneser 图的导出子图。本文中记 Schrijver 图为 $SG_{n,k}$ 。

交错图的顶点 P 是 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 k 子集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 是 k 个不相邻的数, 交错图的顶点 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 和 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ 是相邻的当且仅当其交错, 其中 $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_k < q_k$ 或者 $q_1 < p_2 < q_2 < \dots < q_k < p_k$ 。本文中记交错图为 $IG_{n,k}$ 。

例 1 如图 1 所示当 $n=6$ 和 $k=2$ 时的交错图 $IG_{6,2}$ 。顶点集为: $V(IG_{6,2}) = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$, 其中 $v_1 = \{1, 3\}, v_2 = \{1, 4\}, v_3 = \{1, 5\}, v_4 = \{2, 4\}, v_5 = \{2, 5\}, v_6 = \{2, 6\}, v_7 = \{3, 5\}, v_8 = \{3, 6\}, v_9 = \{4, 6\}$ 。

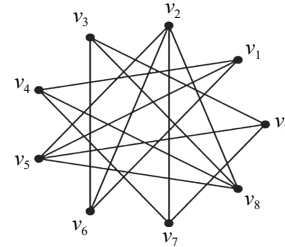


图 1 交错图 $IG_{6,2}$

2 $KG_{n,k}$ 和 $SG_{n,k}$ 的顶点可分解性质

定理 1 $KG_{n,k}$ 顶点可分解当且仅当 $n=2k$ 。

证明 记 $KG_{n,k}$ 为 G 。如果 $n=2k$, 则 $KG_{n,k}$ 是一系列 P_2 组成的森林, 因此顶点可分解。

如果 $n > 2k$, 断言, 对 G 中的任意顶点 $v = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, v 一定不是弱可分解点。

令 $N(v)$ 是点 v 的邻点集, 即 $N(v) = \{u = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \mid \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_k\} = \emptyset\}$ 。由于 $n > 2k$, 因此对任意 $u_i = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}\} \in N_G(v)$, 存在 $r_i \notin \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}, p_1, p_2, \dots, p_k\}$, 令 $w_i = \{r_i, p_2, \dots, p_k\}$ 。构造点 w_i 与 u_i 相邻, 但点 w_i 与点 v 不相邻。令 $W = \{w_i \mid w_i = \{r_i, p_2, \dots, p_k\}\}$, 显然, 集合 W 是 $GN_G[v]$ 独立集, 对 W 中的任意点 w_i , 都存在一个点 $u_i = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}\} \in N_G(v)$ 与之相邻。在 $N_G(v)$ 中找不到点添加到 W 中使其成为更大的独立集, 由弱可分解点的定义可知, v 不是弱可分解点。因此, 证明 $KG_{n,k}$ 不含有弱可分解点, 不是顶点可分解图。

证毕。

定理 2 当 $k \geq 3$ 时, $SG_{n,k}$ 顶点可分解当且仅当 $n=2k$ 。

证明 记 $SG_{n,k}$ 为 G 。如果 $n=2k$, 则 $SG_{n,k}$ 是一系列 P_2 组成的森林, 因此顶点可分解且 CM。

当 $n > 2k$ 时, 对 G 中的任意顶点 $v = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是 k 个不相邻的数字(注: 定义数字 1 和 n 不相邻)。断言, 顶点 v 都不是图 $SG_{n,k}$ 的弱可分解点。记 $N_G(v)$ 是点 v 的邻点集, 即 $N_G(v) = \{u = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \mid \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_k\} = \emptyset\}$ 。令 $u_i = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}\}$ 是 $N_G(v)$ 中的任意一点, 通过下列方式构造 $GN_G[v]$ 的独立集 W , 使得 W 一定与 $N_G(v)$ 中的某个点相邻。因为 $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 是 k 子集且 $n > 2k$, 所以至少存在一对 p_i 和 p_{i+1} 满足 p_i 和 p_{i+1} 之间至少存在 2 个数字(如果 $i=k$, 则 p_{k+1} 是 p_1)。因此, 可以找到 r_i 在 p_i 和 p_{i+1} 之间且满足 $r_i \notin \{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}, p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 。如果 r_i 靠近 p_i , 则令 $w_i = \{p_1, \dots, p_{i-1}, r_i, p_{i+1}, \dots, p_k\}$ 。如果 r_i 靠近 p_{i+1} , 则令 $w_i = \{p_1, \dots, p_i, r_i, p_{i+2}, \dots, p_k\}$ 。如果 r_i 与 p_i 和 p_{i+1} 的差一样, 则令 $w_i = \{p_1, \dots, p_{i-1}, r_i, p_{i+1}, \dots, p_k\}$ 或者 $w_i = \{p_1, \dots, p_i, r_i, p_{i+2}, \dots, p_k\}$ 。验证得, w_i 与 u_i 相邻, 但 w_i 与 v 不相邻。对于 $N_G(v)$ 中的任意顶点 u_i , 令 W 是上述方式构造的 w_i 的集合, 因为 $k \geq 3$, 所以 W 中任意 2 个点不相邻, 即 W 是独立集。此外, 对于 $N_G(v)$ 中的任意顶点 u_i , 由于 u_i 一定与 W 中的某个顶点相邻, 在 $N_G(v)$ 中找不到点添加到 W 中使其成为更大的独立集, 由弱可分解点的定义可知, v 不是弱可分解点。因此, 证明 $SG_{n,k}$ 不含有弱可分解点, 不是顶点可分解图。

证毕。

定理3 当 $k=2$ 时, $SG_{n,2}$ 顶点可分解当且仅当 $n=4$ 或 5 。

证明 因为 $k=2, n \geq 2k$, 所以 $n \geq 4$ 。当 $n=4$ 时, 此时 $SG_{n,2}$ 是满足 P_2 的图, 因此 $SG_{4,2}$ 顶点可分解且 CM。当 $n=5$ 时, 此时 $SG_{5,2}$ 是 C_5 , 因此 $SG_{5,2}$ 顶点可分解且 CM。

当 $n=6$ 时, 记 $SG_{n,2}$ 是 G 。此时 G 共有 9 个顶点, 分别是 $v_1=\{1, 4\}, v_2=\{2, 5\}, v_3=\{3, 6\}, v_4=\{1, 3\}, v_5=\{1, 5\}, v_6=\{2, 4\}, v_7=\{2, 6\}, v_8=\{3, 5\}, v_9=\{4, 6\}$ 。

首先, 证明 G 的顶点 $v_1=\{1, 4\}, v_2=\{2, 5\}, v_3=\{3, 6\}$ 是弱可分解点, 但都不是可分解点。对顶点 $v_1=\{1, 4\}, N_G(v_1)=\{\{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}, GN_G[v_1]$ 的极大独立集 $\{\{1, 3\}, \{1, 5\}\}$, 在 $N_G(v_1)$ 中可以找到点 $u=\{3, 5\}$, 使得 $\{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$ 是独立集; 对于 $GN_G[v_1]$ 的极大独立集 $\{\{2, 4\}, \{4, 6\}\}$, 在 $N_G(v_1)$ 中可以找到点 $u=\{2, 6\}$, 使得 $\{\{2, 4\}, \{4, 6\}, \{2, 6\}\}$ 是独立集。因此, $v_1=\{1, 4\}$ 是一个弱可分解点。但子图 $GN_G[v_1]$, 易证其为 4 圈 C_4 , 不是顶点可分解, 所以 v_1 不是可分解点。同理, 可以证明 $v_2=\{2, 5\}, v_3=\{3, 6\}$ 都不是可分解点。

其次, 当 $n=6$ 时, G 的顶点 $v_4=\{1, 3\}, v_5=\{1, 5\}, v_6=\{2, 4\}, v_7=\{2, 6\}, v_8=\{3, 5\}, v_9=\{4, 6\}$ 都不是弱可分解点。实际上, 对于顶点 $v_4=\{1, 3\}$, 其邻点集是 $N_G(v_4)=\{\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}\}$ 。对于 $GN_G[v_4]$, 容易计算 $GN_G[v_4]=v_1=\{\{1, 4\}, v_5=\{1, 5\}, v_3=\{3, 6\}, v_8=\{3, 5\}\}$ 。考虑 $GN_G[v_4]$ 的极大独立集 $\{\{1, 4\}, \{1, 5\}\}$, 容易验证, $N_G(v_4)=\{\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}\}$ 中的每一个顶点都与 $\{\{1, 4\}, \{1, 5\}\}$ 中的一个顶点相邻。因此, 不能在 $N_G(v_4)$ 找到一个顶点添加到 $\{\{1, 4\}, \{1, 5\}\}$ 中使其成为 $GN_G[v_4]$ 的独立集。再考虑 $GN_G[v_4]$ 的极大独立集 $\{\{3, 5\}, \{3, 6\}\}$, 容易验证, $N_G(v_4)=\{\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}\}$ 中的每一个顶点都与 $\{\{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ 中的一个顶点相邻。不能在 $N_G(v_4)$ 找到一个顶点添加到 $\{\{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ 中使其成为 $GN_G[v_4]$ 的独立集。综上所述, 点 $v_4=\{1, 3\}$ 不是弱可分解点。同理, 可以证明顶点 $v_5=\{1, 5\}, v_6=\{2, 4\}, v_7=\{2, 6\}, v_8=\{3, 5\}, v_9=\{4, 6\}$ 都是不弱可分解点。

当 $n=6$ 时, $SG_{6,2}$ 没有弱可分解点, 因此不是顶点可分解图。

在 $k=2$ 的前提下, 可以将 $SG_{n,2}$ 的顶点分别对应于 n -凸多边形内的对角线, 如图 2 所示的 $\{p_1, p_2\}$ 。对于 n -凸多边形内的 2 个对角线 $\{p_1, p_2\}$ 和 $\{q_1, q_2\}$, 假设其没有公共元素, 即 $\{p_1, p_2\} \cap \{q_1, q_2\} = \emptyset$ 。如果 $\{p_1, p_2\}$ 和 $\{q_1, q_2\}$ 是交错的, 那么称 $\{p_1, p_2\}$ 和 $\{q_1, q_2\}$ 在 n -凸多边形内部相交, 否则称为 $\{p_1, p_2\}$ 和 $\{q_1, q_2\}$ 是一个 gap。例如, 在 7-凸多边形内部, $\{1, 3\}$ 和 $\{2, 4\}$ 相交, 而 $\{1, 6\}$ 和 $\{2, 4\}$ 构成一个 gap。

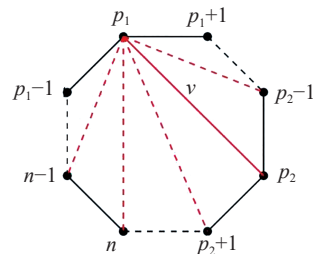


图2 n -凸多边形内及其内部的对角线

当 $n \geq 7$ 时, 记 $SG_{n,2}$ 是 G 。假设 $v=\{p_1, p_2\}$ 为任意一个顶点, 不妨设 $p_1 < p_2$ 。在图 2 中, 如果 p_1 是 1, 则 p_1-1 记为是 n 。如果 p_1 是 n , 则 p_1+1 记为是 n , 证明 $\{p_1, p_2\}$ 一定不是弱可分解点。事实上, 如果 $N_G(v)=\{u|u=\{q_1, q_2\}, \{p_1, p_2\} \cap \{q_1, q_2\} = \emptyset\}$, 则可以找到 $GN_G[v]$ 的一个极大独立集 W , 使得 W 中的任意一点一定与 $N_G(v)$ 中的某个点 u_i 相邻。

对 $v=\{p_1, p_2\}$ 中数字 p_1 , 在 n -凸多边形内以数字 p_1 为起点的对角线共有 $n-3$ 条, $\{p_1, p_2\}$ 是其中一条, 另外 $n-4$ 条分别记为 $w_i(1 \leq i \leq n-4)$ 。因为 $n \geq 7$, 所以对于对角线 $\{p_2-1, p_2+1\}$, 可以找到 1 个以数字 p_1 为起点的对角线与 $\{p_2-1, p_2+1\}$ 构成一个 gap。因此, 对于 n -凸多边形内的其他对角线, 一定与 $W=\{w_1, w_2, \dots, w_{n-4}\}$ 中的点相交或者构成 gap, 此时 $W=\{w_1, w_2, \dots, w_{n-4}\}$ 是数字 p_1 为起点的对角线不包含点 $v=\{p_1, p_2\}$ 。显然, $W=\{w_1, w_2, \dots, w_{n-4}\}$ 是一个独立集, 即 w_1, w_2, \dots, w_{n-4} 两两之间不相邻, 且 $N_G(v)=\{u|u=\{q_1, q_2\}, \{p_1, p_2\} \cap \{q_1, q_2\} = \emptyset\}$ 中的任意一个点 $\{q_1, q_2\}$ 一定与 W 中的某个点在 n -凸多边形内相交, 即在 $u=\{q_1, q_2\}$ 在图 G 中与 W 中的某个点相邻。在 $N_G(v)$ 中不能够找到点添加到 W 中使其成为 $GN_G[v]$ 的独立集, 即 $SG_{n,2}$ 中任意的 v 都不是弱可分解点, 因此不是顶点可分解图。

证毕。

3 $IG_{n,k}$ 的顶点可分解性质

交错图是由 Provan 等^[14]提出,并对其组合结构(单纯复形)进行了广泛的研究。文献 [15] 给出了 $k=2$ 的交错图的顶点可分解性质及 CM 性质的完整刻画。

定理 4 当 $k \geq 3$ 且 $n=2k$ 时, $IG_{n,k}$ 顶点可分解且 CM。

证明 当 $n=2k$ 时, $IG_{n,k}$ 只含有 2 个点且相邻。因此 $IG_{n,k}$ 是满足 P_2 的图,显然顶点可分解且 CM。证毕。

定理 5 当 $k \geq 3$ 且 $n > 2k$ 时, $IG_{n,k}$ 不是顶点可分解图。

证明 当 $k \geq 3$ 且 $n > 2k$ 时,根据顶点可分解图的定义,需证明 $IG_{n,k}$ 中的任意点 v , v 一定不是弱可分解点。

记 $IG_{n,k}$ 为 G 。任取 G 中的一点 $v = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 。记 $N_G(v) = \{u = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \mid p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_k < q_k \text{ 或者 } q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < q_k < p_k\}$ 是点 v 的邻点集。断言,一定存在一个独立集 W , W 中的每个点都与 $N_G(v)$ 中某个点相邻。

对于 $N_G(v)$ 中的任意一点 $u = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$,不妨设 $q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < q_k < p_k$ 。由于 $n > 2k$,那么一定存在数字 $r \notin \{q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 。分以下 3 种情况考虑独立集 W 的点的选取:

情况 1 如果 $r < q_1$,令 $w = \{r, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$,因为 $r < q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < p_{k-1} < q_k$,因此 w 和 u 相邻;另外, w 和 v 有 $k-1$ 个数字 $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$ 相同,所以 w 和 v 不相邻,即: $w \in G \setminus N_G[v]$ 。

情况 2 如果 $r > q_k$,令 $w = \{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, r\}$,因为 $q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < p_{k-1} < q_k < r$,因此 w 和 u 相邻;另外, w 和 v 有 $k-1$ 个数字 $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$ 相同,所以 w 和 v 不相邻,即: $w \in G \setminus N_G[v]$ 。

情况 3 如果 $q_i < r < q_{i+1}$,由于 $q_{i-1} < p_{i-1} < q_i < r < q_{i+1} < p_{i+1}$,令 $w = \{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, r, p_{i+1}, \dots, p_k\}$,因为 $q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < q_{i-1} < p_{i-1} < q_i < r < q_{i+1} < p_{i+1} < \dots < q_k < p_k$,因此 w 和 u 相邻;另外, w 和 v 有 $k-1$ 个数字 $\{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k\}$ 相同,所以 w 和 v 不相邻,即: $w \in G \setminus N_G[v]$ 。

对于上述 3 种情况,对 $N_G(v)$ 中任意不同的点 u 一定能够找到对应的 w ,令 W 是 w 的集合。注意到:点 w 中的点都与 v 中的点有且仅有 $k-1$ 个数字相同,对于 W 中不同的点 w_i 和 w_j ,因为 $k \geq 3$,所以 w_i 和 w_j 之间至少有 2 个数字相同,即 w_i 和 w_j 在图 G 中不相邻,所以 W 是一个独立集。此外, W 中的点都不是 v 及其邻点,所以得到 $W \subseteq G \setminus N_G[v]$ 。另一方面, W 中的任意一个点都与 $N_G(v)$ 中的某个点 u 相邻,因此 W 中不能再添加点 u 使其成为更大的独立集,即对于图 G 中的任意一点 v , v 都不是弱可分解点,不是顶点可分解图。

证毕。

刘阿明^[15]和 Tzanaki^[16]用不同的方法证明了 $k=2$ 时交错图 $IG_{n,2}$ 的顶点可分解以及 CM 性质,得出如下结果:

定理 6 当 $k=2$ 时, $IG_{n,2}$ 顶点可分解且 CM。

参考文献:

- [1] STANLEY R P. The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings[J]. Studies in Applied Mathematics, 1975, 54(2): 135-142.
- [2] VILLARREAL R H. Cohen-Macaulay graphs[J]. Manuscripta Mathematica, 1990, 66(1): 277-293.
- [3] BJÖRNER A, WACHS M L. Shellable nonpure complexes and Posets. I [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1996, 348(4): 1299-1327.
- [4] BJÖRNER A, WACHS M L. Shellable nonpure complexes and Posets. II [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(10): 3945-3975.
- [5] WACHS M L. Obstructions to shellability[J]. Discrete & Computational Geometry, 1999, 22(1): 95-103.
- [6] WOODROOFE R. Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2009, 137(10): 3235-3246.

- [7] COOK D, NAGEL U. Cohen-Macaulay graphs and face vectors of flag complexes[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2012, 26(1): 89–101.
- [8] FRANCISCO C A, HÀ H T. Whiskers and sequentially Cohen-Macaulay graphs[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2008, 115(2): 304–316.
- [9] FRANCISCO C A, HÀ H T, VAN TUYL A. Splittings of monomial ideals[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2009, 137(10): 3271–3282.
- [10] FRANCISCO C A, VAN TUYL A. Sequentially Cohen-Macaulay edge ideals[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2007, 135(8): 2327–2337.
- [11] 刘阿明. 图的边理想以及 Cohen-Macaulay 性质 [D]. 上海: 上海交通大学, 2019.
- [12] LIU A M, WU T S. Boolean graphs are Cohen-Macaulay[J]. *Communications in Algebra*, 2018, 46(10): 4498–4510.
- [13] LIU A M, WU T S. A construction of sequentially Cohen-Macaulay graphs[J]. *Algebra Colloquium*, 2021, 28(3): 399–414.
- [14] GUO J, LI M Y, WU T S. A new view toward vertex decomposable graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2022, 345(9): 112953.
- [15] PROVAN J S, BILLERA L J. Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1980, 5(4): 576–594.
- [16] TZANAKI E. Polygon dissections and some generalizations of cluster complexes[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2006, 113(6): 1189–1198.

(责任编辑: 高 喆)