第 43 卷第 1 期
2025 年 2 月

海南大学学报（自然科学版中英文）
NATURAL SCIENCE OF HAINAN UNIVERSITY

Vol. 43 No. 1
Feb. 2025

DOI: 10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2024043001　　CSTR: 32403.14.hndk.2024043001　　数理基础科学

引用格式:杜政澔, 朱会娟, 茹原芳. 一类四阶常微分方程三点边值问题正解的存在性与稳定性分析研究 [J]. 海南大学学报（自然科学版中英文）, 2025, 43(1): 81−90.

Citation: DU Zhenghao, ZHU Huijuan, RU Yuanfang. Analysis of the existence and stability of positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with three-point boundary conditions[J]. Natural Science of Hainan University, 2025, 43(1): 81−90.

一类四阶常微分方程三点边值问题正解的存在性与稳定性分析研究

杜政澔[1], 朱会娟[1], 茹原芳[2*]

（1. 河海大学 数学学院, 江苏 南京 211100; 2. 中国药科大学 理学院, 江苏 南京 211198）

摘　要: 研究了一类四阶常微分方程三点边值问题正解的存在性与稳定性。首先, 给出了相应格林函数的性质和估计。其次, 结合这些估计, 利用 Krasnosel'skii 与 Leggett-Williams 不动点定理, 讨论带有势函数的四阶三点边值问题正解的存在性, 并考虑了扰动项在不同取值范围内对 1 个解、2 个解和 3 个解存在性的影响。此外, 还系统地分析了方程解在特定扰动下的 Ulam-Hyers 稳定性。最后, 通过实例数值模拟, 进一步验证了所提出结果的合理性和实际应用价值, 充分展示了理论分析在实际问题中的重要性和有效性。

关键词: 四阶微分方程；正解；边值问题；不动点定理

中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1004-1729(2025)01-0081-10

Analysis of the existence and stability of positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with three-point boundary conditions

DU Zhenghao[1], ZHU Huijuan[1], RU Yuanfang[2*]

（1. School of Mathematics, Hohai University, Nanjing 211100, China;
2. College of Science, China Pharmaceutical University, Nanjing 211198, China）

Abstract: In the report, the existence and stability of the positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with three-point boundary value problems were analyzed. Firstly, the properties and estimates of the corresponding Green's function were proposed; secondly, based on these estimates, Krasnosel'skii and Leggett-Williams fixed point theorems were used to discuss the existence of the positive solutions for the fourth-order three-point boundary value problem with a weight function, and the effects of the perturbation term within the different value ranges on the existence of one, two, and three solutions were also considered; thirdly, the Ulam-Hyers stability of the solutions under specific perturbations was systematically

收稿日期: 2024−07−03

基金项目: 国家自然科学基金项目(12001162)；中央高校基本科研业务费项目(B240205026)；江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX24_0821)

作者简介: 杜政澔(2000—), 男, 江苏南通人, 河海大学数学院 2022 级硕士研究生, E-mail: 221312010002@hhu.edu.cn

通信作者: 茹原芳(1982—), 女, 江苏南京人, 副教授, 博士, 研究方向: 非线性泛函分析研究, E-mail: ruyanfangmm@163.com

analyzed; finally, the numerical simulations were performed to verify the reasonableness and practical value of the proposed results, and which demonstrated the importance and effectiveness of the theoretical analysis in practical applications.

Keywords: fourth-order differential equation; positive solution; boundary value problem; fixed point theorem

0 引 言

主要考虑以下四阶常微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda a(t)f(u(t)) & t\in(0,1) \\ u(0)-u(1)=0, u'(0)-u'(1)=u(1/2), u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性和多重性,其中$\lambda>0, f\in C([0,+\infty),[0,+\infty)), a\in C([0,1],[0,+\infty))$。

四阶微分方程的边值问题在应用物理、力学、材料科学、电子工程和生物力学等领域具有广泛应用。其核心作用是描述和分析梁与板的弯曲振动、流体动力学中的稳定性、弹性力学中的变形、电路中的振荡与波传播以及生物组织的力学行为。四阶微分方程不仅在理论研究中具有重要意义,更在工程设计、材料优化以及生物医学设备开发等实际应用中发挥关键作用。因此,四阶微分方程边值问题一直备受关注,研究其正解的存在性、唯一性和稳定性对于理论发展和实际应用具有重要意义。

例如,Liu[1] 和韦孝东等[2] 利用不动点定理讨论四阶微分方程正解的存在性和唯一性。Li[3−4] 利用不动点指数理论讨论解的存在性问题。Modebei 等[5] 研究了四阶边值问题的数值解,提出了有效的数值方法,验证了理论结果的可操作性和实际应用价值。此外,Okamoto 等[6] 对四阶边值问题的稳定性进行深入分析,为解的长期行为提供了重要见解。以上研究不仅在理论上丰富了四阶微分方程边值问题的内容,还为实际应用提供了强有力的理论支持。通过不动点定理、不动点指数理论以及数值分析等方法,学者们在解的存在性、唯一性、数值解及稳定性等方面取得了显著进展,为进一步研究和解决复杂的实际问题奠定了坚实基础。

赵娇等[7] 运用 Leray-Schauder 延拓定理,结合 Wirtinger 不等式,研究了两端固定支撑弹性梁方程

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u'(t)) & t\in(0,1) \\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性问题,其中f为 Carathéodory 函数。进一步,当非线性项满足 Lipschitz 条件时,得到该方程解的唯一性。除此之外,当非线性项$f(x,u,v)$关于u,v满足超线性增长时,瞿婧等[8] 运用 Leray-Schauder 不动点定理讨论上述四阶边值问题解的存在性,并得到了该问题解的唯一性结果。马亚薇等[9] 又运用上下解法和 Elias 不等式以及 Sturm 比较定理对一类两端简单支撑的弹性梁问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1(x)+k_2(x))y''(x)+k_1(x)k_2(x)y(x)=f(x,y(x)) & 0<x<1 \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性进行了研究。

上述文献都是基于两点边值条件下研究解的存在性及唯一性结果,且没有利用数值模拟进一步呈现。因此,笔者旨在利用 Krasnosel'skii 不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理讨论带有势函数的四阶三点边值问题(1)正解的存在性。此外,考虑扰动项λ在不同的取值范围内,讨论相应方程 1 个解、2 个解以及 3 个解的存在性。进一步,给出了方程(1)解的 Ulam-Hyers 稳定性的充分条件以及实例的数值模拟。

1 预备知识

令E表示 Banach 空间$C[0,1]$,其范数定义为$\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$,同时令

$$E^{+}=\{u\in E: u(t)\geqslant 0 \quad t\in[0,1]\}$$

引理 1　设$h \in E^+$, 则线性边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = h(t) \quad t \in [0,1] \\ u(0)-u(1)=0, u'(0)-u'(1)=u(1/2), u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$, 其中

$$G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(s)$$

$$G_1(t,s)=\begin{cases} t(1-s)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ s(1-t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$G_2(s)=\frac{1}{48}\begin{cases} 4s^3-24s^2+21s & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ 1+15s-12s^2-4s^3 & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

证明　对方程$u^{(4)}=h(t)$两边积分, 结合边值条件$u''(1)=u''(0)=0$, 计算可得

$$u''(t)=\int_0^t (t-s)h(s)\mathrm{d}s - t\int_0^1 (1-s)h(s)\mathrm{d}s$$

同理, 由边值条件$u(0)-u(1)=0$, $u'(0)-u'(1)=u(1/2)$, 经计算可得线性边值问题(2)有唯一解

$$\begin{aligned} u(t)=&\frac{1}{6}\left(\int_0^t (t-s)^3 h(s)\mathrm{d}s - t^3\int_0^1 (1-s)h(s)\mathrm{d}s + t\int_0^1 s(1-s)(2-s)h(s)\mathrm{d}s\right)+ \\ &\frac{1}{48}\left(\int_0^1 (4s^2+16s+1)(1-s)h(s)\mathrm{d}s - 8\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-s\right)^3 h(s)\mathrm{d}s\right) \end{aligned}$$

证毕。

引理 2　函数$G_1(t,s)$和问题(2)的解满足如下性质:

(a) $\frac{1}{6}t(1-t)s(1-s) \leqslant G_1(t,s) \leqslant \frac{1}{6}s(1-s)$;

(b) $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} u(t) \geqslant \frac{1}{4}\|u\|$。

证明　由表达式(3)可得

(1) 当$0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$,

$$G_1(t,s)=t(1-s)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) \leqslant \frac{1}{6}s(1-s)\left(1-t^2-(1-s)^2\right) \leqslant \frac{1}{6}s(1-s)$$

和

$$G_1(t,s)=t(1-s)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) \geqslant t(1-s)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{6}ts-\frac{1}{6}s^2\right) \geqslant \frac{1}{6}s(1-s)t(1-t)$$

(2) 当$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,

$$G_1(t,s)=s(1-t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) \leqslant s(1-s)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) \leqslant \frac{1}{6}s(1-s)$$

和

$$G_1(t,s)=s(1-t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}s^2\right) \geqslant s(1-t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{6}st\right) \geqslant \frac{1}{6}s(1-s)t(1-t)$$

因此, 结论(a)成立。

根据结论(a), 可进一步证明

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s \geqslant t(1-t)\left[\int_0^1 \frac{1}{6}s(1-s)+G_2(s)h(s)\mathrm{d}s\right] \geqslant t(1-t)\|u\|$$

所以对于$t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$,可得$u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|$,故性质(b)成立。

证毕。

始终假设下列条件成立:

$(A_1)\,a(t)\in C([0,1],[0,\infty))$,且满足

$$0<\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$$

$(A_2)\,f(u)\in C([0,\infty),[0,\infty))$,且极限

$$f_0=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u},f_\infty=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$$

满足$f_0,f_\infty\in[0,\infty]$。

定义算子$T:E\to E$如下

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\quad t\in[0,1]\tag{5}$$

因此,$u(t)$是问题(1)的解当且仅当其是算子T的不动点。在E中定义锥

$$K=\left\{u\in E^+:\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|\right\}$$

对$r>0$,令

$$K_r=\{u\in K:\|u\|<r\},\overline{K_r}=\{u\in K:\|u\|\leqslant r\},\partial K_r=\{u\in K:\|u\|=r\}$$

在锥K上定义非负连续凹函数α,

$$\alpha(u)=\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(t)$$

对$0<a<b$,令

$$K(\alpha,a,b)=\{u\in K:a\leqslant\alpha(u),\|u\|\leqslant b\}$$

引理3 假设(A_1)和(A_2)成立,则$T(K)\subset K$且$T:E\to E$是全连续算子。

证明 根据Arzela-Ascoli定理和标准过程可证明$T:E\to E$为全连续算子。接下来证明$T(K)\subset K$,事实上,对于任意的$(t,s)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[0,1]$,由引理2可得

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\lambda\left[\left(t(1-t)\int_0^1\frac{1}{6}s(1-s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+\frac{1}{4}\int_0^1 G_2(s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\right)\right]\geqslant\frac{1}{4}\|Tu(t)\|$$

即$T(K)\subset K$。

证毕。

全文证明基于以下2个不动点定理:

引理4[10] 设E是一个Banach空间,$K\subset E$是E中的一个锥。假设Ω_1,Ω_2为E的开子集,满足$0\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$且

$$T:K\cap\left(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1\right)\to K$$

是一个全连续算子,若下列条件之一满足:

(1)$\|Tu\|\leqslant\|u\|,y\in K\cap\partial\Omega_1$且$\|Tu\|\geqslant\|u\|,y\in K\cap\partial\Omega_2$;

(2)$\|Tu\|\geqslant\|u\|,y\in K\cap\partial\Omega_1$且$\|Tu\|\leqslant\|u\|,y\in K\cap\partial\Omega_2$。

则T在$K\cap\left(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1\right)$有一个不动点。

引理5[10] 设$T:\overline{K_c}\to\overline{K_c}$是全连续的,且$\alpha$是$K$上的非负连续凹泛函,对任意$x\in\overline{K_c}$,满足$\alpha(x)\leqslant\|x\|$。假设存在$0<d<a<b\leqslant c$,使得

(1) $\{x \in K(\alpha,a,b):\alpha > a\} \neq \phi$ 且对于 $x \in K(\alpha,a,b),\alpha(Tx) > a$;

(2) 对于 $\|x\| \leqslant d, \|Tx\| < d$;

(3) 当 $\|Tx\| > b$, 对于 $x \in K(\alpha,a,c)$, $\alpha(Tx) > a$。

那么 T 至少有 3 个满足以下条件的不动点 x_1, x_2, x_3,

$$\|x_1\| < d, a < \alpha(x_2), \quad \|x_3\| > d, \alpha(x_3) < a$$

2　解的存在性及其证明

令

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}s(1-s) + G_2(s)\right)a(s)\,\mathrm{d}s, \quad B = \frac{1}{96}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} s(1-s)a(s)\,\mathrm{d}s$$

主要定理如下:

定理 1　假设(A_1),(A_2)成立。

$(F1)$ 若 $0 < f_0, f_\infty < \infty$ 且 $\mathrm{A}f_0 < Bf_\infty$, 则对于任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_\infty}, \frac{1}{Af_0}\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F2)$ 若 $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$, 则对于任意 $\lambda \in (0,\infty)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F3)$ 若 $0 < f_0 < \infty, f_\infty = \infty$, 则对于任意 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{Af_0}\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F4)$ 若 $f_0 = 0, 0 < f_\infty < \infty$, 则对于任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_\infty}, \infty\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

证明　此处只证明情况$(F1)$, 其他情况的证明与此类似。

因为 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_\infty}, \frac{1}{Af_0}\right)$, 所以存在 $\varepsilon > 0$, 满足

$$\frac{1}{B(f_\infty - \varepsilon)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{A(f_0 + \varepsilon)}$$

根据 f_0 定义, 存在 $R_1 > 0$, 满足

$$f(u) \leqslant (f_0 + \varepsilon)u \quad u \in [0, R_1]$$

令 $K_{R_1} = \{u \in K : \|u\| < R_1\}$, 则对任意的 $u \in \partial K_{R_1}$, 可得

$$Tu(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s \leqslant \lambda\int_0^1\left(\frac{1}{6}s(1-s) + G_2(s)\right)a(s)(f_0+\varepsilon)u(s)\,\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\lambda(f_0+\varepsilon)\|u\|\int_0^1\left(\frac{1}{6}s(1-s)+G_2(s)\right)a(s)\,\mathrm{d}s = \lambda A(f_0+\varepsilon)\|u\| \leqslant \|u\|$$

即 $\|Tu\| \leqslant \|u\| \quad \forall u \in \partial K_{R_1}$。

根据 f_∞ 的定义, 存在 $\bar{R}_2 > 0$, 对任意 $u \in \left[\bar{R}_2, \infty\right)$, 满足 $f(u) \geqslant (f_\infty - \epsilon)u$, 令 $R_2 = \max\left\{2R_1, 4\bar{R}_2\right\}$ 和 $K_{R_2} = \{u \in K : \|u\| < R_2\}$, 若 $u \in \partial K_{R_2}$, 有 $\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \geqslant \frac{1}{4}\|u\| \geqslant \bar{R}_2$, 于是对任意的 $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, 有

$$Tu(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{\lambda}{6}t(1-t)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} s(1-s)a(s)(f_\infty-\varepsilon)u(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{\lambda}{96}(f_\infty-\varepsilon)\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} s(1-s)a(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$\lambda(f_\infty-\varepsilon)B\|u\| \geqslant \|u\|$$

即 $\|Tu\| \geqslant \|u\| \quad \forall u \in \partial K_{R_2}$。

综上所述, 由引理 4 可知, T 在 $\overline{K}_2 \backslash K_1$ 有一个不动点, 即为问题(1)的正解。

证毕。

定理 2　假设(A_1),(A_2)成立。

$(F5)$ 若 $0 < f_0, f_\infty < \infty$ 且 $Af_\infty < Bf_0$, 则对于任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_0}, \frac{1}{Af_\infty}\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F6)$ 若$f_0=\infty$, $f_\infty=0$, 则对于任意$\lambda\in(0,\infty)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F7)$ 若$f_0=\infty, 0<f_\infty<\infty$, 则对于任意$\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{Af_\infty}\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

$(F8)$ 若$0<f_0<\infty, f_\infty=0$, 则对于任意$\lambda\in\left(\dfrac{1}{Bf_0},\infty\right)$, 问题(1)至少有一个正解。

证明 此处只证明情况$(F5)$, 其他情况的证明与此类似。

因为$\lambda\in\left(\dfrac{1}{Bf_0},\dfrac{1}{Af_\infty}\right)$, 所以存在$\varepsilon>0$, 满足

$$\frac{1}{B(f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{A(f_\infty+\varepsilon)}$$

一方面, 根据f_0的定义, 存在$R_1>0$, 满足

$$f(u)\geqslant(f_0-\varepsilon)u \quad u\in[0,R_1]$$

令$K_{R_1}=\{u\in K:\|u\|<R_1\}$, 则对任意的$u\in\partial K_{R_1}$, 满足$\min\limits_{t\in\left[\frac14,\frac34\right]}u(t)\geqslant\dfrac14\|u\|=\dfrac14R_1$, 且有

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{24}\int_{\frac14}^{\frac34}s(1-s)a(s)(f_0-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{96}(f_0-\varepsilon)\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}s(1-s)a(s)\mathrm{d}s=$$
$$\lambda(f_0-\varepsilon)B\|u\|\geqslant\|u\|$$

即$\|Tu\|\geqslant\|u\| \quad \forall u\in\partial K_{R_1}$。

另一方面, 定义函数

$$\hat f(t)=\max\{f(u):u\in K,\|u\|\leqslant t\}$$

根据文献 [11] 中的引理 2.8, 有$f_\infty=\hat f_\infty$。于是存在$R_2>2R_1$, 满足

$$\hat f(R_2)\leqslant\left(\hat f_\infty+\varepsilon\right)R_2$$

令$K_{R_2}=\{u\in K:\|u\|<R_2\}$, 则对任意的$u\in\partial K_{R_2}$, 有

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1\left(\frac16s(1-s)+G_2(s)\right)a(s)(f_\infty+\varepsilon)R_2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda(f_\infty+\varepsilon)R_2\int_0^1\left(\frac16s(1-s)+G_2(s)\right)a(s)\mathrm{d}s=\lambda A(f_\infty+\varepsilon)R_2\leqslant R_2=\|u\|$$

即$\|Tu\|\leqslant\|u\| \quad \forall u\in\partial K_{R_2}$。

综上所述, 由引理 4 可知, T在$\overline{K}_{R_2}\backslash K_{R_1}$有一个不动点, 即为问题(1)的正解。

证毕。

3 多重性结果及其证明

定理 3 假设(A_1)和(A_2)成立。此外, 假设$f(u)$满足:

(1) $f_0=f_\infty=0$;

(2)存在常数r, M使得当$\frac14\mathrm{r}\leqslant u\leqslant\mathrm{r}$时, 有$f(u)\geqslant\mathrm{Mr}$。

则对于$\lambda>\dfrac{1}{4B\mathrm{M}}$, 问题(1)至少有 2 个正解。

证明

步骤 1 根据定理 1 和定理 2 的证明, 可知存在$R_1\in(0,\mathrm{r})$和$R_2>2\mathrm{r}$使得对任意的$\lambda>0$, 有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\| \quad \forall u\in\partial K_{R_1}, \quad \|Tu\|\leqslant\|u\| \quad \forall u\in\partial K_{R_2}$$

步骤 2 令$K_\mathrm{r}=\{u\in K:\|u\|<\mathrm{r}\}$, 则对任意的$u\in\partial K_\mathrm{r}$, 即$\|u\|=\mathrm{r}$, 于是对任意的$t\in\left[\dfrac14,\dfrac34\right]$, 有

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{24}\int_{\frac14}^{\frac34}s(1-s)a(s)\mathrm{Mr}\mathrm{d}s=4\lambda B\mathrm{Mr}$$

因此, 当$\lambda>\dfrac{1}{4B\mathrm{M}}$时, 有$\|Tu\|\geqslant\|u\|\quad\forall u\in\partial K_{\mathrm{r}}$。

综上所述, 根据引理 4, 问题(1)至少有 2 个正解$u_1\in\overline{K}_{\mathrm{r}}\backslash K_{R_1}$, $u_2\in\overline{K}_{R_2}\backslash K_{\mathrm{r}}$。

证毕。

定理 4　假设(A_1)和(A_2)成立。此外, 假设$f(u)$满足:

(1) $f_0=f_\infty=\infty$;

(2)存在常数r,N使得当$\frac14\mathrm{r}\leqslant u\leqslant\mathrm{r}$时, 有$f(u)\leqslant\mathrm{Nr}$。

则对于$\lambda\in(0,\frac{1}{A\mathrm{N}})$, 问题(1)至少有 2 个正解。

证明

步骤 1　根据定理 1 和 2 的证明, 可知存在$R_1\in(0,\mathrm{r})$和$R_2>2\mathrm{r}$使得对任意的$\lambda>0$, 有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|\quad\forall u\in\partial K_{R_1},\quad\|Tu\|\geqslant\|u\|\quad\forall u\in\partial K_{R_2}$$

步骤 2　令$K_{\mathrm{r}}=\{u\in K:\|u\|<\mathrm{r}\}$, 则对任意的$u\in\partial K_{\mathrm{r}}$, 有

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1\left(\frac16 s(1-s)+G_2(s)\right)a(s)\mathrm{Nr}\mathrm{d}s=\lambda A\mathrm{Nr}$$

因此, 当$\lambda<\dfrac{1}{A\mathrm{N}}$,有$\|Tu\|\leqslant\|u\|\quad\forall u\in\partial K_{\mathrm{r}}$。

综上所述, 根据引理 4, 问题(1)至少有 2 个正解$u_1\in\overline{K}_{\mathrm{r}}\backslash K_{R_1}$, $u_2\in\overline{K}_{R_2}\backslash K_{\mathrm{r}}$。

证毕。

最后考虑$\lambda=1$时, 问题(1)有 3 个正解的存在性。

定理 5　假设(A_1)和(A_2)成立。此外, 假设存在$0<d<a<4a=b\leqslant c$, 满足:

(1)当$u\in[a,b]$, 有$f(u)>\dfrac{b}{16B}$;

(2)当$u\in[0,d]$, 有$f(u)<\dfrac{d}{A}$;

(3)当$u\in[0,c]$, 有$f(u)<\dfrac{c}{A}$。

则问题(1)至少有 3 个正解。

证明　根据$\alpha(u)$的定义, 显然有$\alpha(u)\leqslant\|u\|$。

步骤 1　首先证明$T:\overline{K_c}\to\overline{K_c}$。令$u\in\overline{K_c}$, 由条件(3), 可得

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{c}{A}\int_0^1\left(\frac16 s(1-s)+G_2(s)\right)a(s)\,\mathrm{d}s=c$$

即 $T:\overline{K_c}\to\overline{K_c}$。同理, 根据条件(b), 对于$\|u\|<d$, 有$\|Td\|<d$, 即满足引理 5(2)。

步骤 2　显然$u=\dfrac{a+b}{4}\in K(\alpha,a,b)$, 即$\{u\in K(\alpha,a,b):\alpha(u)>a\}\neq\phi$。对于$u\in K(\alpha,a,b)$, 可知当$t\in\left[\dfrac14,\dfrac34\right]$, 有$a\leqslant\alpha(u)\leqslant u\leqslant\|u\|\leqslant b$。则根据条件(1), 可得

$$\alpha(Tu(t))=\min_{t\in\left[\frac14,\frac34\right]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{24}\int_0^1 s(1-s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{24}\frac{b}{B}\int_{\frac14}^{\frac34}s(1-s)a(s)\,\mathrm{d}s=\frac{b}{4}=a$$

即满足引理 5(1)。

步骤 3　对于$u\in K(\alpha,a,c)$, 满足$\|Tu\|>b$, 可知$a\leqslant\alpha(u)\leqslant u\leqslant\|u\|\leqslant c$。则当$t\in\left[\dfrac14,\dfrac34\right]$, 有

$$\alpha(Tu(t))=\min_{t\in\left[\frac14,\frac34\right]}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\frac14\left\|\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\right\|=\frac14\|Tu\|>\frac14 b=a$$

即满足引理 5(3)。

综上所述, 根据引理 5, 问题(1)至少有 3 个正解$u_1,u_2,u_3\in\overline{K_r}$满足

$$\|u_1\| < d, a < \alpha(u_2), \quad \|x_3\| > d, \alpha(u_3) < a$$

证毕。

4 Ulam-Hyers 稳定性及其证明

定义 1[12] 方程(1)被称为 Ulam-Hyers 稳定的，若存在一个正实数μ使得对于任意的$\varepsilon > 0$，$v \in C^4[0,1]$是不等式

$$\left|v^{(4)}(t) - \lambda a(t) f(v(t))\right| \leqslant \varepsilon \quad t \in [0,1] \tag{6}$$

在边值条件$v(0) - v(1) = 0, v'(0) - v'(1) = v(1/2), v''(0) = v''(1) = 0$下的解，则问题(1)存在解$u \in C^4[0,1]$使得

$$|u(t) - v(t)| \leqslant \mu\varepsilon t \in [0,1]$$

定理 6 假设(A_1)成立。此外，存在常数$\mathrm{L} > 0$使得

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \mathrm{L}|u - v| \forall u, v \in C[0,1]$$

如果$\lambda \mathrm{L} A < 1$，则问题(1)是 Ulam-Hyers 稳定的。

证明 令$v \in C^4[0,1]$是不等式(6)的解，则

$$\left|u^{(4)}(t) - \lambda a(t) f(u(t))\right| \leqslant \varepsilon \Psi(t) \quad t \in [0,1]$$

因此，对于$\varepsilon > 0$，可得

$$|v(t) - \lambda \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds| \leqslant \varepsilon \Psi(t) \quad t \in [0,1]$$

由定理 1 可知，问题(1)的解$u(t)$满足

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s$$

则对于$t \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| = & \left|v(t) - \lambda \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s\right| \leqslant \left|v(t) - \lambda \int_0^1 G(t,s) a(s) f(v(s)) \mathrm{d}s\right| + \\ & \lambda \left|\int_0^1 G(t,s) a(s) (f(v(s) - f(u(s))) \mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon + \lambda \mathrm{L} \int_0^1 |G(t,s) a(s) (u(s) - v(s))| \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon + \\ & \lambda \mathrm{L} \int_0^1 \left[\frac{1}{6} s\left(1 - s) + G_2(s)\right] a(s) |u(s) - v(s)| \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon + \lambda \mathrm{L} A |u(t) - v(t)| \end{aligned}$$

即

$$|v(t) - u(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \lambda \mathrm{L} \mathrm{A}} = \mu\varepsilon \quad t \in [0,1]$$

因此，问题(1)是 Ulam-Hyers 稳定的。

5 示 例

例 1 考虑以下问题正解的存在性

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda\left(100 u(t) / \exp\left(\dfrac{5}{u(t)+1}\right)\right) & t \in [0,1] \\ u(0) - u(1) = 0, u'(0) - u'(1) = u(1/2), u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

可得$f_0 = \dfrac{100}{\exp(5)}$，$f_\infty = 100$，$A = \dfrac{113}{1152}$，$B = \dfrac{11}{9216}$，则其满足定理 1($F1$)中条件$0 < f_0, f_\infty < \infty, A f_0 < B f_\infty$，因此，根据定理 1 中的($F1$)，对于任意$\lambda \in \left(\dfrac{9216}{1100}, \dfrac{1152\exp(5)}{11300}\right)$，问题(7)至少有一个正解。该正解的数值模拟如图 1 所示。

例 2 考虑以下问题正解的存在性

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda(u^2(t)+1) \quad t \in [0,1] \\ u(0) - u(1) = 0 \\ u'(0) - u'(1) = u(1/2), u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

可得$A = \dfrac{113}{1152}$, $B = \dfrac{11}{9216}$。取r = 1, N = 3, 则满足定理 2 中条件$f_0 = f_\infty = \infty$且对$\dfrac{1}{4}\mathrm{r} \leqslant u \leqslant \mathrm{r}$, 满足$f(u) \leqslant \mathrm{Nr}$, 因此, 根据定理 2, 对于任何$\lambda \in \left(0, \dfrac{1152}{339}\right)$, 问题(8)至少有 2 个正解。该正解的数值模拟如图 2 所示。

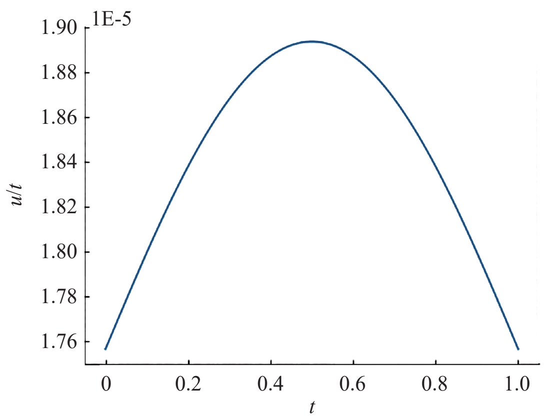

图 1　$\lambda = 10$时方程(7)解的存在性

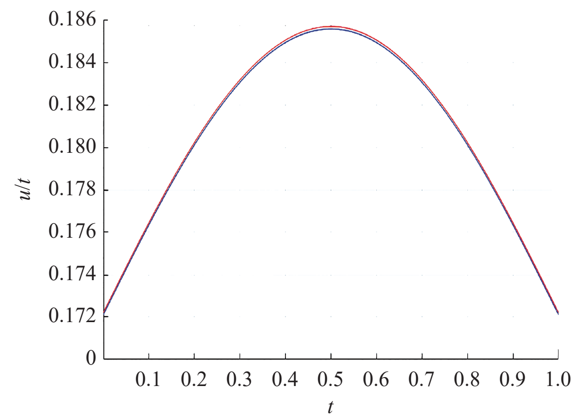

图 2　$\lambda = 1$时方程(8) 2 个解的存在性

例 3　考虑以下问题正解的存在性

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(u) \quad t \in [0,1] \\ u(0) - u(1) = 0 \\ u'(0) - u'(1) = u(1/2), u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$f(u) = \begin{cases} 2u^8 + 1 & 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 513 & u \geqslant 2 \end{cases}$$

可得$A = \dfrac{113}{1152}$, $B = \dfrac{11}{9216}$。取$a = 2$, $b = 8$, $c = 50$, $d = 1$, 则满足定理 3 中的所有条件。因此, 根据定理 3, 问题(9)至少有 3 个正解。正解的数值模拟如图 3 所示。

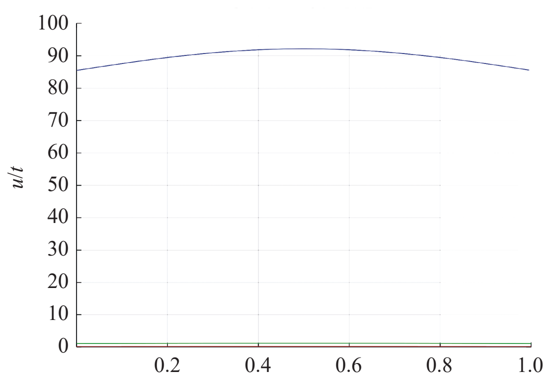

图 3　方程(9) 3 个解的存在性

6　结　论

对一类四阶常微分方程三点边值问题的正解的存在性和稳定性进行了深入研究。首先, 分析了相关格林函数的性质及其估计方法, 为后续正解的讨论奠定了理论基础。然后基于这些估计, 采用 Krasnosel'skii 与 Leggett-Williams 不动点定理, 探讨了带有权函数的四阶三点边值问题正解的存在性, 特

别是扰动项在不同取值范围下对正解数量的影响,分别讨论了1个解、2个解和3个解的存在条件。在此基础上,进一步分析了方程解在特定扰动条件下的Ulam-Hyers稳定性,提供了相应的充分条件。这一稳定性分析为解决动态系统中解的长期行为问题提供了重要的理论依据。最后,通过实例的数值模拟,验证了所提出结果的实际应用价值,展示了理论分析在解决实际工程和物理问题中的有效性与重要性。

参考文献:

[1] LIU B. Positive solutions of fourth-order two point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 148(2): 407−420.

[2] 韦孝东, 白占兵. 一类四阶弹性梁方程正解的存在唯一性 [J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2021, 40(3): 89−95.

[3] LI Y X. On the existence of positive solutions for the bending elastic beam equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189(1): 821−827.

[4] LI Y X. Existence of positive solutions for the cantilever beam equations with fully nonlinear terms[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016, 27: 221−237.

[5] MODEBEI M I, JATOR S N, RAMOS H. Block hybrid method for the numerical solution of fourth order boundary value problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 377: 112876.

[6] OKAMOTO Y, ONODERA M. Stability analysis of an overdetermined fourth order boundary value problem via an integral identity[J]. Journal of Differential Equations, 2021, 301: 97−111.

[7] 赵娇, 马如云. 一类四阶微分方程边值问题解的存在唯一性 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2021, 37(1): 81−90.

[8] 马亚薇, 马如云. 一类两端简单支撑弹性梁问题解的存在性 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2022, 59(2): 21−25.

[9] 瞿婧, 李永祥. 含导数项两端固定支撑的弹性梁方程的可解性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(5): 1014−1018.

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[11] WANG H Y. On the number of positive solutions of nonlinear systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 281(1): 287−306.

[12] HYERS D H. On the stability of the linear functional equation[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1941, 27(4): 222−224.

(责任编辑: 高 喆)