·数学与计算机科学·

引用格式:淡鹭涵,高兴慧,李婉婷,等. 准单调变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元的迭代算法[J]. 延安大学学报(自然科学版),2026,45(1):100-107. [DAN L H,GAO X H,LI W T,et al. Iterative algorithms for quasi monotonic variational inequality solution sets and semi-contractive mappings of common elements of a finite family of common fixed point sets[J]. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2026,45(1):100-107.] **DOI:**10.13876/J.cnki.ydnse.250023

准单调变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元的迭代算法

淡鹭涵,高兴慧*,李婉婷,高云鹏

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:在 Hilbert 空间中,研究了准单调变分不等式在 L-Lipschitz 连续的情况下结合不动点问题,证明了新算法产生的迭代序列强收敛到准单调变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元。将映射推广至准单调映射,同时将最小值自适应步长改为最大值自适应步长,最后给出具体的数值实验,验证了该迭代算法具有更快的收敛速度。

关键词:准单调变分不等式;不动点;半压缩映射有限族;强收敛性

中图分类号:O177.91 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-602X(2026)01-0100-08

设 H 是具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的实 Hilbert 空间,C 是 H 上的一个非空闭凸子集,映射 $A:H\to H$ 是一个映射,研究的变分不等式问题是指寻找 $x^*\in C$,使得 $\langle A(x^*),x-x^*\rangle\geq 0,x\in C$,记其解集为 $VI(C,A)$。

近年来,求解 Hilbert 空间中变分不等式问题和不动点问题受到了众多学者的关注[1-12]。杨静等[13]提出了一种投影算法:

$$\begin{cases}y_n=P_C(x_n-\lambda_nAx_n),\\ z_n=y_n+\lambda_n(Ax_n-Ay_n),\\ q_n=(1-\beta_n)z_n+\beta_nTz_n,\\ x_{n+1}=\alpha_nf(x_n)+(1-\alpha_n)q_n,\end{cases}$$

在该算法中,$\lambda_n=\gamma l^{m_n}$,m_n 是满足 $\gamma l^{m}\|Ax_n-Ay_n\|\leq\mu\|x_n-y_n\|$ 的最小非负整数,并且 $T:H\to H$ 是 α-半压缩映射,其中,A 是一个伪单调满足一致连续的映射,该算法证明了产成的迭代序列的强收敛性。2023 年,叶明露等[14]提出了求解准单调且 Lipschitz 连续的变分不等式问题,投影算法如下:

$$\begin{cases}x_0\in\mathbb{R}^n,\alpha>0,0<\eta<1,0<\sigma<1,k=0,\\ \alpha\eta_{m_k}\|F(x_k)-F(P_C(x_k-\alpha\eta_{m_k}F(x_k)))\|\leq\\ \qquad\sigma\|x_k-P_C(x_k-\alpha\eta_{m_k}F(x_k))\|,\\ r(x_k,\lambda_k)=x_k-y_k,\\ y_k=P_C(x_k-\lambda_kF(x_k)),\\ h_k(v)=\langle x_k-y_k-\lambda_k(F(x_k)-F(y_k)),v-y_k\rangle,\\ x_{k+1}=P_{H_k}(y_k-\lambda_k(F(y_k)-F(x_k))),\end{cases}$$

其中,$\lambda_k=\alpha\eta_{m_k}$,$H_k=\{v\in\mathbb{R}^n:h_k(v)\leq 0\}$,映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续的,映射 F 在 $\mathbb{R}^n$ 是准单调映射,其在准单调且对偶变分不等式解集非空的条件下,得到了准单调变分不等式解集的压缩投影算法所生成的聚点

收稿日期:2025-03-10

基金项目:国家自然科学基金项目(61866038);陕西省 2021 年特支计划人才项目;陕西省大学生创新训练计划项目(202510719024);延安大学研究生教育创新计划项目(YCX2024046)

作者简介:淡鹭涵(2000—),女,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析方面的研究。

*通信作者 E-mail:yadxgaoxinghui@163.com

是解的结论。

最近，高兴慧等[15]提出了求解伪单调变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元的新投影算法：

$$\begin{cases} \omega_n = x_n + \sigma_n(x_n - x_{n-1}), \\ t_n = P_C(\omega_n - \lambda_n A\omega_n), \\ u_n = t_n - \lambda_n(At_n - A\omega_n), \\ y_n^1 = (1 - \beta_n^1)u_n + \beta_n^1 T_1 u_n, \\ y_n^2 = (1 - \beta_n^2)y_n^1 + \beta_n^2 T_2 y_n^1, \\ \quad\cdots \\ y_n^N = (1 - \beta_n^N)y_n^{N-1} + \beta_n^N T_N y_n^{N-1}, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)y_n^N, \end{cases}$$

其中，A 是伪单调、L-Lipschitz 的，$T_i: H \to H$ 是半压缩映射族，其自适应满足

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\mu\|\omega_n - t_n\|}{\|A\omega_n - At_n\|}, \lambda_n\right\}, & A\omega_n - At_n \neq 0; \\ \lambda_n, & A\omega_n - At_n = 0。\end{cases}$$

受到上述研究的启发，本文提出了一种新的惯性自适应迭代算法，并证明了该算法的强收敛性，最后给出数值实验验证本文算法收敛速度更快，且得到的结论从伪单调映射推广至准单调映射，进而改进和推广了文献[15]的相关结果。

1　预备知识

假设 H 是一个实的 Hilbert 空间，$T: H \to H$ 是一个非线性映射，如果条件 $Tx^* = x^*$ 能够满足，那么 x^* 就叫做映射 T 的一个不动点，并用 $Fix(T)$ 表示映射 T 的不动点集，即满足：$Fix(T) = \{x^* \in H, Tx^* = x^*\}$。假设 C 是 H 上的一个非空闭凸子集，满足序列 $\{x_n\} \subset C$，用 $x_n \rightharpoonup x$ 表示 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，用 $x_n \to x$ 表示 $\{x_n\}$ 强收敛于 x。如果对任意的 $x \in H$，可以在 C 中找到唯一的逼近点，记作 $P_C x$，满足

$$\|x - P_C(x)\| = \|x - y\|, y \in C,$$

其中，P_C 叫做 H 到 C 上的映射。

定义 1[16]　假设 $T: H \to H$ 是一个非线性映射，且满足 $Fix(T) \neq \varnothing$，有

1)若对任意的 $x \in H, z \in Fix(T)$，满足

$$\|Tx - z\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 + \beta\|(I - T)x\|^2, 0 \leqslant \beta < 1,$$

则称 T 是 β-半压缩映射。

2)若对任意的 $x, y \in H$ 以及存在常数 $L > 0$，满足

$$\|Tx - Ty\| \leqslant L\|x - y\|,$$

则称 T 是 L-Lipschitz 连续的。

3)若对任意的 $x, y \in H$，满足

$$\langle Tx, y - x\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle Ty, y - x\rangle \geqslant 0,$$

则称 T 是伪单调的。

4)若对任意的 $x, y \in H$，满足

$$\langle Tx, y - x\rangle > 0 \Rightarrow \langle Ty, y - x\rangle \geqslant 0,$$

则称 T 是准单调的。

5)若对每一个序列 $\{x_n\} \subset H$，$\{x_n\}$ 弱收敛到某个点 $x \in H$，有 $\{Tx_n\}$ 弱收敛到 Tx，则称 T 在 H 上是序列弱连续的。

注 1[14]　映射是伪单调的一定是准单调的，反之则不成立。

定义 2[16]　假设 $T: H \to H$ 是一个非线性映射，$Fix(T) \neq \varnothing$，如果对任意的序列 $\{x_n\} \subset H$，当满足 $x_n \rightharpoonup x$ 和 $(I - T)x_n \to 0$ 的条件时，有 $x \in Fix(T)$ 成立，那么称 $I - T$ 在零点是半闭的。

引理 1[16]　假设 C 是 H 上的非空闭凸子集，对于给定的 $x \in H, p \in C$，有

$$p = P_C x \Leftrightarrow \langle x - p, p - y\rangle \geqslant 0, \forall y \in C。$$

引理 2[17]　假设 $T: H \to H$ 是一个 β-半压缩映射且满足映射 T 的不动点集非空，那么 T 的不动点集是 H 中的闭凸集。

引理 3[18]　假设 $\{c_n\}$ 是 $(0,1)$ 上的一个实数序列，$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \infty$，$\{d_n\}$ 是一个实数序列，假设

$$c_{n+1} \leqslant (1 - \theta_n)c_n + \theta_n d_n, \forall n \geqslant 1,$$

当序列 $\{c_n\}$ 的每一个子序列 $\{c_{n_k}\}$ 均满足 $\liminf_{k\to\infty}(c_{n_k+1} - c_{n_k}) \geqslant 0$ 时，有 $\limsup_{k\to\infty} d_{n_k} \leqslant 0$，则 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$。

2　主要结果

在给出主要结果之前，先给出以下条件：

(C1) $A: H \to H$ 为准单调、满足 L-Lipschitz 连续以及序列弱连续，$f: H \to H$ 是一个具有常数 $\sigma(\sigma \in [0,1))$ 的压缩映射；

(C2) $T_i: H \to H$ 是满足 $\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$ 的 ε_i-半压缩映射，$I - T_i$ 在零点是半闭的，其中，$i = 1, 2, \cdots, N$；

(C3) $VI(C, A) \cap \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$；

(C4)序列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\eta_n\} \subseteq (0,1)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$，$0 < \alpha_i \leqslant \beta_n^i \leqslant 1 - \varepsilon_i \leqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, N$，$a_i > 0$。

算法 1　$\lambda_1 > 0, \mu \in (0,1)$，取 $x_0, x_1 \in H, n := 1$。

第 1 步　令 $\omega_n = x_n + \eta_n(x_n - x_{n-1})$。

第2步 计算

$u_n = P_C(\omega_n - \frac{k}{\lambda_n}A\omega_n)$,

$y_n = u_n - \frac{k}{\lambda_n}(Au_n - A\omega_n)$,其中,

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \max\left\{\frac{\|A\omega_n - Au_n\|}{\mu\|\omega_n - u_n\|}, \lambda_n\right\}, & A\omega_n - Au_n \neq 0; \\ \lambda_n, & A\omega_n - Au_n = 0。\end{cases}$$

第3步 计算

$t_n^1 = (1-\beta_n^1)y_n + \beta_n^1 T_1 y_n$,

$t_n^2 = (1-\beta_n^2)t_n^1 + \beta_n^2 T_2 t_n^1$,

…

$t_n^{N-1} = (1-\beta_n^{N-1})t_n^{N-2} + \beta_n^{N-1}T_{N-1}t_n^{N-2}$,

$t_n^N = (1-\beta_n^N)t_n^{N-1} + \beta_n^N T_N t_n^{N-1}$。

第4步 计算

$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)t_n^N$。

令$n: = n+1$,回到第1步。

引理4[19] 如果满足条件(C1),那么由自适应步长产成的序列$\{\lambda_n\}$非递减且

$$0 < \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda \leqslant \max\left\{\frac{L}{\mu}, \lambda_1\right\}。$$

引理5[4] 如果满足条件(C1)~(C4),$\{\omega_n\}$是算法1产成的序列,假设存在子列$\{\omega_{nk}\}$弱收敛到$z\in H$和$\lim_{n\to\infty}\|u_{n_k} - \omega_{n_k}\| = 0$,则$Az=0$或者$z\in VI(C,A)$。

引理6 如果满足条件(C1)~(C4),$\{y_n\}$是由算法产成的序列,则

$$\|y_n - q\|^2 \leqslant \|\omega_n - q\|^2 - (1-\mu^2k^2\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2})\|u_n - \omega_n\|^2,$$
$$[q\in VI(C,A)]。\quad (1)$$

证明 由算法1可知

$$\|A\omega_n - Au_n\| \leqslant \mu\lambda_{n+1}\|\omega_n - u_n\|, \quad (2)$$

根据$\{y_n\}$的定义和式(2)知

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^2 &= \left\|u_n - \frac{k}{\lambda_n}(Au_n - A\omega_n) - q\right\|^2 = \\ &\|u_n-q\|^2 + \left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - \\ &2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle = \|u_n-\omega_n+\omega_n-q\|^2 + \\ &\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle = \\ &\|u_n-\omega_n\|^2 + \|\omega_n-q\|^2 + 2\langle u_n-\omega_n, \omega_n-q\rangle + \\ &\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle = \\ &\|u_n-\omega_n\|^2 + \|\omega_n-q\|^2 - 2\langle u_n-\omega_n, u_n-\omega_n\rangle + \\ &2\langle u_n-\omega_n, u_n-q\rangle + \left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - \\ &2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle = \|u_n-\omega_n\|^2 + \\ &\|\omega_n-q\|^2 - 2\|u_n-\omega_n\|^2 + 2\langle u_n-\omega_n, u_n-q\rangle + \\ &\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle = \\ &\|\omega_n-q\|^2 - \|u_n-\omega_n\|^2 + 2\langle u_n-\omega_n, u_n-q\rangle + \\ &\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle。\end{aligned}$$
$$(3)$$

由引理1以及$u_n = P_C(\omega_n - \frac{k}{\lambda_n}A\omega_n)$,可知

$\left\langle \omega_n - \frac{k}{\lambda_n}A\omega_n - u_n, u_n - q\right\rangle \geqslant 0$,即

$$\langle u_n - \omega_n, u_n - q\rangle \leqslant -\frac{k}{\lambda_n}\langle A\omega_n, u_n - q\rangle, \quad (4)$$

由$q\in VI(C,A)$,得$\langle Aq, u_n - q\rangle \geqslant 0$。

当$\langle Aq, u_n - q\rangle > 0$时,由$A$是准单调映射,有

$$\langle Au_n, u_n - q\rangle \geqslant 0, \quad (5)$$

将式(4)代入式(3)并结合式(5),可得

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^2 &\leqslant \|\omega_n-q\|^2 - \|u_n-\omega_n\|^2 - \\ &2\frac{k}{\lambda_n}\langle A\omega_n, u_n-q\rangle + \left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 - \\ &2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n-A\omega_n, u_n-q\rangle \leqslant \|\omega_n-q\|^2 - \|u_n-\omega_n\|^2 - \\ &2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n, u_n-q\rangle + \left(\frac{k}{\lambda_n}\right)^2\|Au_n-A\omega_n\|^2 \leqslant \\ &\|\omega_n-q\|^2 - \|u_n-\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n, u_n-q\rangle + \\ &\mu^2k^2\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2}\|u_n-\omega_n\|^2 \leqslant \|\omega_n-q\|^2 - \\ &\left(1-\mu^2k^2\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2}\right)\|u_n-\omega_n\|^2 - 2\frac{k}{\lambda_n}\langle Au_n, u_n-q\rangle \leqslant \\ &\|\omega_n-q\|^2 - \left(1-\mu^2k^2\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2}\right)\|u_n-\omega_n\|^2,\end{aligned}$$

式(1)得证。

当$\langle Aq, u_n - q\rangle = 0$时,设对任意的$k\in(0,+\infty)$,其子列记为$k_i$,有$\frac{1}{k_i} > 0$,则有

$$0<\left\langle Aq,u_n-q\right\rangle+\frac{1}{k_i}=\left\langle Aq,u_n+\frac{Aq}{\|Aq\|^2k_i}-q\right\rangle,$$

结合A是准单调得出

$$\left\langle A\left(u_n+\frac{Aq}{\|Aq\|^2k_i}\right),\left(u_n+\frac{Aq}{\|Aq\|^2k_i}\right)-q\right\rangle\geqslant 0,$$

令$i\to\infty$,则有$\left\langle Au_n,u_n-q\right\rangle\geqslant 0$,与上述证明一致，式(1)得证。

定理 1　如果满足条件(C1)~(C4)，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\eta_n}{\alpha_n}\cdot\|x_n-x_{n-1}\|=0$,那么由算法1产成的迭代序列$\{x_n\}$强收敛到$q\in VI(C,A)\cap\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$,$q\in P_{VI(C,A)\cap\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)}f(q)$。

证明　由引理2,得到$\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$是闭凸集，由文献[20]得到$VI(C,A)$也是闭凸集，再由条件(C3),注意到$P_{VI(C,A)\cap\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)}f(\cdot)$是压缩映射，根据Banach压缩原理，可知存在$q\in VI(C,A)\cap\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$,使得

$$q=P_{VI(C,A)\cap\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)}f(q)。$$

步骤 1　证明序列$\{x_n\}$有界。由引理4和$0<\mu<1$,可得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\mu^2k^2\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^{\ 2}}\right)=1-\mu^2k^2>0$。

由式(1),可得$\|y_n-q\|\leqslant\|\omega_n-q\|$。　　(6)

由$t_n^1,t_n^2,\cdots,t_n^N$的构造，可得

$$\begin{aligned}\|t_n^N-q\|^2=&\|(1-\beta_n^N)(t_n^{N-1}-q)+\beta_n^N(T_Nt_n^{N-1}-q)\|^2=\\&(1-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-q\|^2+\beta_n^N\|T_Nt_n^{N-1}-q\|^2-\\&\beta_n^N(1-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-T_Nt_n^{N-1}\|^2\leqslant(1-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-q\|^2+\\&\beta_n^N\left[\|t_n^{N-1}-q\|^2+\varepsilon_N\|(I-T_N)t_n^{N-1}\|^2\right]-\\&\beta_n^N(1-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-T_Nt_n^{N-1}\|^2=\|t_n^{N-1}-q\|^2-\\&\beta_n^N(1-\varepsilon_N-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-T_Nt_n^{N-1}\|^2,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\|t_n^{N-1}-q\|^2=&\|(1-\beta_n^{N-1})(t_n^{N-2}-q)+\\&\beta_n^{N-1}(T_{N-1}t_n^{N-2}-q)\|^2=(1-\beta_n^{N-1})\|t_n^{N-2}-q\|^2+\\&\beta_n^{N-1}\|T_{N-1}t_n^{N-2}-q\|^2-\beta_n^{N-1}(1-\beta_n^{N-1})\cdot\\&\|t_n^{N-2}-T_{N-1}t_n^{N-2}\|^2\leqslant(1-\beta_n^{N-1})\|t_n^{N-2}-q\|^2+\\&\beta_n^{N-1}\left[\|t_n^{N-2}-q\|^2+\varepsilon_{N-1}\|(I-T_{N-1})t_n^{N-2}\|^2\right]-\\&\beta_n^{N-1}(1-\beta_n^{N-1})\|t_n^{N-2}-T_{N-1}t_n^{N-2}\|^2=\|t_n^{N-2}-q\|^2-\\&\beta_n^{N-1}(1-\varepsilon_{N-1}-\beta_n^{N-1})\|t_n^{N-2}-T_{N-1}t_n^{N-2}\|^2,\end{aligned}\tag{8}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}\|t_n^1-q\|^2=&\|(1-\beta_n^1)(y_n-q)+\beta_n^1(T_1y_n-q)\|^2=\\&(1-\beta_n^1)\|y_n-q\|^2+\beta_n^1\|T_1y_n-q\|^2-\\&\beta_n^1(1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2\leqslant(1-\beta_n^1)\|y_n-q\|^2+\\&\beta_n^1\left[\|y_n-q\|^2+\varepsilon_1\|(I-T_1)y_n\|^2\right]-\\&\beta_n^1(1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2=\|y_n-q\|^2-\\&\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2。\end{aligned}\tag{9}$$

联立式(7)~式(9)以及条件(C4),可得

$$\|t_n^N-q\|\leqslant\|t_n^{N-1}-q\|\leqslant\cdots\leqslant\|t_n^1-q\|^2\leqslant\|y_n-q\|。\tag{10}$$

又

$$\begin{aligned}\|\omega_n-q\|=&\|x_n-q+\eta_n(x_n-x_{n-1})\|\leqslant\\&\|x_n-q\|+\alpha_n\frac{\eta_n}{\alpha_n}\|x_n-x_{n-1}\|,\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\eta_n}{\alpha_n}\|x_n-x_{n-1}\|=0$,则存在$M_1>0$,使得对任何$n\geqslant 1$,均有$\frac{\eta_n}{\alpha_n}\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant M_1$,则有

$$\|\omega_n-q\|\leqslant\|x_n-q\|+\alpha_nM_1。\tag{11}$$

结合式(6)、式(10)和式(11),可得

$$\begin{aligned}\|t_n^N-q\|\leqslant&\|t_n^{N-1}-q\|\leqslant\cdots\leqslant\|t_n^1-q\|^2\leqslant\\&\|y_n-q\|\leqslant\|\omega_n-q\|\leqslant\|x_n-q\|+\alpha_nM_1,\end{aligned}$$

由x_{n+1}的构造，可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|=&\|\alpha_n[f(x_n)-q]+(1-\alpha_n)(t_n^N-q)\|\leqslant\\&\alpha_n\|f(x_n)-q\|+(1-\alpha_n)\|t_n^N-q\|=\\&\alpha_n\|f(x_n)-f(q)+f(q)-q\|+\\&(1-\alpha_n)\|t_n^N-q\|\leqslant\alpha_n\sigma\|x_n-q\|+\\&\alpha_n\|f(q)-q\|+(1-\alpha_n)\left[\|x_n-q\|+\right.\\&\left.\alpha_nM_1\right]\leqslant\alpha_n\sigma\|x_n-q\|+\alpha_n\|f(q)-q\|+\\&(1-\alpha_n)\|x_n-q\|+\alpha_nM_1=\\&[1-\alpha_n(1-\sigma)]\|x_n-q\|+\\&\alpha_n(1-\sigma)\frac{\|f(q)-q\|+M_1}{(1-\sigma)}\leqslant\\&\max\left\{\|x_n-q\|,\frac{\|f(q)-q\|+M_1}{(1-\sigma)}\right\}\leqslant\cdots\leqslant\\&\max\left\{\|x_0-q\|,\frac{\|f(q)-q\|+M_1}{(1-\sigma)}\right\},\end{aligned}$$

故序列$\{x_n\}$有界。

步骤2 证明

$$(1-\alpha_n)\left(1-\frac{\lambda_{n+1}{}^2}{\lambda_n{}^2}\mu^2k^2\right)\|u_n-\omega_n\|^2+(1-\alpha_n)\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2+(1-\alpha_n)\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]\leqslant\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2+\alpha_nM_4。\tag{12}$$

由式(11),可得

$$\|\omega_n-q\|^2\leqslant\left(\|x_n-q\|+\alpha_nM_1\right)^2=\|x_n-q\|^2+\alpha_n\left(\alpha_nM_1{}^2+2M_1\|x_n-q\|^2\right)\leqslant\|x_n-q\|^2+\alpha_nM_2,\tag{13}$$

其中,$M_2=\sup\limits_{n\geqslant1}(\alpha_nM_1^2+2M_1\|x_n-q\|)$。根据$\|\cdot\|^2$的凸性以及式(1)、式(7)~式(11)、式(13)可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&=\|\alpha_n[f(x_n)-q]+(1-\alpha_n)(t_n^N-q)\|^2=\\&\alpha_n\|f(x_n)-f(q)+f(q)-q\|^2+(1-\alpha_n)\|t_n^N-q\|^2-\alpha_n(1-\alpha_n)\|f(x_n)-t_n^N\|^2\leqslant\\&\alpha_n\left[\|f(x_n)-f(q)\|^2+2\langle f(q)-q,f(x_n)-q\rangle\right]+(1-\alpha_n)\left\{\|t_n^{N-1}-q\|^2-\beta_n^N(1-\varepsilon_N-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-T_Nt_n^{N-1}\|^2\right\}\leqslant\alpha_n\left[\|f(x_n)-f(q)\|^2+2\langle f(q)-q,f(x_n)-q\rangle\right]+\\&(1-\alpha_n)\left\{\|t_n^{N-2}-q\|^2-\beta_n^{N-1}(1-\varepsilon_{N-1}-\beta_n^{N-1})\|t_n^{N-2}-T_{N-1}t_n^{N-2}\|^2-\beta_n^N(1-\varepsilon_N-\beta_n^N)\|t_n^{N-1}-T_Nt_n^{N-1}\|^2\right\}\\&\cdots\\&\leqslant\alpha_n\left[\|f(x_n)-f(q)\|^2+2\langle f(q)-q,f(x_n)-q\rangle\right]+(1-\alpha_n)\left\{\|y_n-q\|^2-\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2-\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]\right\}\leqslant\\&\alpha_n\left[\|f(x_n)-f(q)\|^2+2\langle f(q)-q,f(x_n)-q\rangle\right]+(1-\alpha_n)\left\{\|x_n-q\|^2+\alpha_nM_2-\left(1-\frac{\lambda_{n+1}{}^2}{\lambda_n{}^2}\mu^2k^2\right)\cdot\|u_n-\omega_n\|^2-\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2-\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]\right\}\leqslant\\&\alpha_n\left[\|f(x_n)-f(q)\|^2+2\langle f(q)-q,f(x_n)-q\rangle\right]+(1-\alpha_n)\left\{\|x_n-q\|^2-\left(1-\frac{\lambda_{n+1}{}^2}{\lambda_n{}^2}\mu^2k^2\right)\|u_n-\omega_n\|^2-\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2-\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]+\alpha_nM_2\right\}\leqslant\\&\alpha_n\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\|f(q)-q\|\|f(x_n)-q\|+(1-\alpha_n)\|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\left(1-\frac{\lambda_{n+1}{}^2}{\lambda_n{}^2}\mu^2k^2\right)\cdot\|u_n-\omega_n\|^2-(1-\alpha_n)\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2-(1-\alpha_n)\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]+\\&\alpha_nM_2\leqslant\|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\left(1-\frac{\lambda_{n+1}{}^2}{\lambda_n{}^2}\mu^2k^2\right)\cdot\|u_n-\omega_n\|^2-(1-\alpha_n)\beta_n^1(1-\varepsilon_1-\beta_n^1)\|y_n-T_1y_n\|^2-(1-\alpha_n)\sum_{i=2}^N\left[\beta_n^i(1-\varepsilon_i-\beta_n^i)\|t_n^{i-1}-T_it_n^{i-1}\|^2\right]+\\&\alpha_nM_2+\alpha_nM_3,\end{aligned}$$

其中,$M_3=\sup\limits_{n\geqslant1}2\|f(q)-q\|\|f(x_n)-q\|$,令$M_4=M_2+M_3$。故式(12)成立。

步骤3 证明

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant[1-\alpha_n(1-\sigma)]\|x_n-q\|^2+\alpha_n(1-\sigma)\left[\frac{M_5\eta_n}{\alpha_n(1-\sigma)}\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{2}{1-\sigma}\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\rangle\right]。\tag{14}$$

由x_{n+1}、ω_n的构造可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&=\|\alpha_n[f(x_n)-f(q)]+\alpha_n[f(q)-q]+(1-\alpha_n)(t_n^N-q)\|^2\leqslant\|\alpha_n[f(x_n)-f(q)]+(1-\alpha_n)(t_n^N-q)\|^2+2\alpha_n\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\rangle\leqslant\\&\alpha_n\sigma\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n)\|t_n^N-q\|^2+2\alpha_n\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\rangle,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\|t_n^N-q\|^2&\leqslant\|\omega_n-q\|^2\leqslant\|x_n-q+\eta_n(x_n-x_{n-1})\|^2\leqslant\\&\|x_n-q\|^2+2\eta_n\langle x_n-x_{n-1},\omega_n-q\rangle\leqslant\\&\|x_n-q\|^2+2\eta_n\|x_n-x_{n-1}\|\|\omega_n-q\|\leqslant\\&\|x_n-q\|^2+\eta_n\|x_n-x_{n-1}\|M_5,\end{aligned}\tag{16}$$

其中,$M_5=\sup\limits_{n\geqslant1}2\|\omega_n-q\|$。将式(16)代入式(15),可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant{}& \alpha_n\sigma\|x_n-q\|^2+\\&(1-\alpha_n)\left(\|x_n-q\|^2+\eta_n\|x_n-x_{n-1}\|M_5\right)+\\&2\alpha_n\left\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\right\rangle\leqslant\\&\alpha_n\sigma\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-q\|^2+\\&\eta_n\|x_n-x_{n-1}\|M_5+\\&2\alpha_n\left\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\right\rangle\leqslant\\&\left[1-\alpha_n(1-\sigma)\right]\|x_n-q\|^2+\\&\alpha_n(1-\sigma)\left[\frac{M_5\eta_n}{\alpha_n(1-\sigma)}\|x_n-x_{n-1}\|+\right.\\&\left.\frac{2}{1-\sigma}\left\langle f(q)-q,x_{n+1}-q\right\rangle\right],\end{aligned}$$

故式(14)成立。

步骤4　证明$\|x_n-q\|^2\to 0(\mathrm{n}\to\infty)$。

根据引理3可知，只要证明当序列$\{\|x_n-q\|\}$中的每个子列$\{\|x_{n_k}-q\|\}$均能满足$\liminf\limits_{k\to\infty}\left(\|x_{n_{k+1}}-q\|-\|x_{n_k}-q\|\right)\geqslant 0$时，有$\limsup\limits_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k+1}-q\right\rangle\leqslant 0$。

首先，假设序列$\{\|x_{n_k}-q\|\}$是$\{\|x_n-q\|\}$的子列，且满足$\liminf\limits_{k\to\infty}\left(\|x_{n_k+1}-q\|-\|x_{n_k}-q\|\right)\geqslant 0$，就有

$$\begin{aligned}&\liminf_{k\to\infty}\left(\|x_{n_k+1}-q\|^2-\|x_{n_k}-q\|^2\right)=\\&\quad\liminf_{k\to\infty}\left(\|x_{n_k+1}-q\|+\|x_{n_k}-q\|\right)\cdot\\&\quad\left(\|x_{n_k+1}-q\|-\|x_{n_k}-q\|\right)\geqslant 0。\end{aligned}$$

由式(12)，可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\left\{(1-\alpha_{n_k})\left(1-\frac{\lambda_{n_k+1}{}^2}{\lambda_{n_k}{}^2}\mu^2k^2\right)\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|^2+\right.\\&\quad(1-\alpha_{n_k})\beta_{n_k}^1(1-\varepsilon_1-\beta_{n_k}^1)\|y_{n_k}-T_1y_{n_k}\|^2+\\&\quad\left.(1-\alpha_{n_k})\sum_{i=2}^{N}\left[\beta_{n_k}^i(1-\varepsilon_i-\beta_{n_k}^i)\|t_{n_k}^{i-1}-T_it_{n_k}^{i-1}\|^2\right]\right\}\leqslant\\&\quad\limsup_{k\to\infty}(\|x_{n_k}-q\|^2-\|x_{n_k+1}-q\|^2+\alpha_nM_4)=\\&\quad-\liminf_{k\to\infty}\left(\|x_{n_k+1}-q\|^2-\|x_{n_k}-q\|^2\right)\leqslant 0,\end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty}\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|=0,\tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|y_{n_k}-T_1y_{n_k}\|=0,\tag{18}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|t_{n_k}^i-T_{i+1}t_{n_k}^i\|=0,i=1,2,\cdots,N-1。\tag{19}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\eta_n}{\alpha_n}\|x_n-x_{n-1}\|=0$和式(17)，可得

$$\begin{aligned}&\|u_{n_k}-x_{n_k}\|\leqslant\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|+\|\omega_{n_k}-x_{n_k}\|=\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|+\\&\quad\alpha_{n_k}\frac{\eta_{n_k}}{\alpha_{n_k}}\|x_{n_k}-x_{n_k-1}\|\to 0(k\to\infty)。\end{aligned}\tag{20}$$

由式(17)~式(20)以及条件(C4)，可得

$$\begin{aligned}&\|x_{n_k+1}-x_{n_k}\|=\|x_{n_k+1}-t_{n_k}^N\|+\|t_{n_k}^N-t_{n_k}^{N-1}\|+\cdots+\\&\quad\|t_{n_k}^2-t_{n_k}^1\|+\|t_{n_k}^1-y_{n_k}\|+\|y_{n_k}-x_{n_k}\|=\\&\quad\alpha_{n_k}\|f(x_{n_k})-t_{n_k}^N\|+\beta_{n_k}^N\|t_{n_k}^{N-1}-T_Nt_{n_k}^{N-1}\|+\cdots+\\&\quad\beta_{n_k}^2\|t_{n_k}^1-T_2t_{n_k}^1\|+\beta_{n_k}^1\|y_{n_k}-T_1y_{n_k}\|+\|u_{n_k}-x_{n_k}\|+\\&\quad\frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}\mu k\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|\to 0(k\to\infty)。\end{aligned}\tag{21}$$

因为序列$\{x_{n_k}\}$是有界的，所以存在子列$\{x_{n_{k_j}}\}$，使得$x_{n_{k_j}}\rightharpoonup z\in H$，且满足

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k}-q\right\rangle=\\&\quad\lim_{j\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_{k_j}}-q\right\rangle=\left\langle f(q)-q,z-q\right\rangle。\end{aligned}\tag{22}$$

联立式(17)~式(20)，可得

$$\begin{aligned}&\|y_{n_k}-x_{n_k}\|\leqslant\|u_{n_k}-x_{n_k}\|+\frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}\mu k\|u_{n_k}-\omega_{n_k}\|\to 0\\&\quad(k\to\infty),\\&\|t_{n_k}^1-x_{n_k}\|\leqslant\|t_{n_k}^1-y_{n_k}\|+\|y_{n_k}-x_{n_k}\|=\\&\quad\beta_{n_k}^1\|y_{n_k}-T_1y_{n_k}\|+\|y_{n_k}-x_{n_k}\|\to 0(k\to\infty),\\&\|t_{n_k}^2-x_{n_k}\|\leqslant\|t_{n_k}^2-t_{n_k}^1\|+\|t_{n_k}^1-x_{n_k}\|=\\&\quad\beta_{n_k}^2\|t_{n_k}^1-T_2t_{n_k}^1\|+\|t_{n_k}^1-x_{n_k}\|\to 0(k\to\infty),\\&\cdots\\&\|t_{n_k}^N-x_{n_k}\|\leqslant\|t_{n_k}^N-t_{n_k}^{N-1}\|+\|t_{n_k}^{N-1}-x_{n_k}\|=\\&\quad\beta_{n_k}^N\|t_{n_k}^{N-1}-T_Nt_{n_k}^{N-1}\|+\|t_{n_k}^{N-1}-x_{n_k}\|\to 0(k\to\infty)。\end{aligned}$$

综上，可得

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\|t_{n_k}^1-x_{n_k}\|=0,\ \lim_{k\to\infty}\|t_{n_k}^2-x_{n_k}\|=0,\cdots,\\&\lim_{k\to\infty}\|t_{n_k}^N-x_{n_k}\|=0,\ \lim_{k\to\infty}\|y_{n_k}-x_{n_k}\|=0。\end{aligned}\tag{23}$$

注意到$x_{n_k}\rightharpoonup z$，由$\|x_{n_k}-\omega_{n_k}\|\to 0$可知$\omega_{n_k}\rightharpoonup z(n\to\infty)$，根据式(17)以及引理5，得到$z\in VI(C,A)$。另一方面，根据式(23)，可得$y_{n_k}\rightharpoonup z,t_{n_k}^1\rightharpoonup z,\cdots,t_{n_k}^{N-1}\rightharpoonup z$，再结合式(18)和式(19)，根据定义2，有$z\in F(T_i)(i=1,2,\cdots,N)$，于是有$z\in\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)(i=1,2,\cdots,N)$。因此$z\in VI(C,A)\cap\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$。根据$q\in p_{VI(C,A)\cap\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)}f(q)$和引理1，可得

$$\limsup_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k}-q\right\rangle=\left\langle f(q)-q,z-q\right\rangle\leqslant 0,\tag{24}$$

由式(21)和式(24),可得

$$\limsup_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k+1}-q\right\rangle\le$$
$$\limsup_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k+1}-x_{n_k}\right\rangle+$$
$$\limsup_{k\to\infty}\left\langle f(q)-q,x_{n_k}-q\right\rangle\le 0,\tag{25}$$

联立式(14)、式(25)和引理3,可得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|^2=0$。

证毕。

注2 本文将文献[15]算法中的最小值自适应步长改为最大值自适应步长,并在算法[15]步骤2的自适应步长上增加了系数,从而加快了本文算法的收敛速度;本文将文献[15]的伪单调映射推广为准单调映射。

3 数值实验

在数值实验中,用n代表程序的迭代步数,t代表运行时间,$\|x_{n+1}-x_n\|$代表测量第n步误差。

例1 假设$A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是一个单调且满足$L$–Lipschitz连续的映射,其中,$L$–Lipschitz常数是$L=\|M\|$,满足$A(x)=Mx+q$,其中,$q\in\mathbb{R}^2$,$M=RR^{\mathrm{T}}+Q+N$,定义$C=\left\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\middle| x_i\le 2,\ i=1,2\right\}$为非空必凸集。$\boldsymbol{R}$是$2\times2$阶矩阵,且$\boldsymbol{R}$的元素在$(-2,2)$中随机生成;$\boldsymbol{Q}$是$2\times2$阶斜对称矩阵,其中,$\boldsymbol{Q}$的元素同样在$(-2,2)$中随机生成;$\boldsymbol{N}$是$2\times2$阶对角元素非负的对角矩阵,其中,对角元素在$(0,2)$中随机生成。对于本次数值实验,以$x_0=x_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$为初始值,$q=(0,0)^{\mathrm{T}}$。令$f(x)=\frac{1}{20}x$,定义映射$T_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2(i=1,2,3,4)$,分别为$T_1x=-\frac{x}{2}$,$T_2x=-\frac{x}{6}$,$T_3x=\frac{x}{3}$,$T_4x=\frac{x}{8}$,将迭代终止条件$eps$分别设置为$\|x_{n+1}-x_n\|\le10^{-50}$,$\|x_{n+1}-x_n\|\le10^{-60}$,$\|x_{n+1}-x_n\|\le10^{-70}$。将本文算法与文献[10]算法进行比较,选取参数如下:

本文算法Alg:$k=1.2$,$\alpha_n=\frac{1}{(n+1)^3}$,$\lambda_1=\frac{0.5}{L}$,$\eta_n=\frac{1}{n+1}$,$\mu=0.99$,$\beta_n^1=\frac{n}{2n+1}$,$\beta_n^2=\frac{n}{n+2}$,$\beta_n^3=\frac{n}{3n+2}$,$\beta_n^4=\frac{n}{5n+5}$;

文献[10]算法Alg.F:$\alpha_n=\frac{1}{(n+1)^3}$,$\lambda_1=\frac{0.5}{L}$,$\sigma_n=\frac{1}{n+1}$,$\mu=0.99$,$\beta_n^1=\frac{n}{2n+1}$,$\beta_n^2=\frac{n}{n+2}$,$\beta_n^3=\frac{n}{3n+2}$,$\beta_n^4=\frac{n}{5n+5}$。

终止条件$eps=\|x_{n+1}-x_n\|\le10^{-50}$时,本文算法对比文献[15],其算法收敛速度更快,数值实验对比结果见图1。

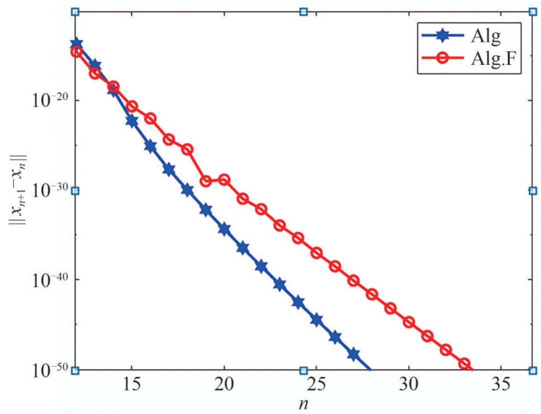

图1 两种算法的数值实验结果对比图

注3 根据程序实验,随着迭代步数增加,本文算法程序的误差逐渐减小并且趋向0,验证了本文算法的可行性和有效性。同时,通过对比图1可以看出随着迭代次数增加,本文算法的迭代收敛速度优于文献[15]算法的迭代收敛速度。

4 结束语

本文证明了所构造的惯性自适应迭代序列,强收敛到准单调变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元。在接下来的研究中,可以进一步考虑将半压缩映射不动点与均衡问题相结合,并证明其强收敛性。

参考文献:

[1]THONG D V, LIU L L, DONG Q L, et al. Fast relaxed inertial Tseng's method-based algorithm for solving variational inequality and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023, 418:1-24.

[2]TAN B, ZHOU Z, LI S X. Viscosity-type inertial extragradient algorithms for solving variational inequality problems and fixed point problem[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2022, 68:1387-1411.

[3]郭丹妮,蔡钢. 变分不等式和不动点问题的新迭代算法[J]. 数学学报(中文版),2022,65(1):77-88.

[4]杨蓝翔,陈艺,叶明露. 一类拟单调变分不等式的惯性投影算法[J]. 数学物理学报,2023,43(2):593-603.

[5]夏平静,蔡钢. Hilbert空间中变分不等式问题的自适应粘性算法[J]. 数学物理学报,2023,43(2):581-592.

[6]房萌凯,高兴慧,郭玥蓉,等.变分不等式问题和半压缩映射有限簇的强收敛定理[J].贵州大学学报(自然科学版),2024,41(1):31-36.

[7]谢忠兵,蔡钢,李肖肖,等.Hilbert空间中求解伪单调变分不等式的自适应次梯度外梯度算法[J].数学学报(中文版),2023,66(4):693-706.

[8]蔡钢.均衡问题、变分不等式问题和不动点问题的强收敛定理[J].数学学报(中文版),2017,60(4):669-680.

[9]胡绍涛,蔡钢.Banach空间中关于广义变分不等式问题和不动点问题的一种新的迭代算法[J].北京师范大学学报,2018,54(2):157-164.

[10]马蓓蓓,王万禹.求解强伪单调变分不等式和不动点问题公共点的投影算法[J].四川师范大学学报(自然科学版),2023,46(4):512-518.

[11]刘丽平,彭建文.求解变分不等式和不动点问题的公共元的修正次梯度外梯度算法[J].数学物理学报,2022,42(5):1517-1536.

[12]杨蓝翔,叶明露.一类伪单调变分不等式与不动点问题的自适应惯性投影算法[J].西华师范大学学报,2023,44(3):261-268.

[13]杨静,龙宪军.关于伪单调变分不等式与不动点问题的新投影算法[J].数学物理学报,2022,42(3):904-919.

[14]叶明露,邓欢.一种新的求解拟单调变分不等式的压缩投影算法[J].运筹学学报,2023,27(1):127-137.

[15]高兴慧,房萌凯,郭玥蓉.变分不等式解集和半压缩映射有限族公共不动点集的公共元的强收敛定理[J].浙江大学学报(理学版),2024,51(3):292-298.

[16]GOEBEL K, REICH S. Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings[M]. New York: Marcel Dekker,1984.

[17]THONG D V,HIEU D V. Modified subgradient extragradient algorithms for variatio-nal inequality problems and fixed point problems[J]. Optimization,2017,67(1):83-102.

[18]SAEJUNG S, YOTKAEW P. Approximation of zeros of inverse strongly monotone o-perators in Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis,2011,75(2):742-750.

[19]胡绍涛,王元恒,蔡钢.Hilbert空间上变分不等式问题的外梯度算法[J].数学学报(中文版),2023,66(5):845-854.

[20]KINDRLEHRER D, STAMPACCHIA G. An introduction to variational inequalities and their applications [M]. New York:Academic Press,1980.

[责任编辑　毕　伟]

Iterative algorithms for quasi monotonic variational inequality solution sets and semi-contractive mappings of common elements of a finite family of common fixed point sets

DAN Luhan[1], GAO Xinghui[2], LI Wanting, GAO Yunpeng

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: In Hilbert space, the quasi-monotonic variational inequality combined with the fixed point problem in the case of L-Lipschitz continuity is studied. It is proved that the iterative sequence engendered by the devised algorithm robustly converges towards the aggregate elements of the quasi-monotonic variational inequality solution set and the a family of semi-contractive mappings common fixed points set. The mapping is extended to quasi-monotone mapping, and the minimum adaptive step size is changed to the maximum adaptive step size. Finally, specific numerical experiments are given to verify that the iterative algorithm has a faster convergence speed.

Key words: quasi monotonic variational inequality; fixed points; a finite family of semi-contractive mappings; strong convergence