引用格式:马楠楠,姜金平,杨裔瑶. Cahn-Hilliard方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 延安大学学报(自然科学版),2026,45(1):108-113. [MA N N,JIANG J P,YANG Y Y. The existence of time-dependent global attractor for cahn-hilliard equation[J]. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2026,45(1):108-113.] **DOI**:10.13876/J.cnki.ydnse.250094

Cahn-Hilliard方程时间依赖全局吸引子的存在性

马楠楠,姜金平*,杨裔瑶

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要:基于时间依赖全局吸引子的概念,研究了带有时间依赖惯性系数的Cahn-Hilliard方程解的长时间动力学行为,当非线性函数满足临界增长条件时,利用渐近先验估计和算子分解的方法证明了有界吸收集的存在性和过程的渐近紧性,从而得到了Cahn-Hilliard方程时间依赖全局吸引子的存在性和正则性。研究结果推广了Cahn-Hilliard方程的模型,完善了Cahn-Hilliard方程吸引子的相关理论。

关键词:Cahn-Hilliard方程;时间依赖全局吸引子;渐近先验估计;算子分解

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1004-602X(2026)01-0108-06

在边界充分光滑的有界正则域$\Omega\subset\mathbf{R}^2$中,考虑如下Cahn-Hilliard方程:

$$\begin{cases}\varepsilon(t)u_{tt}+u_t+\Delta^2u-\Delta f(u)=h(x),x\in\Omega,t>\tau,\\ u=\Delta u=0,x\in\partial\Omega,\\ u(x,\tau)=u_0(x),u_t(x,\tau)=u_1(x),x\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中,$u=u(x,t)$为$\Omega\times(\tau,+\infty)$上的未知变量,$\varepsilon(t)$是关于$t$的函数,$h\in L^2(\Omega)$,单调递减的非负有界函数$\varepsilon(t)$和非线性项$f$满足下列条件:

1)函数$\varepsilon(t)$满足条件:

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0,\tag{2}$$

且存在正常数L,使得

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left[|\varepsilon(t)|+|\varepsilon'(t)|\right]\leqslant L。\tag{3}$$

2)函数$f\in C^2(\mathbf{R})$,$f(0)=0$满足增长性条件:

$$|f''(x)|\leqslant C\left(1+|x|^p\right),\forall x\in\mathbf{R},p<1,\tag{4}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{x}>-\lambda_1,\lambda_1=\inf_{v\in H_0^1,v\neq0}\frac{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}x\in\mathbf{R},\tag{5}$$

其中,$\lambda_1>0$是$A=\Delta^2$的第一个特征值。

为研究热力学中两种物质的相互扩散现象,CAHN等[1]在1958年提出了Cahn-Hilliard方程。在Cahn-Hilliard方程中,未知函数u表示二元材料中两相的相对浓度差,研究Cahn-Hilliard方程在材料科学中发挥着重要的作用。对于方程(1),当$\varepsilon(t)$为正常数时,文献[2]利用不动点定理,研究了Cahn-Hilliard方程经典解在时间上的全局存在性,文献[3-4]证明了二维非线性的Cahn-Hilliard方程解的一致有界性及其全局吸引子的存在性,文献[5-8]研究了具有惯性项的Cahn-Hilliard方程解的整体存在性及渐近性问题;当$\varepsilon(t)$为依赖于时间t的函数时,研究方程(1)解的渐近形态要使用CONTI等[9]提出的时间依赖动力系统模型。文献[10-11]基于此时间依赖模型证明了时间依赖全局吸引子的存在性,完善了研究时间依赖动力系统的模型框架。汪璇等[12-13]结合修正的拉回吸引子理论,研究了记忆型抽象发展方程和Kirchhoff型波方程的时间依赖全局吸引子的存在性和正则性。MA等[14]研究了非经典反应扩散方程的时间依

收稿日期:2025-09-08
基金项目:国家自然科学基金项目(12261090);陕西数理基础研究计划项目(23JSY050)
作者简介:马楠楠(1999—),男,硕士研究生,主要从事无穷维动力系统的研究。
*通信作者 E-mail:yadxjjp@163.com

赖全局吸引子的存在性和正则性，苏小虎等[15]研究了梁方程时间依赖全局吸引子的存在性。对于其他方程时间依赖全局吸引子存在性的证明参照文献[16-21]。

目前对具有惯性项的Cahn-Hilliard方程研究较多，但是对惯性项为依赖时间的有界函数的研究文献较少。本文受文献[3,9-11,14]的启发，运用先验估计及算子分解的方法，研究带时间依赖的Cahn-Hilliard方程全局吸引子存在性及正则性，揭示了Cahn-Hilliard方程解的长期动力学行为，完善了Cahn-Hilliard方程吸引子的相关理论。

1　预备知识

空间L^2中的内积与范数定义如下：

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x,\quad \|u\|^2=\int_\Omega|u(x)|^2\mathrm{d}x。$$

由A生成的Hilbert空间族$H_\theta=dom(A^{\theta/4})(0\leqslant\theta\leqslant2)$中的内积与范数定义如下：

$$\langle u,v\rangle_\theta=\int_\Omega A^{\theta/4}u(x)A^{\theta/4}v(x)\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_\theta^2=\int_\Omega|A^{\theta/4}u(x)|^2\mathrm{d}x。$$

特别地，有紧嵌入$H_{\theta+1}\subset H_\theta$。

定义时间依赖空间$H_t^\theta=H_{\theta+2}\times H_\theta(t\in\mathbf{R},0\leqslant\theta\leqslant2)$，并赋予相应范数：

$$\|\{u,u_t\}\|_{H_t^\theta}^2=\|u\|_{\theta+2}^2+\varepsilon(t)\|u_t\|_\theta^2。$$

当$\theta=0$时，记$H_t=H_2\times H$，对应范数为

$$\|\{u,u_t\}\|_{H_t}^2=\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2。$$

定义 1[9]　设$\{X_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是一族赋范线性空间，若双参数算子族$\{U(t,\tau):X_\tau\to X_t,t\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R}\}$满足以下性质：

1）对$\forall\tau\in\mathbf{R}$，$U(t,\tau)=Id$是X_τ上的恒等映射，

2）对$\forall t\geqslant s\geqslant\tau,\tau\in\mathbf{R},U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$，

则称$U(t,\tau)$是一个过程。

定义 2[9]　如果对任意的$t\in\mathbf{R}$，存在$R>0$，使得$C_t\subset B_t(R)$，则称有界集$C_t\subset H_t$的集合族$C=\{C_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是一致有界的。

定义 3[9]　如果集合族$B=\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$一致有界，且对任意的$R>0$，存在$t_0=t_0(t,R)\leqslant t$，使得$\tau\leqslant t_0\Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R)\subset B_t$，则称$B$是拉回吸收的。

定义 4[9]　如果对任意的$R>0$，存在$t_0(t,R)\leqslant t$，使得$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R)\subset B_t$，则称一致有界集族$B=\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是过程$U(t,\tau)$的时间依赖吸收集。

定理 1[14]　过程$U(t,\tau)$是渐近紧的，即集合

$$K=\left\{K=\{K_t\}_{t\in\mathbf{R}}:K_t\subset X_t\text{是紧的},K\text{是拉回吸引的}\right\}$$

是非空的，则时间依赖吸引子$\mathcal{A}$存在且唯一。

定义 5[13]　如果任意的$t\geqslant\tau$，$U(t,\tau)A_\tau=\mathcal{A}$，则称时间依赖吸引子$\mathcal{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是不变的。

2　主要结果

2.1　适定性

由标准的Galerkin方法可以得到方程（1）解u的适定性。

定理 2[20]　假设条件（2）~（5）成立，初始条件$(u_0,u_1)\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times L^2(\Omega)$，方程（1）在区间$[\tau,T)\times\Omega$中存在唯一弱解$u\in C([\tau,T),H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),u_t\in C([\tau,T),L^2(\Omega))$。

因此可以定义过程族$U(t,\tau):H_\tau\to H_t$，即$U(t,\tau)z(\tau)=\{u(\tau),u_t(\tau)\}$，其中$z(\tau)\in H_\tau$，$z(t)=(u(t),u_t(t))$是方程（1）关于初始时刻$\tau$和初始值$z(\tau)$的唯一解。

2.2　时间依赖吸收集

引理 1　假设条件（2）~（5）成立，设$U(t,\tau)z(\tau)$是问题（1）对于初始时刻τ和初始值$z(\tau)$的解，则存在常数C，使得

$$\|U(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}<C,\forall\tau\leqslant t,\tag{6}$$

其中，常数$C=C(R)\geqslant0$。

证明　设$0<\delta<1$，用$2u_t+2\delta u$与方程（1）在L^2中做内积可得

$$\langle\varepsilon(t)u_{tt},2u_t+2\delta u\rangle+\langle u_t,2u_t+2\delta u\rangle+\langle\Delta^2u,2u_t+2\delta u\rangle-\langle\Delta f(u),2u_t+2\delta u\rangle=\langle h(x),2u_t+2\delta u\rangle。$$

根据条件（4）和（5），由Sobolev嵌入定理可知，存在$K>0$使得

$$\|f(u)\|_{L^\infty}<K,\ \|f'(u)\|_{L^\infty}<K,\ \|f''(u)\|_{L^\infty}<K,$$

所以

$$\begin{aligned}|(\Delta f(u),2u_t+2\delta u)|&=|(\Delta f(u),2u_t)|+|(\Delta f(u),2\delta u)|\leqslant2|(f'(u)\nabla u,\nabla u_t)|+\\&2\delta|(f'(u)\nabla u,\nabla u)|\leqslant\\&2\int_\Omega|f'(u)||\nabla u||\nabla u_t|\mathrm{d}x+\\&2\delta\int_\Omega|f'(u)||\nabla u||\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant\\&K\lambda_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+2K\delta\lambda_1\|u\|_2^2。\end{aligned}\tag{7}$$

由式（7）可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\varepsilon(t)\|u_t\|^2+(1-K\lambda_1)\|u\|_2^2+\delta\|u\|+2\delta\varepsilon(t)(u_t,u)-2(h,u))+2\delta(1-K\lambda_1)\|u\|_2^2+2(1-\varepsilon'(t)-\delta\varepsilon(t))\|u_t\|^2-2\delta\varepsilon'(t)(u_t,u)-2\delta(h,u)\leqslant 0。\tag{8}$$

定义泛函：

$$E(t)=\varepsilon(t)\|u_t\|^2+(1-K\lambda_1)\|u\|_2^2+\delta\|u\|+2\delta\varepsilon(t)(u_t,u)-2(h,u)。\tag{9}$$

由Hölder不等式、Young不等式以及Poincaré不等式，并结合式(3)，得到以下估计：

$$2\delta\left|\varepsilon'(u_t,u)\right|\leqslant 2\delta L\|u_t\|\|u\|\leqslant\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{3\delta^2L^2}{2}\|u\|_2^2,\tag{10}$$

将式(9)、(10)代入式(8)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E(t)+\left(\frac{3}{2}-2\varepsilon'-2\delta\varepsilon\right)\|u_t\|^2+\delta\left(2-2K\lambda_1-\frac{3\delta L^2}{2}\right)\|u\|_2^2-2\delta(h,u)\leqslant 0。$$

设 $I(t)=\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\left(2-2K\lambda_1-\frac{3\delta L^2}{2}\right)\|u\|_2^2-2\delta(h,u)$,

则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E(t)+\delta I(t)\leqslant 0$,

因此有 $E(t)\leqslant-\delta\int_\tau^t I(s)\mathrm{d}s+E(\tau)$。　　(11)

由Hölder不等式、Young不等式以及Poincaré不等式，可得

$$E(t)\geqslant\varepsilon(t)\|u_t\|^2+(1-K\lambda_1)\|u\|_2^2-\frac{\varepsilon(t)}{2}\|u_t\|^2-\frac{3\delta^2L^2}{2}\|u\|_2^2-\frac{1}{2}\|u\|_2^2-\frac{1}{\lambda_2}\|h\|\geqslant\left(\frac{1}{2}-K\lambda_1-\frac{3\delta^2L^2}{2}\right)\|u\|_2^2+\frac{\varepsilon(t)}{2}\|u_t\|^2-\frac{1}{\lambda_2}\|h\|。$$

$$I(t)\geqslant\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\left(2-\frac{3\delta L^2}{2}-2K\lambda_1\right)\|u\|_2^2--\frac{1}{2}\|u\|_2^2-\frac{1}{\lambda_2}\|h\|\geqslant\left(\frac{3}{2}-\frac{3\delta L^2}{2}-2K\lambda_1\right)\cdot\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2-\frac{1}{\lambda_2}\|h\|。$$

取足够小的δ，使得存在一个正常数C，有

$$E(t)\geqslant C\left(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2\right)-M,\tag{12}$$

$$I(t)\geqslant C\left(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2\right)-M,\tag{13}$$

其中，$M=\frac{1}{\lambda_2}\|h\|$。利用式(10)~(12)，有

$$C\left(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2\right)-M\leqslant-\delta\left(C\left(\|u\|_2^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2\right)-M\right)\mathrm{d}s+E(\tau)。$$

因此，对任意的$R_0\geqslant\frac{M}{C}$，存在t_0，使得

$$\|u(t_0)\|_2^2+\varepsilon\|u_t(t_0)\|^2\leqslant R_0。$$

令$B_0=\bigcup_{t\geqslant\tau}U(t,\tau)B_1$，则

$B_1=\left\{(u_0,u_1)\in H_\tau:\|u_0\|_2^2+\varepsilon\|u_1\|^2\leqslant R_0\right\}$是有界吸收集。因此$B_0$也是过程族$\{U(t,\tau)\}$的有界吸收集。

为方便证明，本文中所出现的正常数C在每一行或者同一行中可能都代表不同的数。

引理2　假设条件(2)~(5)成立，对每个初值$z_i(\tau)\in H_\tau$且$\|z_i(\tau)\|_{H_\tau}\leqslant R$, $i=1,2$，则存在不依赖$z_i(\tau)$的常数$C\geqslant 0$，使得

$$\|U(t,\tau)z_1(\tau)-U(t,\tau)z_2(\tau)\|_{H_t}\leqslant e^{C(t-\tau)}\|z_1(\tau)-z_2(\tau)\|_{H_\tau},\ \forall t\geqslant\tau。$$

证明　设$z_1(\tau),z_2(\tau)\in H_\tau$，$\|z_i(\tau)\|_{H_\tau}\leqslant R(i=1,2)$，由引理1中的能量估计可知

$$\|U(t,\tau)z_i(\tau)\|_{H_t}\leqslant C。\tag{14}$$

令$\{u_i(t),\ \partial_tu_i(t)\}=U(t,\tau)z_i(\tau)(i=1,2)$，且

$\bar{z}(t)=\{\bar{u}(t),\bar{u}_t(t)\}=U(t,\tau)z_1(\tau)-U(t,\tau)z_2(\tau)$。

因此，这两个解的差关于初始值$\bar{z}(\tau)=z_1(\tau)-z_2(\tau)$满足以下方程：

$$\varepsilon(t)\bar{u}_{tt}+\bar{u}_t+\Delta^2\bar{u}-\Delta\left(f(u_1)-f(u_2)\right)=0。\tag{15}$$

将$2\bar{u}_t$与式(15)在L^2中做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\bar{z}\|_{H_t}^2+\left(2-\varepsilon'(t)\right)\|\bar{u}_t\|=2\left(\Delta\left(f(u_1)-f(u_2)\right),\bar{u}_t\right),\tag{16}$$

且$2\left(\Delta\left(f(u_1)-f(u_2)\right),\bar{u}_t\right)\leqslant 2\left\|\nabla\left(f(u_1)-f(u_2)\right)\right\|\cdot$

$$\|\nabla\bar{u}_t\|\leqslant 2K\|\nabla\bar{u}\|\|\nabla\bar{u}_t\|\leqslant 2\|\bar{u}_t\|^2+\frac{K^2}{2}\|\bar{u}\|_2^2\leqslant 2\|\bar{u}_t\|^2+C\|\bar{u}\|_2^2。\tag{17}$$

将式(16)~(17)代入式(14)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\|\bar{z}(t)\|_{H_t}^2\leqslant\|\bar{z}(\tau)\|_{H_t}^2。$$

利用Gronwall引理，在$[\tau,\ t]$上可得

$$\|\bar{z}(t)\|_{H_t}^2\leqslant\|\bar{z}(\tau)\|_{H_\tau}^2\cdot e^{C(t-\tau)}=\|z_1(\tau)-z_2(\tau)\|_{H_\tau}^2\cdot e^{C(t-\tau)}。$$

其中，$C\geqslant 0$是与R有关的常数。

记$B_t(R)=\left\{z\in H_t:\|z\|_{H_t}\leqslant R\right\}$。下述时间依赖吸收集的存在性定理。

定理3[8]　假设条件(2)~(5)成立,存在$R_0>0$,使得过程族$\{U(t,\tau)\}$的时间依赖吸收集为$B=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbf{R}}$,并且对$M_0\geqslant R_0$,有

$$\sup_{z\in B_\tau(R_0)}\left\{\|U(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}+\int_\tau^\infty\|u_t(y)\|^2\mathrm{d}y\right\}\leqslant M_0,\quad \forall t\in\mathbf{R}。\tag{18}$$

2.3　时间依赖全局吸引子的存在性

2.3.1　算子分解

先将非线性项f分解为$f=f_0+f_1$,此时f_0,$f_1\in C^2(\mathbf{R})$,且存在正常数k_0、k_1,满足:

$$|f_1'(u)|\leqslant k,\ \forall u\in\mathbf{R},\tag{19}$$

$$|f_0'(u)|\leqslant k(1+|u|^{\frac{4}{m-4}}),\ \forall u\in\mathbf{R},\tag{20}$$

$$f_0(0)=f_0'(0)=0,\tag{21}$$

$$f_0(u)u\geqslant 0,\ \forall u\in\mathbf{R}。\tag{22}$$

设$B=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbf{R}}$是由定理3所生成的时间依赖吸收集,固定$\tau\in\mathbf{R}$,则对任意的$z(\tau)\in B_\tau(R_0)$,将过程$U(t,\tau)z(\tau)$做如下分解:

$$U(t,\tau)z(\tau)=\{u(t),u_t(t)\}=U_0(t,\tau)z(\tau)+U_1(t,\tau)z(\tau),$$

其中,$U_0(t,\tau)z(\tau)=\{v(t),\ v_t(t)\}$和$U_1(t,\tau)z(\tau)=\{w(t),\ w_t(t)\}$分别满足:

$$\begin{cases}\varepsilon v_{tt}+v_t+Av-A^{1/2}f_0(v)=0,\\ U_0(\tau,\tau)=z,\end{cases}\tag{23}$$

和
$$\begin{cases}\varepsilon w_{tt}+w_t+Aw-A^{1/2}(f(u)-f_0(v))=h,\\ U_1(\tau,\tau)=0。\end{cases}\tag{24}$$

引理3　假设条件(2)~(5)成立,存在$\delta=\delta(B)>0$,使得

$$\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)},\ \forall t\geqslant\tau\text{成立。}$$

证明　由引理1,有

$$\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}\leqslant C。\tag{25}$$

定义泛函

$$E_1(t)=\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}^2+\delta\|v\|^2+2\delta\varepsilon(v_t,v)-K\lambda_1\|u\|_2^2,$$

由式(25),可得

$$\frac{1}{2}\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}^2\leqslant E_1(t)\leqslant C\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}^2,\tag{26}$$

用$2v_t+2\delta v$与方程(23)在L^2中做内积,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+2\delta(1-K\lambda_1)\|v\|_2^2+2(1-\varepsilon'(t)-\delta\varepsilon)\|v_t\|^2\leqslant 2\delta\varepsilon'(t)(v_t,v)。$$

由Hölder不等式、Young不等式以及Poincaré不等式,并结合式(3),得到以下估计:

$$2\delta|\varepsilon'(v_t,v)|\leqslant 2\delta L\|v_t\|\|v\|\leqslant\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{3\delta^2L^2}{2}\|v\|_2^2,$$

整理上式并结合条件(22),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+\delta\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}^2\leqslant 0。$$

最后,利用Gronwall引理可证得结论成立。由以上证明可得下面估计式成立。

$$\sup_{t\geqslant\tau}\left[\|U(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}+\|U_0(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}+\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}\right]\leqslant C。\tag{27}$$

引理4　假设条件(2)~(5)成立,存在$M=M(B)>0$,使得$\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^{1/3}}\leqslant M$。

证明　取足够小的$\delta>0$和足够大的$C>0$,并令

$$E_2(t)=\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^{1/3}}^2+\delta\|w\|_{1/3}^2+2\delta\varepsilon(w_t,A^{1/6}w)-2(h,A^{1/6}w)+C,$$

且
$$\frac{1}{2}\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^{1/3}}^2\leqslant E_2(t)\leqslant 2\|U_1(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^{1/3}}^2+2C。\tag{28}$$

用$2A^{1/6}w_t+2\delta A^{1/6}w$与方程(24)做内积,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t)+2(1-\varepsilon'(t)-\delta\varepsilon)\|w_t\|_{1/3}^2+2\delta\|w\|_{3/7}^2-2\delta(h,A^{1/6}w)-\left(A^{1/2}\left(f(u)-f_0(v)\right),2A^{1/6}w_t+2\delta A^{1/6}w\right)=2\delta\varepsilon'(w_t,A^{1/6}w)。\tag{29}$$

由式(3)和足够小的δ,利用Hölder不等式、Young不等式以及嵌入不等式,得到以下估计:

$$2\delta\varepsilon'|(w_t,A^{1/6}w)|\leqslant\frac{1}{2}\|w_t\|_{1/3}^2+\frac{3\delta^2L^2}{2}\|w\|_{3/7}^2。$$

利用条件(20)、条件(21)以及连续嵌入$H_{(3p-6)/2p}\subset L^p(\Omega)(p>2)$,结合式(27)和(28)可得

$$\begin{aligned}&2(A^{1/2}(f(u)-f_0(v)),A^{1/6}w_t)\leqslant\\&2\left|\left(A^{1/2}(f(u)-f(v)),A^{1/6}w_t\right)\right|+2\left|\left(A^{1/2}(f(v)-f_0(v)),A^{1/6}w_t\right)\right|\leqslant\\&2\left|\left((f'(u)-f'(v))u_t,A^{1/6}w_t\right)\right|+2\left|\left((f'(v)-f_0'(v))u_t,A^{1/6}w_t\right)\right|\leqslant\\&C\int_\Omega\left(1+|u|^{\frac{8-m}{m-4}}+|v|^{\frac{8-m}{m-4}}\right)|w||u_t|\cdot|A^{1/6}w_t|\mathrm{d}x+C\int_\Omega\left(1+|v|^{\frac{4}{m-4}}\right)|w_t|\cdot|A^{1/6}w_t|\mathrm{d}x\leqslant\\&C\left(1+\|u\|_{1/3}^{\frac{8-m}{m-4}}+\|v\|_{1/3}^{\frac{8-m}{m-4}}\right)\cdot\|w\|_{4/3}\|u_t\|\|w\|_{5/3}\leqslant C\|u_t\|\|w\|_{7/3}^2\leqslant\\&\frac{\delta}{4}E_2+C\|u_t\|^2\|w\|_{7/3}^2,\end{aligned}\tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
&2(A^{1/2}(f(u)-f_0(v)),A^{1/6}w)\leqslant\\
&\quad 2\left|((f'(u)-f'(v))u_t,A^{1/6}w)\right|+\\
&\quad 2\left|((f'(v)-f_0'(v))u_t,A^{1/6}w)\right|\leqslant\\
&\quad C\left(1+|u|_{L^{18(8-m)/5(m-4)}}^{\frac{8-m}{m-4}}+|v|_{L^{18(8-m)/5(m-4)}}^{\frac{8-m}{m-4}}\right)|w|_{4/3}\cdot\\
&\quad |u_t||w|+C\left(1+|v|_{L^6}^{\frac{4}{m-4}}\right)|w_t|_{1/3}|w|_1\leqslant\\
&\quad C\|u\|_2^2\|w\|_{7/3}^2\leqslant\frac{\delta}{4}E_2+C\|u\|_2^2\|w\|_{7/3}^2。
\end{aligned}\tag{31}
$$

将式(30)和(31)代入式(29)中,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t)+\frac{\delta}{2}E_2(t)\leqslant qE_2(t)+C,$$

其中,$q=C\left(\|u_t\|^2+\|u\|_2^2\right)$。由式(18)和引理3可知

$$\int_\tau^\infty q(y)\mathrm{d}y\leqslant C,$$

并且$E_2(t)\leqslant CE_2(t)\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{4}(t-\tau)}+C\leqslant C$。

结合式(28),得到$U_1(t,\tau)z(\tau)$在空间$H_1^{1/3}$中的有界性。

2.3.2 不变吸引子的存在

定理4 假设条件(2)~(5)成立,由方程(1)生成的过程族$U(t,\tau)$在H_t中拥有一个不变的时间依赖全局吸引子$\mathcal{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$。

证明 根据引理4,考虑族$K=\{K_t\}_{t\in\mathbf{R}}$,其中,

$$K_t=\left\{z(t)\in H_t^{1/3}:\|z(t)\|_{H_t^{1/3}}\leqslant M\right\}。$$

由紧嵌入$H_t^{1/3}\subset H_t$可知K_t是紧的;又因为常数M与t无关,则K一致有界。基于定理2,结合引理3和引理4,可得K是拉回吸引的。即

$$\delta(U(t,\tau)B_\tau(R_0),K_t)\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)},\forall t\geqslant\tau。$$

因此,$U(t,\tau)$是渐近紧的,从而证明了$U(t,\tau)$存在唯一时间依赖全局吸引子$\mathcal{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$。并且由引理1可知过程$\{U(t,\tau)\}$是强连续的,则根据文献[9]中的定理5.6可知吸引子$\mathcal{A}$的不变性。

2.4 吸引子的正则性

固定$\tau\in\mathbf{R}$,对$z_\tau\in A_\tau$,把$U(t,\tau)z(\tau)$分解为$U_3(t,\tau)z(\tau)+U_4(t,\tau)z(\tau)$,其中,$U_3(t,\tau)z(\tau)=\{v(t),v_t(t)\}$和$U_4(t,\tau)z(\tau)=\{w(t),w_t(t)\}$,分别满足:

$$\begin{cases}\varepsilon v_{tt}+v_t+Av=0,\\U_3(\tau,\tau)=z,\end{cases}\tag{32}$$

和

$$\begin{cases}\varepsilon w_{tt}+w_t+Aw-A^{1/2}f(u)=h,\\U_4(\tau,\tau)=0。\end{cases}\tag{33}$$

作为引理3的特殊情况,显然有

$$\|U_3(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t}\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)},\forall t\geqslant\tau。\tag{34}$$

引理5 假设条件(2)~(5)成立,对$M_1=M_1(A)$,有

$$\sup_{t\geqslant\tau}\left[\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^1}\right]\leqslant M_1\text{成立。}$$

证明 定义泛函:

$$
\begin{aligned}
E_3(t)=&\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^1}^2+\delta\|w\|_1^2+\\
&2\delta\varepsilon(w_t,A^{1/2}w)-2(h,A^{1/2}w)+C,
\end{aligned}
$$

对足够小的δ和足够大的C,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^1}^2\leqslant E_3(t)\leqslant\\
&\quad 2\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^1}^2+2C,
\end{aligned}\tag{35}
$$

用$2A^{1/2}w_t+2\delta A^{1/2}w$与式(33)在$L^2$中做内积,可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(t)+2(1-\varepsilon'(t)-\delta\varepsilon)\|w_t\|_1^2+2\delta\|w\|_3^2-\\
&\quad 2\delta(h,A^{1/2}w)-(A^{1/2}f(u),2A^{1/2}w_t+2\delta A^{1/2}w)=\\
&\quad 2\delta\varepsilon'(w_t,A^{1/2}w)。
\end{aligned}
$$

通过计算,可推导出

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(t)+\delta E_3(t)\leqslant(A^{1/2}f(u),2A^{1/2}w_t+\\
&\quad 2\delta A^{1/2}w)+\delta C,
\end{aligned}
$$

其中,$C>0$是与A_t在$H_t^{1/3}$中的界有关的常数,且

$$
\begin{aligned}
&2(A^{1/2}f(u),A^{1/2}w_t)+2\delta(A^{1/2}f(u),A^{1/2}w)\leqslant\\
&\quad 2\|f''(u)\|\|u_t\|(\|w_t\|_1+\|w\|_1)\leqslant\\
&\quad 2KE_3+C\leqslant\frac{\delta}{2}E_3+C。
\end{aligned}
$$

因此$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(t)+\frac{\delta}{2}E_3(t)\leqslant C$。

利用Gronwall引理,结合式(35)可得$\|U_4(t,\tau)z(\tau)\|_{H_t^1}$的一致有界性。

定理5 在族K中,对所有的$t\in\mathbf{R}$,时间依赖吸引子$\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$在H_t^1中有界,且界与时间t无关。

证明 令$K_t^1=\left\{z\in H_t^1:\|z\|_{H_t^1}\leqslant M_1\right\}$。

由不等式(34)和引理5,对$t\in\mathbf{R}$,有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\delta(U(t,\tau)A_\tau,K_t^1)=0。$$

由$\mathcal{A}$的不变性,有$\delta_t(A_t,K_t^1)=0$。

因此,$A_t\subset\overline{K_t^1}=K_t^1$。即证明了$A_t$在$H_t^1$中有界,且与$t\in\mathbf{R}$无关。

3 结束语

本文研究了带有时间依赖惯性系数的Cahn-Hilliard方程,并证明了其时间依赖全局吸引子的存在性与正则性。通过渐近先验估计和算子分解方法,克服了时间依赖系数带来的复杂性,揭示了该方程解的长期动力学行为。研究结果不仅推广了Cahn-Hilliard方程的模型,也为理解和分析更广泛的时间依赖动力系统提供了理论基础。未来的研

究工作可以进一步探讨具有更复杂非线性项、随机扰动或不同边界条件下的吸引子行为，不断完善该领域的理论体系。

参考文献：

[1]CAHN J W, HILLIARD J E. "Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy."[J]. The Journal of Chemical Physics,1958,28(2):258-267.

[2]XU H, SHI Y. Global existence and L_p decay estimate of solutions for viscous Cahn-Hilliard equation with inertial term[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2019,24(6):461-466.

[3]WANG W, WU Z. Optimal decay rate of solutions for Cahn-Hilliard equation with inertial term in multi-dimensions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 387(1):349-358.

[4]BONFOH A. Existence and continuity of uniform exponential attractors for a singular perturbation of a generalized Cahn-Hilliard equation[J]. Asymptotic Analysis, 2005, 43(3): 718-719.

[5]AZER K, SEMA Y. Global attractors for the 2D hyperbolic Cahn-Hilliard equations[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik,2018,69(1):1-17.

[6]LIU C, WANG J. Some properties of solutions for an isothermal viscous Cahn-Hilliard equation with inertial term[J]. Boundary Value Problems,2018(1):1-15.

[7]史苑，任永华. 具有惯性项和阻尼项的Cahn-Hilliard方程的整体吸引子[J]. 应用数学,2020,33(3):539-549.

[8]MIRANVILLE A. Asymptotic behavior of a generalized Cahn-Hilliard equation with a proliferation term[J]. Applicable Analysis,2013,92(6):1308-1302.

[9]CONTI M, PATA V, TEMAM R. Attractors for processes on time-dependent spaces applications to wave equations[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 255(6):1254-1277.

[10]刘亭亭，马巧珍. Plate方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 华东师范大学学报(自然科学报),2016(2):35-44.

[11]NGUYEN T D. Time-dependent global attractors for strongly damped wave equations with time-dependent memory kernels[J]. Dynamical Systems,2022,37(3):466-492.

[12]汪璇，韩英，胡弟弟. 记忆型抽象发展方程的时间依赖全局吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(4):769-779.

[13]苏洁，汪璇. 带有非局部强阻尼的Kirchhoff型波方程的时间依赖全局吸引子[J]. 中山大学学报(自然科学版)(中英文),2023,62(4):165-177.

[14]MA Q, WANG X, XU L. Existence and regularity of time-dependent global attractors for the nonclassical reaction-diffusion equations with lower forcing term[J]. Boundary Value Problems,2016(1):1-11.

[15]苏小虎，姜金平. 梁方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 应用数学和力学,2020,41(2):195-203.

[16]汪璇，袁海燕. 具有时间依赖记忆核的非经典扩散方程的吸引子[J]. 数学物理学报,2024,44(2):429-452.

[17]DING T, LIU Y. Time-dependent global attractor for the nonclassical diffusion equations[J]. Applicable Analysis, 2014,94(7):1439-1449.

[18]LIU T, MA Q. Time-dependent attractor of the plate equation with nonlinear damping and linear memory[J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2020, 50(4): 1435-1450.

[19]刘生清，姜金平，任丽宇，等. 带线性记忆的Berger方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 延安大学学报(自然科学版),2023,42(2):103-110.

[20]刘生清，姜金平，任丽宇. 带时间依赖惯性系数的Cahn-Hilliard方程的适定性[J]. 湖北大学学报(自然科学版),2024,46(2):217-224.

[21]汪璇，杜亚利，梁玉婷. 非线性阻尼Berger方程的时间依赖全局吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版),2020,58(5):1035-1046.

[责任编辑　毕　伟]

The existence of time-dependent global attractor for Cahn-Hilliard equation

MA Nannan, JIANG Jinping*, YANG Yiyao

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: Based on the notion of the time-dependent global attractor, the long-time dynamic behavior of the solution for the Cahn-Hilliard equation with the time-dependent inertial coefficients was considered. When the nonlinear function satisfies the critical growth condition, the existence of the bounded absorbing set and the asymptotic compactness of the process were demonstrated by using the asymptotic priori estimates and the method of operator decomposition, and then the existence and regularity of the time-dependent global attractor of the Cahn-Hilliard equation were proved. The research findings extend the Cahn-Hilliard equation model and advance the theoretical understanding of Cahn-Hilliard equation attractors.

Key words: Cahn-Hilliard equation; time-dependent global attractor; asymptotic prior estimate; operator decomposition