

## 含耦合不对中的深沟球轴承灵敏度分析

刘明<sup>1</sup>, 王鹏飞<sup>1</sup>, 官宏<sup>1</sup>, 马辉<sup>1,2</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819;

2. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 针对旋转机械中轴承非正常安装时可能出现的异常振动问题, 分析了轴承耦合不对中对滚珠接触力及振动响应的影响. 考虑深沟球轴承外圈同时存在轴向、平行和角不对中情况, 提出了一种综合考虑这3种不对中的深沟球轴承力学模型, 并通过正交试验设计研究了3种不对中对滚道接触力及转子振动响应的灵敏度. 结果表明, 同时存在3种不对中时, 平行不对中对滚珠接触力和振动响应最敏感, 轴向不对中对滚珠接触力和振动响应灵敏度最小.

**关键词:** 耦合不对中; 深沟球轴承; 正交试验设计; 接触力; 振动响应

中图分类号: TH 113.1; O 322 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2025)01-0083-09

## Sensitivity Analysis of Deep Groove Ball Bearings with Coupling Misalignment

LIU Ming<sup>1</sup>, WANG Peng-fei<sup>1</sup>, GUAN Hong<sup>1</sup>, MA Hui<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;

2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: MA Hui, E-mail: mahui\_2007@163.com)

**Abstract:** To address the anomalous vibrations potentially caused by improper bearing installation in rotating machinery, the effects of bearings' coupling misalignment on the contact forces and vibration responses of ball bearings were analyzed. A mechanical model for deep groove ball bearings was developed, considering the axial, parallel, and angular misalignments in the outer ring. Sensitivities of the raceway contact forces and rotor vibration responses to these three types of misalignments were evaluated through the orthogonal experimental design. The results showed that, when all the three misalignments coexist, parallel misalignment exhibits the highest sensitivity to both contact forces and vibration responses, while axial misalignment demonstrates the lowest sensitivity.

**Key words:** coupling misalignment; deep groove ball bearing; orthogonal experimental design; contact force; vibration response

旋转机械常常采用深沟球轴承作为其关键支撑部件. 然而由于加工误差、安装误差等因素, 使轴承不对中广泛存在于机械系统中. 轴承的不对中不仅会导致滚珠与滚道之间的接触力增加, 严重时还会破坏保持架, 降低轴承服役寿命.

Harris等<sup>[1]</sup>将滚动轴承的不对中详细分为轴变形、不同轴心线、外圈角不对中、内圈角不对中. Wang等<sup>[2]</sup>建立了含轴向不对中、平行不对中、

角不对中的轴承力学表征模型, 基于该模型讨论了3种不对中对齿轮-轴承-转子系统的影响. 随后又综合讨论了平行和角不对中、静态与动态不对中<sup>[3]</sup>、角不对中和保持架故障<sup>[4]</sup>对系统的影响, 并通过实验<sup>[5]</sup>验证了轴承力模型的准确性. 文献[6-7]提出了一种新型的轴承-转子系统拟静力学模型, 研究了轴承内、外圈动态角不对中及滚珠分布误差对轴承刚度的影响.

收稿日期: 2023-07-27

基金项目: 国家重点研发计划项目(2020YFB2007802).

作者简介: 刘明(2000—), 男, 江苏徐州人, 东北大学硕士研究生; 马辉(1978—), 男, 河北安平人, 东北大学教授, 博士生导师.

在轴承滚道角不对中的研究中, Xu 等<sup>[8]</sup>针对双列角接触球轴承的内圈不对中建立轴承 5 自由度模型, 发现内圈角不对中会显著改变滚珠-滚道间的接触特性. Zhang 等<sup>[9]</sup>针对滚道不对中建立一种改进的滚珠轴承准静态模型, 研究了角不对中对轴承使用寿命的影响. Balyakin 等<sup>[10]</sup>研究滚道不对中对滚动轴承扭转特性和疲劳寿命的影响, 发现滚道不对中会增加滚动轴承的摩擦扭矩. Yang 等<sup>[11]</sup>研究发现初始角不对中的不确定性导致滚珠轴承磨损深度的显著分散, 但分散程度与主轴转速、角度不对中工况和轴承安装位置有关. Tong 等<sup>[12-13]</sup>研究了角不对中以及平行和轴向载荷对角接触球轴承运行扭矩与圆锥滚子轴承疲劳寿命的影响. Wen 等<sup>[14]</sup>建立了考虑多体相互作用的改进 5 自由度准动力学模型, 进一步评价角不对中对轴承可靠性的影响. Wang 等<sup>[15]</sup>提出了一种考虑变形和角不对中的滚珠轴承综合模型, 发现角不对中会影响载荷分布, 并沿特定方向降低或增加轴承刚度. 易均等<sup>[16]</sup>研究了轴承外圈发生角不对中时滚动轴承的非线性支承力形式, 并分析了歪斜对系统全局非线性稳定特性和振动特性的影响. Parmar 等<sup>[17]</sup>发现当轴承存在局部缺陷时, 滚动体在缺陷内到达的深度随轴承不对中角度的变化而变化.

在轴向不对中与平行不对中的研究中, Ye 等<sup>[18]</sup>发现轴向不对中会影响圆柱滚子轴承的载荷特性和稳定性. Yi 等<sup>[19]</sup>针对两个匹配轴承在实际安装中产生的平行不对中的影响, 发现适量的不对中可能有利于轴承-转子匹配系统的动态特性.

通过上述研究可以发现, 目前关于轴承不对中的研究大多关注单一的角不对中, 而含有耦合不对中的轴承的研究尚不多见. 针对这一不足, 本文基于非线性 Hertz 接触理论, 考虑到深沟球轴承由于安装误差而导致外圈同时存在轴向、平行和角度 3 种不对中情况, 提出了包含轴承耦合不对中的非线性轴承力表达式. 将其引入转子有限元模型中, 建立了轴承-转子系统动力学模型. 随后, 对轴承同时存在轴向、平行、角不对中 3 种不对中情况进行正交试验设计, 进一步分析了 3 种不对中对滚珠接触力及振动响应的灵敏度.

### 1 深沟球轴承耦合不对中力学模型

图 1 为深沟球轴承模型图, 其中  $R_b$  为外滚道

半径,  $r_b$  为内滚道半径,  $d_m$  为轴承节径,  $d_b$  为滚珠直径,  $c_c$  为滚珠与保持架之间的间隙,  $N_b$  为滚珠个数,  $\omega_c$  为保持架旋转角速度. 为了便于研究, 先作出以下假设: ①滚珠做纯滚动; ②忽略润滑、温度和滚珠离心力的作用. 为了便于表达, 定义  $l_{ab}$  代表点  $a$  与点  $b$  之间的距离, 即线段  $ab$  的长度.

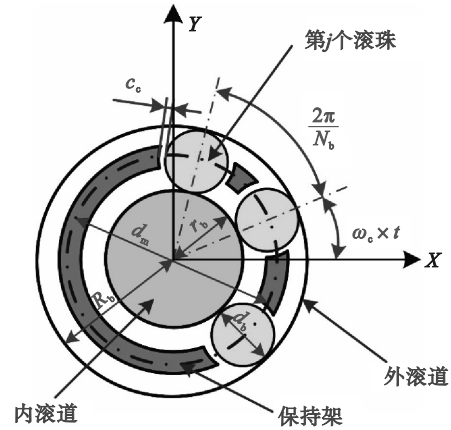


图 1 深沟球轴承示意图

Fig. 1 Schematic of the deep groove ball bearing

#### 1.1 轴向不对中

深沟球轴承由健康到发生轴向不对中的示意图如图 2 所示. 当发生轴向不对中(轴承外滚道轴向窜动量为  $S_a$ ), 内滚道曲线中心  $O_{in,j}$  不变, 外滚道曲线中心由  $O_{out,j}$  变为  $O_{out,j}'$ , 滚珠中心由  $O_{b,j}$  变为  $O_{b,j}'$ , 轴承径向间隙由  $c_{r,j}$  变为  $c_{r,j}'$ , 下标  $j$  代表第  $j$  个滚珠,  $\Delta_b$  为法向间隙. 轴向不对中使轴承与平行平面产生接触角  $\alpha_b$ .

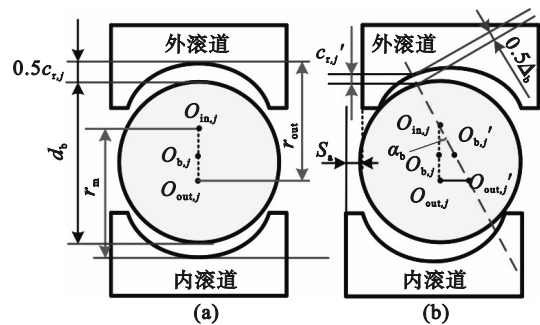


图 2 深沟球轴承不对中示意图

Fig. 2 Schematic of the misalignment of the deep groove ball bearing

(a)—健康; (b)—轴向不对中.

可知外滚道与内滚道曲率中心的距离为<sup>[2]</sup>

$$l_{O_{out,j}O_{in,j}} = r_{in} + r_{out} - d_b - c_r,$$

$$l_{O_{out,j}'O_{in,j}} = S_a.$$

式中,  $r_{in}$  与  $r_{out}$  分别为内、外滚道的曲率半径,  $r_{in} = f_i d_b$ ,  $r_{out} = f_o d_b$ ,  $f_i, f_o$  为内、外滚道曲率半径系数.

轴承由于轴向不对中导致的接触角和径向间隙表达式为<sup>[2]</sup>

$$\alpha_b = \arctan\left(\frac{S_a}{r_{in} + r_{out} - d_b - c_{r,j}}\right),$$

$$c_{r,j}' = \frac{\Delta_b}{\cos \alpha_b}.$$

### 1.2 平行不对中

在轴向不对中的基础上引入平行不对中(轴承外滚道平行窜动量为 $S_r$ ),其变化示意图如图 3 所示. $\varphi_r$ 为发生平行不对中的方向与 $X$ 轴方向夹角.当同时发生轴向和平行不对中时,外滚道曲率中心由 $O_{out,j}'$ 点变为 $O_{out,j}''$ 点,滚珠中心由 $O_{b,j}'$ 变为 $O_{b,j}''$ .

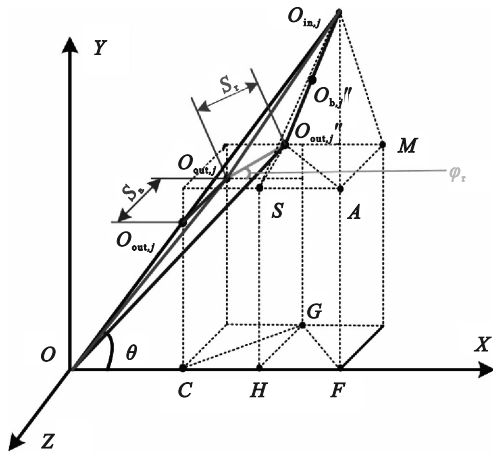


图 3 含轴向不对中和平行不对中几何关系示意图  
Fig. 3 Schematic of the geometric relationship of axial misalignment and parallel misalignment

内、外滚道曲率中心到坐标轴原点的距离 $l_{OO_{in,j}}$ 和 $l_{OO_{out,j}}$ 分别为

$$l_{OO_{in,j}} = \frac{d_m + l_{O_{out,j}O_{in,j}}}{2},$$

$$l_{OO_{out,j}} = \frac{d_m - l_{O_{out,j}O_{in,j}}}{2}.$$

在实际工程中,滚珠与保持架之间的兜孔间隙会影响位置角的分布.考虑到滚珠与保持架之间的兜孔间隙 $c_c$ 的影响,此时 $\theta_j$ 可以表示为

$$\theta_j = \omega_c t + \frac{2\pi}{N_b}(j-1) + 2\tau_j \arcsin\left(\frac{c_c}{2d_m}\right).$$

式中, $\tau_j$ 为-1到1之间均匀分布的随机数( $j=1, 2, \dots, N_b$ ).由于安装时外圈与轴承座固定,内圈随转子系统一同转动,此时 $\omega_c$ 可以表示为

$$\omega_c = \frac{\omega_r r_b}{R_b + r_b}.$$

式中, $\omega_r$ 为转子的旋转角速度,rad/s.

平行不对中后轴承位置角如图 4 所示,点 $P$ 为点 $O_{b,j}''$ 投影在 $XOY$ 面的点,过点 $P$ 作 $OO_{b,j}$ 的垂线,交点为 $Q$ ,平行不对中后的位置角 $\theta_j'$ 为

$$\theta_j' = \theta_j - \frac{\frac{S_r}{2} \sin(\theta_j - \varphi_r)}{\frac{d_m}{2} + \frac{S_r}{2} \cos(\theta_j - \varphi_r)}.$$

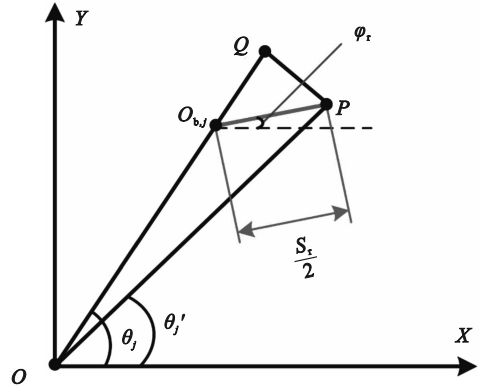


图 4 平行不对中后轴承位置角  
Fig. 4 Bearing position angle after parallel misalignment

径向间隙投影的夹角如图 5 所示,其中 $S$ 为 $O_{out,j}''$ 在 $XOY$ 平面的投影,过 $S$ 作 $OO_{out,j}$ 的垂线,交点为 $Q$ ,滚珠中心变为 $O_{b,j}''$ .

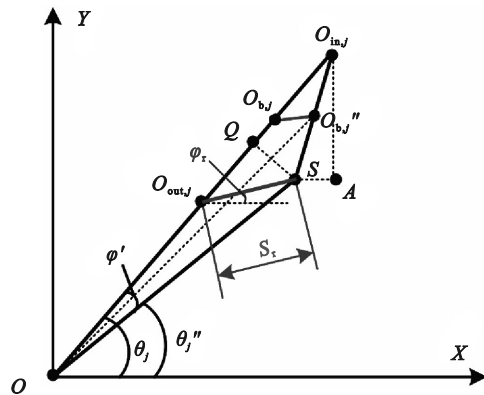


图 5 径向间隙投影的夹角  
Fig. 5 The angle of the radial clearance projection

图 5 中投影与位置角上的夹角 $\angle SO_{b,j}''O$ 可以通过如下几何关系计算得到.

$$l_{SO_{in,j}} = \left[ (l_{AS})^2 + (l_{AO_{in,j}})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\angle O_{b,j}''OO_{in,j} = \arcsin \frac{S_r \sin(\theta - \varphi_r)}{l_{OO_{in,j}} + S_r \cos(\theta - \varphi_r)},$$

$$\begin{cases} l_{AS} = l_{O_{out,j}O_{in,j}} \cos \theta - S_r \cos \varphi_r, \\ l_{AO_{in,j}} = l_{O_{out,j}O_{in,j}} \sin \theta - S_r \sin \varphi_r, \end{cases}$$

$$\angle SO_{in,j}O = \arcsin \frac{S_r \sin(\theta - \varphi_r)}{\sqrt{l_{AS}^2 + l_{AO_{in,j}}^2}},$$

$$\angle SO_{b,j}''O = \angle O_{b,j}''OO_{in,j} + \angle SO_{in,j}O. \quad (1)$$

外滚道曲率中心位置角  $\theta_j''$  可以表示为

$$\theta_j'' = \theta_j - \arctan \frac{S_r \sin(\theta - \varphi_r)}{\frac{d_m - l_{O_{out,j}O_{in,j}}}{2} + S_r \cos(\theta - \varphi_r)}. \quad (2)$$

### 1.3 角不对中

轴承发生耦合不对中后几何关系如图 6 所示,存在轴向和平行不对中时,外圈沿不对中轴线方向发生了倾斜,不对中轴线与轴线夹角为  $\beta_i$ ,倾斜角度为  $\varphi_o$ ,其中第  $j$  个滚珠所在的角位置为  $\theta_j'$ ,该滚珠所在的外滚道曲率中心轨迹点为  $O_{out,j}''$ .为便于分析,过点  $S$  作与不对中轴线相交的垂线  $QS$ ,垂足为  $Q$ ;过点  $O_{out,j}''$  作与线  $QS$  相交的垂线  $O_{out,j}''R$ ,垂足为  $R$ ;过点  $O_{in,j}$  作与不对中轴线相交的垂线  $O_{in,j}W$ ,垂足为  $W$ .

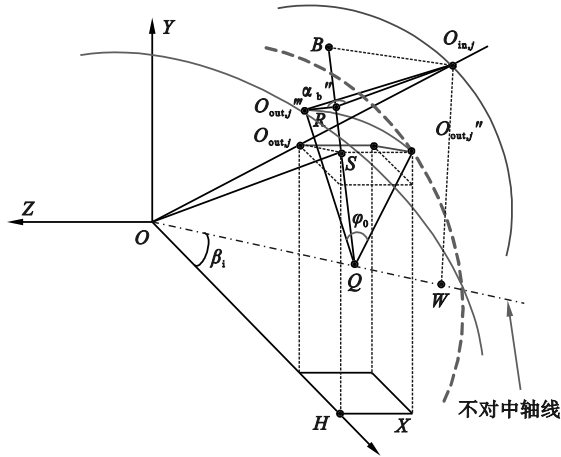


图 6 耦合不对中几何关系示意图

Fig. 6 Schematic of the geometric relationship of coupling misalignment

根据图 6,接触角  $\alpha_b''$  和法向间隙  $\Delta_b''$  为

$$\alpha_b'' = \arctan \frac{l_{QO_{out,j}''} \sin\left(\varphi_o - \arcsin \frac{S_a}{l_{QO_{out,j}''}}\right)}{l_{BR}^2 + l_{BO_{in,j}}^2}, \quad (3)$$

$$\Delta_b'' = r_{i1} + r_{o1} - d_1 - l_{O_{out,j}''O_{in,j}}. \quad (4)$$

式中,  $l_{O_{out,j}''O_{in,j}} = \sqrt{(l_{QO_{out,j}''} \sin \varphi_i)^2 + l_{BR}^2 + l_{BO_{in,j}}^2}$ .

$l_{QO_{out,j}''}$  与  $l_{QO_{out,j}}$  相等,  $l_{QO_{out,j}}$  为

$$l_{QO_{out,j}} = \sqrt{(l_{OS} \sin(\theta'' - \beta_i))^2 + S_a^2}.$$

$l_{OS}, l_{BO_{in,j}}$  与  $l_{BR}$  为

$$l_{OS} = \left[ (l_{O_{out,j}} \cos \theta_j'' + S_r \cos \varphi_r)^2 + \right.$$

$$\left. (l_{O_{out,j}} \sin \theta_j'' + S_r \sin \varphi_r)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$l_{BO_{in,j}} = \frac{d_m + l_{O_{out,j}O_{in,j}}}{2} \cos(\theta - \beta_i) - l_{OS} \cos(\theta'' - \beta_i);$$

$$l_{BR} = l_{O_{out,j}} \sin(\theta_j - \beta_i) - l_{QO_{out,j}''} \cos(\varphi_o - \arcsin \frac{S_a}{l_{QO_{out,j}''}}).$$

考虑位置角影响,轴承第  $j$  个滚珠的径向间隙  $c_r''$  可近似表示为

$$c_r'' = \frac{\Delta_b''}{\cos \alpha_b''} \cos \angle SO_{b,j}''O. \quad (5)$$

### 1.4 非线性轴承力

考虑耦合不对中后,外滚道曲率中心由  $O_{out,j}$  变为  $O_{in,j}''$ .轴承运动后的几何关系如图 7 所示,此时第  $j$  个滚珠的内滚道曲率中心由  $O_{in,j}$  变为  $O_{in,j}'$ ,则滚珠与滚道之间的接触变形  $\delta_{oj}$  为

$$\delta_{oj} = l_{O_{out,j}''O_{in,j}'} - l_{O_{out,j}''O_{in,j}} = \sqrt{(l_{O_{out,j}''O_{in,j}} \cos \alpha_b'' + \delta_{tj})^2 + (l_{O_{out,j}''O_{in,j}} \sin \alpha_b'' - \delta_{aj})^2} - l_{O_{out,j}''O_{in,j}}. \quad (6)$$

式中:  $\alpha_b''$  是由于耦合不对中产生的接触角,其可由式(3)得到;  $\delta_{tj}$  为在径向上产生的接触变形;  $\delta_{aj}$  为轴承在轴向上产生的接触变形,其表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{tj} &= x \cos \theta_j' + y \sin \theta_j' - c_r'', \\ \delta_{aj} &= z + r_{dj} (\theta_x \sin \theta_j' - \theta_y \cos \theta_j'). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中,  $r_{dj} = \frac{r_b + R_b}{2} + \left(f_i - \frac{1}{2}\right) d_b \cos \alpha_{oj}'$ .

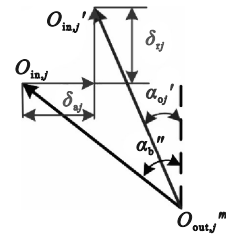


图 7 轴承运动后几何变形关系

Fig. 7 Geometric deformation relation of bearings after movement

振动后轴承的接触角  $\alpha_{oj}'$  可表示为

$$\alpha_{oj}' = \arctan \left( \frac{l_{O_{out,j}''O_{in,j}'} \sin \alpha_b'' - \delta_{aj}}{l_{O_{out,j}''O_{in,j}'} \cos \alpha_b'' + \delta_{tj}} \right). \quad (8)$$

含耦合不对中的 5 自由度非线性轴承力表达式为<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{F}_{bi} = \begin{bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \\ F_{bz} \\ M_{bx} \\ M_{by} \end{bmatrix} = - \sum_{j=1}^{N_b} k_{bj} \delta_{oj}^{1.5} H(\delta_{oj}) \begin{bmatrix} \cos \alpha_{oj}' \cos \theta_j' \\ \cos \alpha_{oj}' \sin \theta_j' \\ \sin \alpha_{oj}' \\ r_{dj} \sin \alpha_{oj}' \sin \theta_j' \\ -r_{dj} \sin \alpha_{oj}' \cos \theta_j' \end{bmatrix}. \quad (9)$$

式中,  $H(\delta_{oj})$  为 Heaviside 函数,

$$H(\delta_{oj}) = \begin{cases} 1, & \delta_{oj} > 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$k_{bj}$ 为滚子的赫兹接触刚度,

$$k_{bj} = \left\{ \left[ 2.1458 \times 10^5 \sum \rho_i^{-0.5} (\lambda_i^*)^{-1.5} \right]^{-\frac{2}{3}} + \left[ 2.1458 \times 10^5 \sum \rho_o^{-0.5} (\lambda_o^*)^{-1.5} \right]^{-\frac{2}{3}} \right\}^{-1.5}$$

其中,  $\sum \rho_i, \sum \rho_o$ 为内、外滚道曲率和,

$$\sum \rho_o = \frac{1}{d_b} \left( 4 - \frac{1}{f_o} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right), \sum \rho_i = \frac{1}{d_b} \left( 4 - \frac{1}{f_i} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right),$$

$$\gamma = \frac{d_b \cos \alpha_b''}{r_b + R_b}; \lambda_i^* \text{ 与 } \lambda_o^* \text{ 详见文献[1].}$$

## 2 含耦合不对中的系统动力学模型

转子系统有限元模型如图 8 所示,轴的总长为 492 mm,被划分为 31 个轴段,共含 32 个节点.

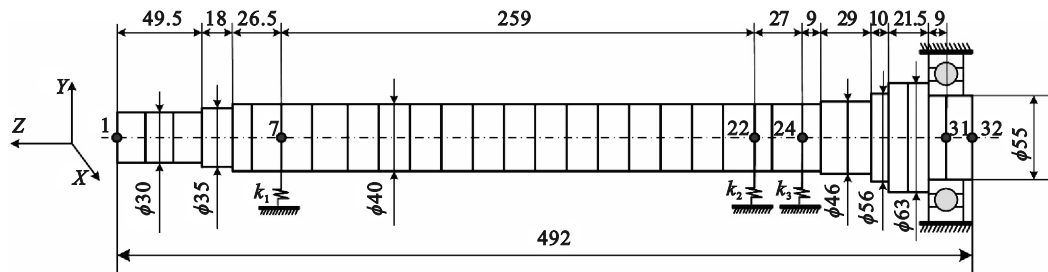


图 8 转子系统有限元模型(单位:mm)

Fig. 8 Finite element model of the rotor system (unit:mm)

表 1 深沟球轴承参数

Table 1 Parameters of the deep groove ball bearing

| 参数                      | 值      |
|-------------------------|--------|
| 内滚道半径 $r_v$ /mm         | 62.18  |
| 外滚道半径 $R_v$ /mm         | 82.82  |
| 滚珠直径 $d_b$ /mm          | 10.319 |
| 滚珠个数 $N_b$              | 13     |
| 轴承径向间隙 $c/\mu\text{m}$  | 8      |
| 内、外滚道曲率半径系数 $f_o, f_i$  | 0.517  |
| 初始接触角 $\alpha_o/^\circ$ | 0      |

本文采用瑞丽阻尼形式模拟转子的结构内阻尼  $C_s$ , 表达式如下:

$$C_s = \alpha M_s + \beta K_s.$$

$$\text{式中: } \alpha = \frac{4\pi f_1 f_2 (f_1 \xi_2 - f_2 \xi_1)}{f_1^2 - f_2^2}; \beta = \frac{\xi_2 f_2 - \xi_1 f_1}{\pi(f_2^2 - f_1^2)}.$$

其中:  $\xi_1$  和  $\xi_2$  为阻尼系数, 即系统第 1, 2 阶模态阻尼比;  $f_1$  和  $f_2$  为系统第 1, 2 阶固有频率, Hz.

模型中轴段单元采用 Timoshenko 梁单元, 每个节点有 6 个自由度. 耦合不对中发生在节点 31 深沟球轴承处, 采用 5 自由度非线性轴承力来表示, 详细几何参数列于表 1. 节点编号 7 为圆柱滚子轴承, 其等效刚度为  $k_x=5 \times 10^7$  N/m;  $k_y=5 \times 10^7$  N/m;  $k_z=0$  N/m;  $k_{\theta x}=1 \times 10^4$  N·m/rad;  $k_{\theta y}=1 \times 10^4$  N·m/rad;  $k_{\theta z}=0$  N·m/rad. 节点 22, 24 为角接触球轴承, 其等效刚度为  $k_x=5 \times 10^7$  N/m;  $k_y=5 \times 10^7$  N/m;  $k_z=5 \times 10^7$  N/m;  $k_{\theta x}=1 \times 10^4$  N·m/rad;  $k_{\theta y}=1 \times 10^4$  N·m/rad;  $k_{\theta z}=0$  N·m/rad. 轴承-转子系统的动力学方程表达式<sup>[3]</sup>为

$$M_s \ddot{Q} + [C_s + \omega_r J_s] \dot{Q} + K_s Q = F_b + F_c - G. \quad (10)$$

式中:  $M_s$  与  $J_s$  分别为轴的质量和陀螺矩阵;  $K_s$  与  $C_s$  分别为转子系统的刚度矩阵和阻尼矩阵;  $Q$  为转子系统的位移向量;  $F_b, F_c$  与  $G$  分别为轴承力向量、转子系统不平衡力向量和转子系统重力向量.

由于实验条件的限制, 只能对试验台施加单一的不对中以验证仿真模型. 在文献[5]中, 已验证了单一不对中轴承力模型的正确性, 这间接验证了本文提出的包含耦合不对中的轴承力模型的正确性.

本文采用 Newmark- $\beta$  方法求解方程(10), 分析轴承的耦合不对中对轴承接触力和转子系统振动响应的影响.

## 3 耦合不对中的影响分析

本节讨论了深沟球轴承同时处于轴向、平行、角不对中情况下, 轴转速  $n=3\ 000$  r/min 时系统的动力学响应. 针对平行不对中, 为了便于分析, 文中将平行不对中角度设定为  $90^\circ$ , 角不对中轴线与 X 轴夹角为  $0^\circ$ . 通过正交试验设计对最大接触力及 X, Y 和 Z 3 个方向时域加速度峰值进行灵敏度分析.

### 3.1 正交试验设计

本文以深沟球轴承 6011 为研究对象,采用正交试验设计(DOE)对影响轴承接触力的因素进行灵敏度分析.正交试验方案见表 2.

表 2 正交试验方案  
Table 2 Orthogonal experiment scheme

| 因素                  | 水平   |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|
|                     | 1    | 2    | 3    | 4    |
| $S_a/\mu\text{m}$   | 10   | 20   | 30   | 40   |
| $S_f/\mu\text{m}$   | 5    | 10   | 15   | 20   |
| $\varphi_o/(\circ)$ | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.08 |

本文进行了  $L_{16}(4^3)$  正交试验.为了验证极差分析法结果的正确性,采用方差分析法研究不同响应对不同影响因素的灵敏度,以进一步验证结果的正确性.方差分析的假设检验统计公式如下.

总偏差平方和  $S_{\text{TM}}$  为

$$S_{\text{TM}} = \sum_{i=1}^n s_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n s_i \right)^2 \quad (11)$$

式中:  $s_i$  表示不同影响因素下的响应值,本文选用

最大接触力值和 3 个方向的加速度时域峰峰值;  $n$  表示正交试验的个数(DOE 阵列为  $L_{16}(4^3)$ ,  $n=16$ ),则正交试验个数的自由度为  $n-1$ .

3 个因素的偏差平方和  $S_j$  可表示为

$$S_j = \frac{r}{n} \sum_{i=1}^r r_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n s_i \right)^2 \quad (12)$$

式中:  $r_{ij}$  为第  $i$  个水平下第  $j$  个影响因素的响应值的变化幅度,其自由度  $d_{t,j}=r-1$  ( $r$  为层数).

因此,影响因子的统计表达式为

$$F_j = \frac{S_j}{d_{t,j}} \times \frac{f_c}{S_e} \quad (13)$$

式中:  $S_e$  是自由度为  $f_c$  的误差平方和,  $S_e = S_{\text{TM}} - \sum_{j=1}^3 S_j$ ;

$f_c = f_{\text{TM}} - \sum_{j=1}^3 d_{t,j}$ ,  $f_{\text{TM}}$  为正交试验的自由度,  $f_{\text{TM}}=15$ ,  $d_{t,j}=3$ , 为各影响因素的自由度.

### 3.2 接触力灵敏度分析

正交试验结果如表 3 所示,表中呈现了不同水平下最大接触力响应值与  $X, Y, Z$  3 个方向加速度峰峰值.

表 3 正交试验结果

Table 3 Orthogonal experiment results

| 试验号 | $S_a/\mu\text{m}$ | $S_f/\mu\text{m}$ | $\varphi_o/(\circ)$ | 最大接触力/N | X 加速度峰峰值/( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) | Y 加速度峰峰值/( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) | Z 加速度峰峰值/( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) |
|-----|-------------------|-------------------|---------------------|---------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1   | 10                | 5                 | 0.02                | 57.3    | 2.855                                     | 2.990                                     | 0.106                                     |
| 2   | 10                | 10                | 0.04                | 113.8   | 3.858                                     | 5.365                                     | 0.329                                     |
| 3   | 10                | 15                | 0.06                | 177.6   | 5.947                                     | 9.966                                     | 0.791                                     |
| 4   | 10                | 20                | 0.08                | 249.7   | 8.788                                     | 13.990                                    | 1.310                                     |
| 5   | 20                | 5                 | 0.04                | 77.3    | 2.449                                     | 4.334                                     | 0.306                                     |
| 6   | 20                | 10                | 0.02                | 107.7   | 3.466                                     | 5.789                                     | 0.303                                     |
| 7   | 20                | 15                | 0.08                | 219.3   | 7.593                                     | 13.710                                    | 1.548                                     |
| 8   | 20                | 20                | 0.06                | 234.7   | 8.323                                     | 11.520                                    | 1.215                                     |
| 9   | 30                | 5                 | 0.06                | 111.6   | 3.870                                     | 5.587                                     | 0.625                                     |
| 10  | 30                | 10                | 0.08                | 190.2   | 6.697                                     | 10.900                                    | 1.381                                     |
| 11  | 30                | 15                | 0.02                | 157.4   | 5.655                                     | 7.829                                     | 0.543                                     |
| 12  | 30                | 20                | 0.04                | 220.8   | 7.678                                     | 11.420                                    | 1.067                                     |
| 13  | 40                | 5                 | 0.08                | 162.3   | 5.467                                     | 8.887                                     | 1.229                                     |
| 14  | 40                | 10                | 0.06                | 172.4   | 6.030                                     | 9.263                                     | 1.150                                     |
| 15  | 40                | 15                | 0.04                | 187.2   | 7.060                                     | 9.822                                     | 1.068                                     |
| 16  | 40                | 20                | 0.02                | 206.7   | 8.100                                     | 8.763                                     | 1.011                                     |

由于样本数量较大,本文取第 16 组的轴承动态接触力分布,如图 9 所示.

不同水平下最大接触力幅值变化情况如表 4 所示.采用极差分析法分析不同影响因素对最大

接触力的灵敏度,如图 10 所示.灵敏度排序为:平行不对中、角不对中、轴向不对中.

其中,极差分析法的计算值是某一因素  $j$  下  $r_{ij}$  最大值减去最小值,然后再除以 4.

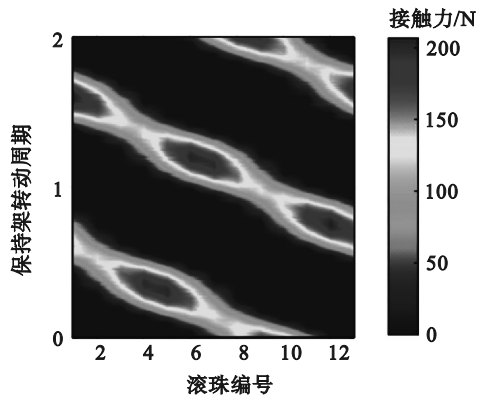


图 9 轴承动态接触力分布

Fig. 9 Dynamic contact force distribution of the bearings

表 4 不同水平下最大接触力的变化幅度

Table 4 Variation magnitude of the maximum contact force at different levels N

| $r_{ij}$ | 最大接触力的变化幅度 |       |       |
|----------|------------|-------|-------|
|          | 轴向不对中      | 平行不对中 | 角不对中  |
| $r_{1j}$ | 598.4      | 408.5 | 529.1 |
| $r_{2j}$ | 639.0      | 584.1 | 599.1 |
| $r_{3j}$ | 680.0      | 741.5 | 696.3 |
| $r_{4j}$ | 728.6      | 911.9 | 821.5 |

注: $r_{ij}$ 表示因素 $j$ (轴向、平行、角不对中)下所有相同水平 $i$ 下的响应值的总和。

最大接触力的方差分析结果列于表 5。从表中可得,影响因子 $F_j$ 的值反映平行不对中是最敏感的因素,其次是角不对中和轴向不对中。

由 F 检验分布表可知  $F_{0.035}(3, 1)=440.68$ , 影

表 5 方差分析与影响因子的显著性

Table 5 Significance of variance analysis and influence factors

| 因素     | 自由度 | 偏差平方和 $S_j$ | 均方        | 影响因子 $F_j$ |
|--------|-----|-------------|-----------|------------|
| 轴向不对中  | 3   | 2 332.56    | 777.52    | 39.80      |
| 平行不对中  | 3   | 34 773.15   | 11 591.05 | 593.40     |
| 角不对中   | 3   | 12 058.67   | 4 019.56  | 205.78     |
| 总偏差平方和 | 15  | 49 164.38   | —         | —          |

注:显著性在  $F_{0.035}(3,1)=440.68$ 。

表 6 不同水平下 X 方向加速度峰峰值的变化幅度

Table 6 Magnitude of the change in peak-to-peak values of X direction acceleration at different levels  $m \cdot s^{-2}$

| $r_{ij}$ | 加速度峰峰值的变化幅度 |        |        |
|----------|-------------|--------|--------|
|          | 轴向不对中       | 平行不对中  | 角不对中   |
| $r_{1j}$ | 21.448      | 14.641 | 20.076 |
| $r_{2j}$ | 21.831      | 20.051 | 21.045 |
| $r_{3j}$ | 23.900      | 26.255 | 24.170 |
| $r_{4j}$ | 26.657      | 32.889 | 28.545 |

响因子 $F_j$ 的最大值大于 440.68,即本次方差分析的显著性水平小于 0.035。

分析结果表明,极差分析法与方差分析法得出的结论相似,即平行不对中是影响滚珠最大接触力的最显著因素。

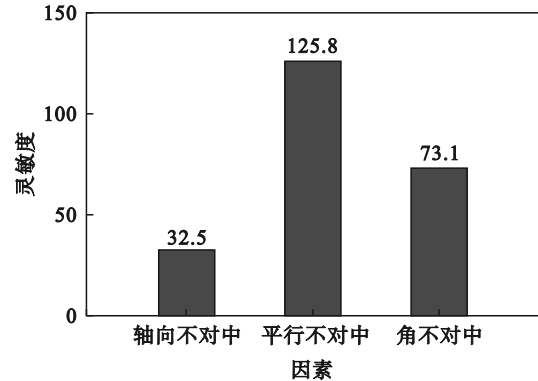


图 10 最大接触力灵敏度

Fig. 10 Sensitivity of the maximum contact force

### 3.3 振动响应灵敏度分析

#### 3.3.1 X 方向振动响应灵敏度分析

采用极差分析方法对各个影响因素的灵敏度进行分析。表 6 呈现了不同水平下 X 方向加速度峰峰值的幅值变化情况。图 11 为各个影响因素对 X 方向加速度峰峰值的灵敏度,灵敏度排序为:平行不对中、角不对中、轴向不对中。

方差分析法结果如表 7 所示,影响因子 $F_j$ 的 X 方向加速度值反映平行不对中是最敏感的因素。

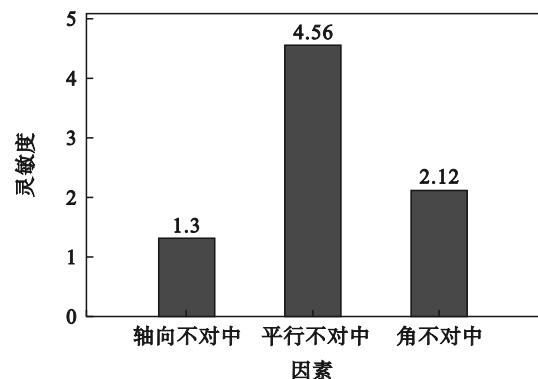


图 11 X 方向加速度峰峰值灵敏度

Fig. 11 Sensitivity of the peak-to-peak value of the acceleration in the X direction

表7 X方向方差分析与影响因子的显著性  
Table 7 Significance of variance analysis and influence factors in the X direction

| 因素     | 自由度 | 偏差平方和 $S_j$ | 均方    | 影响因子 $F_j$ |
|--------|-----|-------------|-------|------------|
| 轴向不对中  | 3   | 4.28        | 1.43  | 8.70       |
| 平行不对中  | 3   | 46.53       | 15.51 | 94.55      |
| 角不对中   | 3   | 10.91       | 3.64  | 22.17      |
| 总偏差平方和 | 15  | 62.7        | —     | —          |

注:显著性在 $F_{0.076}(3,1)=93.11$ .

极差分析法与方差分析的结果均表明,平行不对中是影响X方向振动加速度的最显著因素.

### 3.3.2 Y方向振动响应灵敏度分析

采用极差分析法对各影响因素的灵敏度进行了分析.表8给出了不同水平下Y方向加速度峰峰值幅值变化情况.不同影响因素对Y方向加速度峰峰值的灵敏度,如图12所示.灵敏度排序为:平行不对中、角不对中、轴向不对中.

表8 不同水平下Y方向加速度峰峰值的变化幅度  
Table 8 Magnitude of the change in peak-to-peak values of Y direction acceleration at different levels  $m \cdot s^{-2}$

| $r_{ij}$ | 加速度峰峰值的变化幅度 |        |        |
|----------|-------------|--------|--------|
|          | 轴向不对中       | 平行不对中  | 角不对中   |
| $r_{1j}$ | 32.311      | 21.798 | 28.618 |
| $r_{2j}$ | 35.353      | 31.317 | 30.941 |
| $r_{3j}$ | 35.736      | 41.327 | 36.336 |
| $r_{4j}$ | 39.982      | 48.940 | 47.487 |

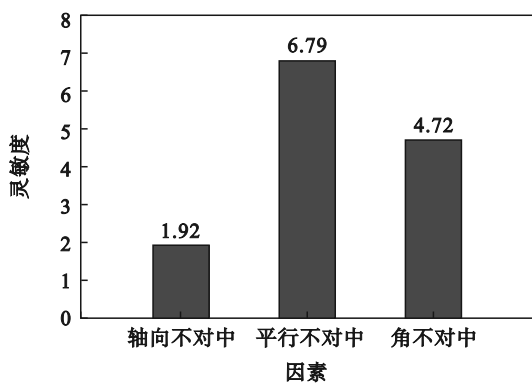


图12 Y方向加速度峰峰值灵敏度

Fig. 12 Sensitivity of the peak-to-peak value of the acceleration in the Y direction

为了验证极差分析法结果的正确性,采用方差分析法研究Y方向加速度峰峰值对不同影响因素的灵敏度,结果如表9所示.由表可知,影响因子 $F_j$ 的Y方向加速度值反映平行不对中是最敏感的因素.

表9 Y方向方差分析与影响因子的显著性  
Table 9 Significance of variance analysis and influence factors in the Y direction

| 因素     | 自由度 | 偏差平方和 $S_j$ | 均方    | 影响因子 $F_j$ |
|--------|-----|-------------|-------|------------|
| 轴向不对中  | 3   | 7.46        | 2.49  | 5.44       |
| 平行不对中  | 3   | 104.84      | 34.95 | 76.34      |
| 角不对中   | 3   | 53.01       | 17.67 | 38.60      |
| 总偏差平方和 | 15  | 168.06      | —     | —          |

注:显著性在 $F_{0.085}(3,1)=74.35$ .

结果表明,极差分析法与方差分析的结果相似,平行不对中是影响Y方向振动加速度的最显著因素.

### 3.3.3 Z方向振动响应灵敏度分析

采用极差分析法对各影响因素的灵敏度进行了分析.表10列出了不同水平下Z方向加速度峰峰值幅值变化情况.不同影响因素对Z方向加速度峰峰值的灵敏度,如图13所示.灵敏度排序为:角不对中、平行不对中、轴向不对中.

表10 不同水平Z方向加速度峰峰值的变化幅度  
Table 10 Magnitude of the change in peak-to-peak values of Z direction acceleration at different levels  $m \cdot s^{-2}$

| $r_{ij}$ | 加速度峰峰值的变化幅度 |       |       |
|----------|-------------|-------|-------|
|          | 轴向不对中       | 平行不对中 | 角不对中  |
| $r_{1j}$ | 2.535       | 2.265 | 1.962 |
| $r_{2j}$ | 3.371       | 3.162 | 2.769 |
| $r_{3j}$ | 3.615       | 3.949 | 3.780 |
| $r_{4j}$ | 4.458       | 4.603 | 5.468 |

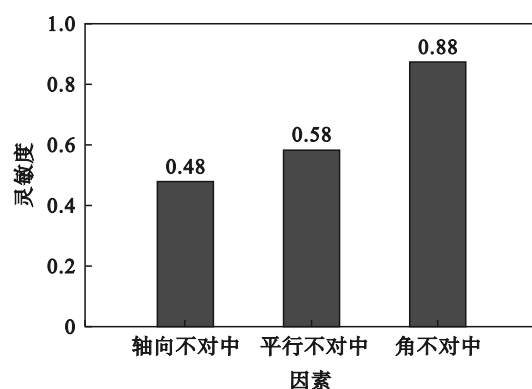


图13 Z方向加速度峰峰值灵敏度

Fig. 13 Sensitivity of the peak-to-peak value of the acceleration in the Z direction

为了验证极差分析法结果的正确性,采用方差分析法研究Z方向加速度峰峰值对不同影响因素的灵敏度,结果见表11.由表可知,影响因子 $F_j$ 的Z方向加速度值显示角不对中是最敏感的因素.

表 11 Z 方向方差分析与影响因子的显著性  
Table 11 Significance of variance analysis and influence factors in the Z direction

| 因素     | 自由度 | 偏差平方和 $S_j$ | 均方   | 影响因子 $F_j$ |
|--------|-----|-------------|------|------------|
| 轴向不对中  | 3   | 0.47        | 0.16 | 11.34      |
| 平行不对中  | 3   | 0.76        | 0.26 | 18.46      |
| 角不对中   | 3   | 1.71        | 0.57 | 41.38      |
| 总偏差平方和 | 15  | 13.22       | —    | —          |

注:显著性在  $F_{0.115}(3,1)=40.4157$ .

结果表明,极差分析法与方差分析法得出的结果一致,即在影响 Z 方向振动加速度方面,角不对中是最显著的因素.

## 4 结 论

1) 对轴承接触力的灵敏度分析表明:在 3 种不对中情况下,平行不对中对最大接触力的影响最为显著,其次是角不对中,而轴向不对中的影响最小.

2) 发生耦合不对中时, Y 方向位移振动响应发生显著变化,而 X 和 Z 方向的振动响应变化较小,平行不对中对振动响应最敏感.

3) 平行不对中对轴承的接触力和振动响应最敏感.因此在安装过程中要尽量避免平行不对中的产生,对于轴向不对中可适当扩展其不对中容差.

### 参考文献:

- [1] Harris T A, Kotzalas M N. Advanced concepts of bearing technology: rolling bearing analysis [M]. 5th ed. New York: Taylor & Francis Group, 2006.
- [2] Wang P F, Xu H Y, Ma H, et al. Effects of three types of bearing misalignments on dynamic characteristics of planetary gear set-rotor system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 169: 108736.
- [3] Wang P F, Xu H Y, Yang Y, et al. Dynamic characteristics of ball bearing-coupling-rotor system with angular misalignment fault [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108(4): 3391–3415.
- [4] Wang P F, Yang Y, Ma H, et al. Vibration characteristics of rotor-bearing system with angular misalignment and cage fracture: simulation and experiment [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 182: 109545.
- [5] Wang P F, Yang Y, Wen B G, et al. Numerical and experimental analysis of vibration characteristics of spindle system under bearing assembly errors [J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2024, 52(8): 4811–4838.
- [6] Xu H Y, Yang Y, Ma H, et al. Vibration characteristics of bearing-rotor systems with inner ring dynamic misalignment [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 230: 107536.
- [7] 徐宏阳, 杨阳, 王鹏飞, 等. 含不对中与滚珠分布误差的球轴承刚度波动特性 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2023, 44(3): 382–391.  
(Xu Hong-yang, Yang Yang, Wang Peng-fei, et al. Stiffness fluctuation characteristics of deep groove ball bearings with distribution error of balls under misalignment and external loads [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2023, 44(3): 382–391.)
- [8] Xu T F, Yang L H, Wu W, et al. Effect of angular misalignment of inner ring on the contact characteristics and stiffness coefficients of duplex angular contact ball bearings [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 157: 104178.
- [9] Zhang Y F, Fang B, Kong L F, et al. Effect of the ring misalignment on the service characteristics of ball bearing and rotor system [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 151: 103889.
- [10] Balyakin V B, Zhilnikov E P, Kosenok B B, et al. Study of the influence of ring misalignment in rolling bearings on frictional torque and the fatigue life of supports [J]. *Journal of Friction and Wear*, 2017, 38(1): 7–12.
- [11] Yang Z C, Zhang Y, Zhang K, et al. Wear analysis of angular contact ball bearing in multiple-bearing spindle system subjected to uncertain initial angular misalignment [J]. *Journal of Tribology*, 2021, 143(9): 091703.
- [12] Tong V C, Hong S W. Study on the running torque of angular contact ball bearings subjected to angular misalignment [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2018, 232(7): 890–909.
- [13] Tong V C, Hong S W. Fatigue life of tapered roller bearing subject to angular misalignment [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2016, 230(2): 147–158.
- [14] Wen C W, Meng X H, Lyu B G, et al. Influence of angular misalignment on the tribological performance of high-speed micro ball bearings considering full multibody interactions [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2021, 235(6): 1168–1189.
- [15] Wang M K, Yan K, Zhang X H, et al. Effects of deformations and angular ring misalignment on dynamic properties for ball bearing under different preload mechanisms [J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2023, 45(5): 274.
- [16] 易均, 刘恒, 刘意, 等. 歪斜安装对组配轴承转子系统动力学特性影响 [J]. *西安交通大学学报*, 2014, 48(9): 107–111.  
(Yi Jun, Liu Heng, Liu Yi, et al. Influence of installed outer race on nonlinear dynamic characteristics for matched bearings-rotor system [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(9): 107–111.)
- [17] Parmar V, Saran V H, Harsha S P. Effect of dynamic misalignment on the vibration response, trajectory followed and defect-depth achieved by the rolling-elements in a double-row spherical rolling-element bearing [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 162: 104366.
- [18] Ye Z H, Wang L Q. Effects of axial misalignment of rings on the dynamic characteristics of cylindrical roller bearings [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2016, 230(5): 525–540.
- [19] Yi J, Pang B T, Liu H, et al. Influence of misalignment on nonlinear dynamic characteristics for matched bearings-rotor system [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2014, 228(2): 172–181.