

## 变幅法求解双滚珠动态自平衡机理

陈晓哲, 钟山, 周佰通, 史伟业

(东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 基于单盘转子模型,采用变幅法探究了双滚珠自动平衡装置的动态自平衡机理.通过拉格朗日方程建立系统控制方程,推导了4种工况下的幅频特性方程.基于变幅法设解形式直接构建雅可比矩阵,避免了传统方法中稳态方程的分情况讨论,并结合劳斯-赫尔维兹判据获得系统稳定性条件.数值分析表明:系统在共振下区间振动加剧;在共振上区间,仅当参数满足完全平衡条件时出现零振幅运动,此时滚珠跳跃至相对质心一侧,实现完全或部分平衡.研究结果通过时域仿真验证,为滚珠自动平衡装置的设计与优化提供了理论依据.

**关键词:** 变幅法;转子;滚珠;稳定性;共振

中图分类号: TH 113.1

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2025)05-0046-08

## Dynamic Self-balancing Mechanism of Double Balls Solved by Variation Amplitude Method

CHEN Xiao-zhe, ZHONG Shan, ZHOU Bai-tong, SHI Wei-ye

(School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China. Corresponding author: CHEN Xiao-zhe, E-mail: xzchen1986@163.com)

**Abstract:** The dynamic self-balancing mechanism of a dual-ball automatic balancing device based on a single-disc rotor model is investigated using the variation amplitude method. The system control equations are established through Lagrange equations, and the amplitude-frequency characteristic equations under four working conditions are derived. The Jacobian matrix is directly constructed based on the solution form of the variable amplitude method, avoiding the case-by-case discussion of steady-state equations in the traditional methods, and the system stability conditions are obtained using the Routh-Hurwitz criterion. Numerical analysis reveals that: system vibration intensifies in the lower resonance region; in the upper resonance region, zero-amplitude motion occurs only when parameters satisfy the complete balancing condition, at which point the balls jump to the opposite side of the mass center, achieving complete or partial balance. The research results are validated through time-domain simulations, providing a theoretical basis for the design and optimization of ball-type automatic balancing devices.

**Key words:** variation amplitude method; rotor; ball; stability; resonance

转子质量偏心是旋转机械常见的故障之一.如果设计时没有考虑部件质量分布或加工、装配精度的误差等都会造成转子质量偏心.即使是一个平衡的转子在工作一段时间后,也会由于介质的黏附性或腐蚀性产生质量偏心.当转子存在质量偏心后,会产生振动并引发噪声等问题.当转

子振动严重时,会损伤设备并发生事故<sup>[1]</sup>.

转子质量偏心引起的动不平衡是随时间变化的,因此只能在设备运行过程中进行自动平衡,即动态自平衡技术<sup>[2]</sup>.

在众多自平衡技术中,滚珠动态自平衡技术因其结构简单、无源等优势,一直备受国内外学

者关注.Ehyaei等<sup>[3]</sup>采用Stodola-Green转子模型,就滚珠圆周运动半径和阻尼的设计展开了讨论.Green等<sup>[4]</sup>在单个转子圆盘中研究增加滚珠数量对系统稳定性的影响.Rodrigues等<sup>[5]</sup>在回转轴上安装了两个圆盘并且分别放入双滚珠,研究了支撑和设备的不对称性对系统的影响.Ishida<sup>[6]</sup>通过实验分析了各种被动式平衡器的特点.Yang等<sup>[7]</sup>研究了单盘双滚珠模型中摩擦力的影响.张小龙等<sup>[8]</sup>对单个转子圆盘中分别应用单滚珠和双滚珠的模型,探讨了系统完全平衡时所需要的参数条件,并对双滚珠系统的动力学规律进行了详细的分析<sup>[9]</sup>.Chan等<sup>[10]</sup>分别应用硬式弹簧和软式弹簧对单盘双滚珠模型展开了研究.Chen等<sup>[11]</sup>在回转轴上安装了两个转子圆盘并分别放入双滚珠,研究该模型的运动机理.在单盘单滚珠模型中,Huang等<sup>[12]</sup>研究了滚珠圆周运行半径和摩擦力等参数对自平衡状态的影响.

上述研究成果推动了滚珠自平衡机理的研究,但是所采用的解析方式过于复杂.特别是对解的稳定性讨论时,往往需要对幅频特性方程进行摄动才可获得稳定性条件.考虑到变幅法在稳定性推导时表现出的便捷性,本文采用了变幅法研究双滚珠动态自平衡机理,给出了详细的推导步骤,并应用数值分析和时域仿真两种方式定性和定量地研究了该系统的动力学特性.

### 1 单圆盘平衡滚珠动力学模型

图 1 为单盘偏心转子系统(Jeffcott 转子)中应用双滚珠的动力学模型.穿过圆盘的轴两端由轴承座支撑,其中轴承采用自动调心球轴承.在圆盘上开有轨道,加入双滚珠. $m_1$ 表示圆盘质量, $m_0$ 表示单颗滚珠质量且远小于 $m_1$ , $r$ 表示偏心距, $a$ 表示滚珠圆周运动的半径, $k$ 表示系统的刚度, $e$ 表示圆盘质心的偏心距, $c$ 表示系统的阻尼, $\omega$ 表示转子角速度, $c_b$ 表示单个滚珠的阻尼.只考虑圆盘在 $xoy$ 平面旋转, $x$ 和 $y$ 表示圆盘形心的绝对坐标且是时间 $t$ 的函数, $\theta_i$ 为第 $i$ 滚珠相对于圆盘质心 $G$ 的角位移( $i=1,2$ ).

将系统的动能、势能等代入拉格朗日方程,可以得到系统的控制方程:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= e\omega^2 m_1 \cos \varphi + m_0 a \chi_1, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= e\omega^2 m_1 \sin \varphi + m_0 a \chi_2, \\ m_0 a \ddot{\theta}_i + a c_b \dot{\theta}_i &= m_0 (\ddot{x} \sin \varphi_i - \ddot{y} \cos \varphi_i). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中:  $m = m_1 + 2m_0$ ;  $\omega_i = \omega + \dot{\theta}_i$ ;  $\varphi = \omega t$ ;  $\chi_i =$

$$\sum_{i=1}^2 (\omega_i^2 \cos \varphi_i + \ddot{\theta}_i \sin \varphi_i); \quad \chi_2 = \sum_{i=1}^2 (\omega_i^2 \sin \varphi_i - \ddot{\theta}_i \cos \varphi_i);$$

$\varphi_i = \varphi + \theta_i$ ;  $\eta = \omega/\omega_n$ . •表示变量对时间求导.

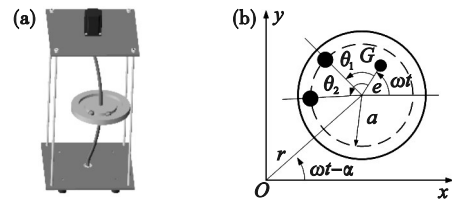


图 1 动力学模型

Fig. 1 Dynamic model

(a)—转子系统; (b)—圆盘.

## 2 理论推导

### 2.1 系统运动方程稳态解

变幅法是一种以谐波平衡法为基础,结合了平均法中振幅是慢变量的思想,将谐波系数表达成时间函数的方法<sup>[13]</sup>.由于考虑谐波系数为时间变量,修正了常规谐波平衡法的解,提高了近似解的精度.因此变幅法不仅具有谐波平衡法的适用范围,而且具有更高精度的解.考虑到系统在 $x$ 方向和 $y$ 方向的正交性,两个方向的运动存在一个 $\pi/2$ 的相位差,设式(1)的解为

$$\left. \begin{aligned} x &= C \cos \omega t + D \sin \omega t, \\ y &= C \sin \omega t - D \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中谐波系数 $C$ 和 $D$ 为时间 $t$ 的函数.

将式(2)代入式(1),并且考虑到对于任意时间 $t$ 的式子都应该成立,得到

$$\left. \begin{aligned} \chi_3 + \chi_7 + \chi_5 D &= 0, \\ -\chi_4 + \chi_8 + \chi_5 C - \chi_6 &= 0, \\ m_0 a \ddot{\theta}_i + a c_b \dot{\theta}_i &= m_0 (\chi_9 + \chi_{10}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \chi_3 &= a m_0 \sum_{i=1}^2 (\omega_i^2 \sin \theta_i - \ddot{\theta}_i \cos \theta_i); \\ \chi_4 &= a m_0 \sum_{i=1}^2 (\omega_i^2 \cos \theta_i + \ddot{\theta}_i \sin \theta_i); \\ \chi_5 &= k - m\omega^2; \chi_6 = e m_1 \omega^2; \\ \chi_7 &= m(\ddot{D} - 2\omega\dot{C}) + c(\dot{D} - \omega C); \\ \chi_8 &= m(\ddot{C} + 2\omega\dot{D}) + c(\dot{C} + \omega D); \\ \chi_9 &= (\ddot{D} - \omega^2 D - 2\omega\dot{C}) \cos \theta_i; \\ \chi_{10} &= (\ddot{C} - \omega^2 C + 2\omega\dot{D}) \sin \theta_i. \end{aligned}$$

为了研究系统响应的幅值和相位,令 $C = A \cos \alpha, D = A \sin \alpha$ ,则式(2)的解改写为

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \alpha), \\ y &= A \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中:  $A$  和  $\alpha$  为时间  $t$  的函数.

系统稳态时, 令  $\dot{A}=\ddot{A}=\dot{\theta}_i=\ddot{\theta}_i=\dot{\alpha}=\ddot{\alpha}=0$  并代入式 (3), 可得稳态运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{11} &= c\omega A \cos \alpha - A \sin \alpha \chi_5, \\ \chi_{12} + \chi_6 &= c\omega A \sin \alpha + A \cos \alpha \chi_5, \\ \omega^2 A \sin(\alpha + \theta_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中:  $\chi_{11} = \sum_{i=1}^2(am_0\omega^2 \sin \theta_i)$ ;  $\chi_{12} = \sum_{i=1}^2(am_0\omega^2 \cos \theta_i)$ .

上述为  $x$  方向上的求解, 对  $y$  方向上求解会相差  $\pi/2$ .

观察式 (5) 中第 3 式可知, 存在  $A=0$  和  $\sin(\varphi + \theta_i)=0$  的两种情况, 据此将会获得 4 种不同的系统幅频特性方程.

当  $A=0$  时, 式 (5) 中前 2 个方程可化简为

$$\left. \begin{aligned} \chi_{11} &= 0, \\ \chi_6 + \chi_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

对式 (6) 进行求解发现, 当  $e \leq 2am_0/m_1$  时, 可

得到  $\theta_1 = \cos^{-1}(\frac{-em_1}{2am_0})$  和  $\theta_2 = -\theta_1$ , 此时相位角  $\alpha$  可以取满足  $\sin(\alpha + \theta_i) \neq 0$  的任意值. 当  $e > 2am_0/m_1$  时, 式 (6) 无解, 此时系统不可能完全平衡, 即存在振动.

根据式 (5) 还可得到  $A \neq 0$  和  $\sin(\varphi + \theta_i) = 0$  情况下的 3 种状态, 对应的幅频特性方程如下:

当  $\alpha + \theta_1 = 0$  和  $\alpha + \theta_2 = 0$  时, 则

$$\chi_6^2 = 4(am_0\omega^2 - A\chi_5)am_0\omega^2 + A^2(\chi_5^2 + c^2\omega^2). \quad (7)$$

当  $\alpha + \theta_1 = \pi$  和  $\alpha + \theta_2 = \pi$  时, 则

$$\chi_6^2 = 4(am_0\omega^2 + A\chi_5)am_0\omega^2 + A^2(\chi_5^2 + c^2\omega^2). \quad (8)$$

当  $\alpha + \theta_1 = 0$  和  $\alpha + \theta_2 = \pi$ , 或  $\alpha + \theta_1 = \pi$  和  $\alpha + \theta_2 = 0$  时, 则

$$\chi_6^2 = A^2(\chi_5^2 + c^2\omega^2). \quad (9)$$

根据上述理论分析可知, 系统可能存在 4 种滚珠运动状态, 如表 1 所示.

表 1 稳态解析解对应的 4 种滚珠运动状态

Table 1 Four ball motion states associated with the steady-state analytical solution

$A \neq 0$	$A \neq 0$	$A \neq 0$	$A = 0$
(a)	(b)	(c)	(d)

## 2.2 稳定性分析

传统的解析方法, 如谐波平衡法, 由于谐波系数为常数, 无法直接对解的稳定性进行分析, 往往需要对稳态解再次摄动, 代回稳态方程中求得关于扰动量的方程组, 然后通过对系数矩阵求特征值进行判断<sup>[14]</sup>. 变幅法设解时, 已将各谐波系数表达成时间的函数, 所以原方程中已经存在各谐波系数的导数, 因此可以直接使用原方程分析解的稳定性<sup>[13]</sup>. 设  $x_1 = C, x_2 = \dot{C}, x_3 = D, x_4 = \dot{D}, x_5 = \theta_1, x_6 = \dot{\theta}_1, x_7 = \theta_2, x_8 = \dot{\theta}_2$ , 对于单盘双滚珠系统, 将式 (3) 整理成状态方程  $\dot{x}_i = f(x_i), i = 1 \sim 8$  的形式, 构建雅可比矩阵<sup>[14]</sup>:

$$J = \left[ \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right]. \quad (10)$$

设系统雅可比矩阵  $J$  的特征值为  $\lambda$ , 可采用劳斯赫尔维兹稳定性判据<sup>[14]</sup>进行稳定性判别. 从上述的解析过程中可以看出, 使用变幅法<sup>[13]</sup>进行稳

定性分析时, 用的是式 (3) 而非幅频特性方程式 (6)~(9). 避免了在求稳定性时, 传统方法<sup>[8]</sup>需要对不同情况下的稳态方程进行摄动分析的步骤, 简化了稳定性求解过程. 同时, 由于变幅法谐波系数是时间变量, 增加了雅可比矩阵的维度, 也提高了稳定性判断的精度.

## 3 数值分析

由于本文所推导的幅频方程皆为超越方程, 无法获得振幅的解析表达式. 为了研究滚珠运动规律和系统响应, 本文将通过数值法对系统的幅频特性、稳定性和时域响应进行定量和定性分析, 相关参数如表 2 所示.

### 3.1 幅频特性曲线

基于式 (6) 对系统运动状态的判断条件  $e \leq 2am_0/m_1$  和  $e > 2am_0/m_1$  可知, 当质量  $m_0 = 0.4 \text{ g}$  时,

系统存在零振幅的情况(定义为情况一),质量  $m_0=0.08\text{ g}$  时,则对应无零振幅的情况(定义为情况二).接下来将采用这两组质量参数,对表 1 中 3 种状态进行数值分析.

图 2 所示的幅频特性曲线和稳定性系数曲线对应着表 1 中(a)状态.图 2a 中存在 3 种情况:情

表 2 振动系统参数  
Table 2 Parameters of the vibration system

参数	单位	数值
圆盘质量 $m_1$	g	300
滚珠质量 $m_0$	g	0.4/0.08
圆盘刚度 $k$	N/m	1 700
偏心距 $e$	mm	0.01
滚槽半径 $a$	mm	16.5
圆盘运动阻尼 $c$	Ns/m	0.084
滚珠阻尼 $c_0$	Ns/m	0.001

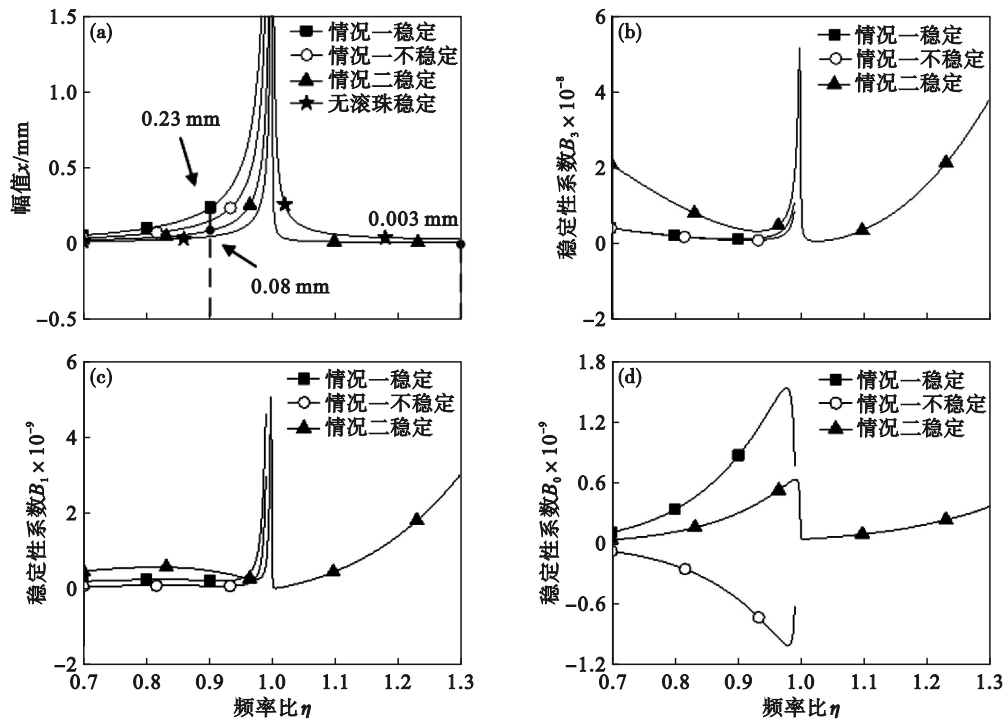


图 2 情况(a)对应的幅频曲线与稳定性判别

Fig. 2 Amplitude-frequency curves and stability judgment of case (a)

(a) —幅频曲线; (b) — $\lambda^3$  系数曲线; (c) — $\lambda^1$  系数曲线; (d) — $\lambda^0$  系数曲线.

综上分析可知,对于表 1 中(a)情况,当  $e \leq 2am_0/m_1$  时,系统只存在共振下区间的运动状态.当  $e > 2am_0/m_1$  时,系统在共振下区间和共振上区间均存在振动,且在近共振时,共振下区间的振幅明显远大于共振上区间的振幅.两种情况下的幅频曲线变化与 Lu 等<sup>[15]</sup> 的实验结果一致,这说明变幅法的结果是正确的.

观察图 2a 中不加入滚珠时系统的振幅,可以

况一  $e \leq 2am_0/m_1$ , 情况二  $e > 2am_0/m_1$ , 不加入滚珠的情况.图 2b~图 2d 为选取式(10)中具有代表性的特征值  $\lambda^3, \lambda^1$  和  $\lambda^0$  对应的系数曲线,分别用  $B_3, B_1$  和  $B_0$  表示,用于进行解的稳定性判别.

由于式(7)是超越方程,当  $e \leq 2am_0/m_1$  并且转子角速度处于共振下区间时,会存在两组数学解.经过稳定性判断,实心点曲线为实际存在的解,而空心点曲线为实际不存在的数学解,即不稳定的解.稳定性条件如图 2d 所示,不稳定的数学解所对应的特征值系数存在小于 0 的情况.同理,当转子角速度处于共振上区间,则不存在数学解,即系统不存在振动.

对于  $e > 2am_0/m_1$  的情况,系统无论处于共振下区间还是共振上区间,均只有一个数学解,并且该解是稳定的解,即实际存在的数学解,其稳定性系数的数值均大于 0.

看到在角速度小于共振点时,无论是哪种情况相较于无滚珠情况振幅都会被放大,这是因为滚珠和质心位于同一侧;当角速度越过共振点后,滚珠会跳跃至和圆盘质心相对的一侧,从而达到自平衡的状态.在共振下区间,由于情况一中  $m_0=0.4\text{ g}$  大于情况二中  $m_0=0.08\text{ g}$ , 情况一的质量偏心更为严重,振幅也更大.通过稳定性的判断可知,当  $e \leq 2am_0/m_1$  时,系统在共振下区间,运行在

表 1 中(a)的状态;在共振上区间,系统处于无振动状态,运行在表 1 中(d)状态.

图 3 为表 1 中(b)状态下,两组质量参数对应的幅频特性和稳定性系数曲线.不同于图 2a 中

$e \leq 2am_0/m_1$  的情况,图 3a 的两组非零数学解均处于共振上区间,滚珠与质心位于同一侧且振幅被放大.从图 3c 和图 3d 可知,这两组非零数学解都是不稳定的解.

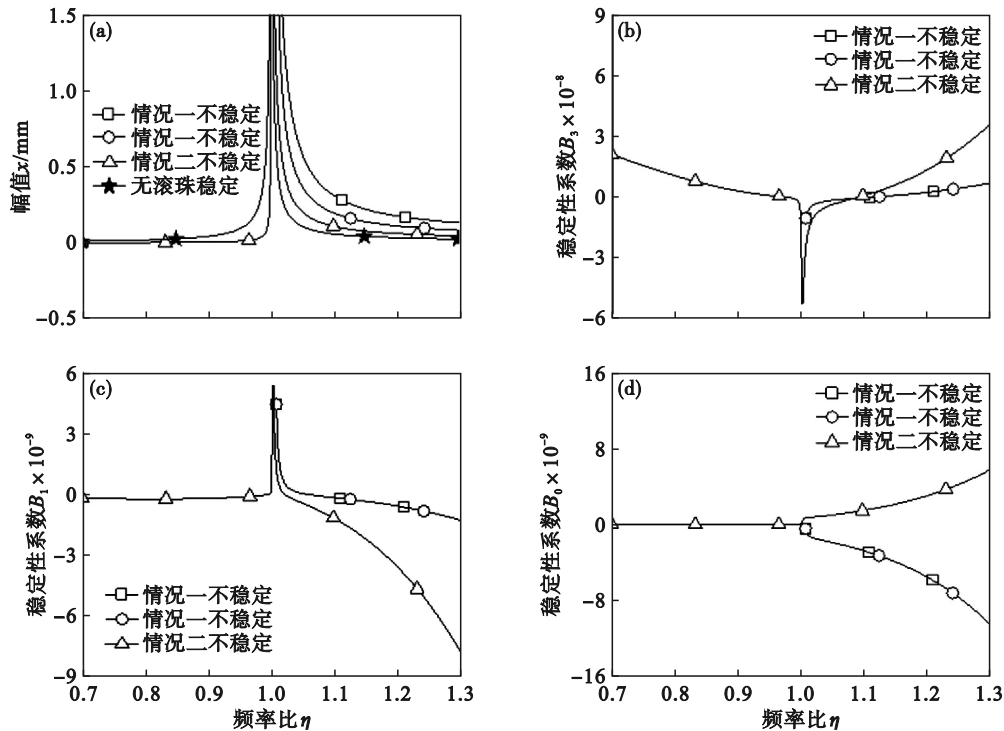


图 3 情况(b)对应的幅频曲线与稳定性判别

Fig. 3 Amplitude-frequency curves and stability judgment of case (b)

(a) —幅频曲线; (b) — $\lambda^3$  系数曲线; (c) — $\lambda^1$  系数曲线; (d) — $\lambda^0$  系数曲线.

对于  $e > 2am_0/m_1$  的情况,共振下区间与共振上区间均只有一组非零数学解.共振上区间时,滚珠处于质心相对一侧,振幅得到部分平衡.共振下区间时,滚珠处于质心同一侧,振幅被放大.但是从图 3c 判断结果可知,该情况的数学解也都是不稳定解.

综上所述可知,根据稳定性系数判断,系统不存在稳定的数学解,即不存在(b)情况下的运动状态.

图 4 为表 1 中(c)状态下,两组质量参数对应的幅频特性曲线和稳定性系数曲线.在(c)情况下两滚珠相对角位移的相差为  $\pi$ ,此时两滚珠作用力等值反向,因此加入的滚珠没有起到平衡质量的作用.如图 4d 所示,曲线始终位于零值以下,所以系统不存在(c)情况下稳定的数学解.综上所述可知,系统也不存在(c)情况下的运动状态.

图 5 为通过变幅法解得的  $e \leq 2am_0/m_1$  和  $e > 2am_0/m_1$  两种情况下的振幅和对应的滚珠角位移曲线,与文献[8]的结论一致,这说明变幅法是有

效的.对比图 5a 和图 5b 发现,正是因为滚珠角位移所在三角函数的多解才导致系统振幅的多解.并且对比幅值曲线和对应的滚珠角位移曲线发现,滚珠位于质心同一侧就会放大振幅,而滚珠处于相对质心一侧就会平衡振幅.

### 3.2 时域仿真

图 6 为  $e \leq 2am_0/m_1$  情况下系统的时域响应曲线.在频率比  $\eta = 0.9$  时,即圆盘角速度为 67.66 rad/s 时,图 6d 和图 6e 的振幅曲线与图 2a 变化一致.

从图 6a~图 6c 中可以看出在共振下区间,双滚珠重合且与圆盘质心位于同一侧,此时系统的振幅被放大.在共振上区间,双滚珠分别运动到不同位置.通过受力分析可知,当双滚珠质量与圆盘质量合成的总质心与圆盘形心重合时,就会使系统运动达到自平衡状态.上述仿真结果证明了本文所采用的稳定性判断方法是有效的.

综上所述可知,本组仿真在共振下区间的响应对应于表 1 中(a)情况,而在共振上区间对应于表 1 中(d)情况.

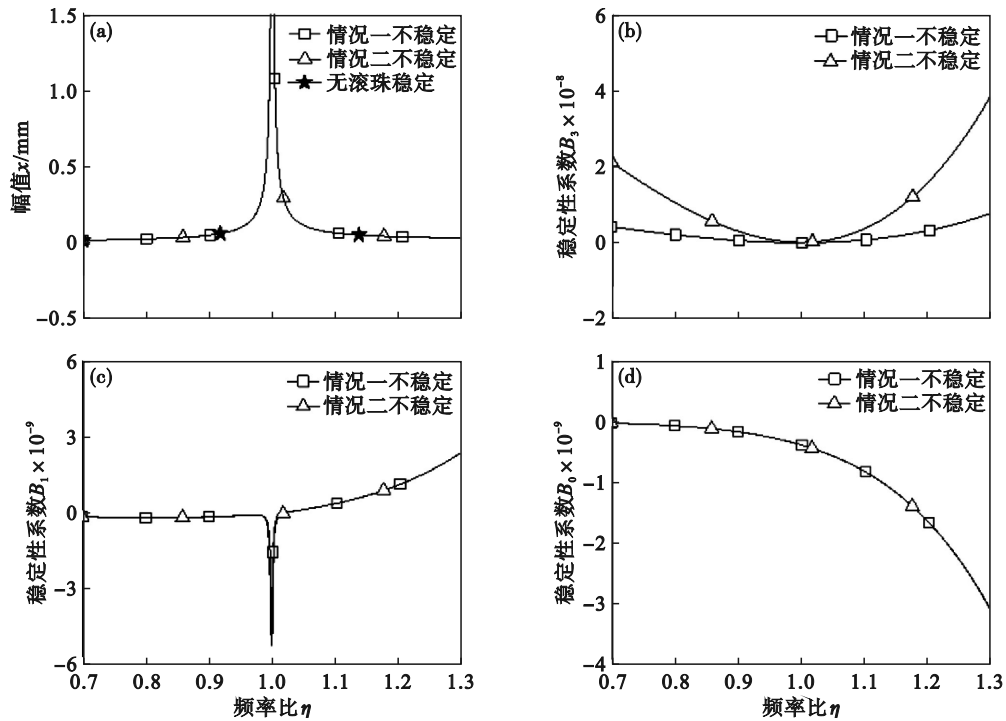


图 4 情况(c)对应的幅频曲线与稳定性判别

Fig. 4 Amplitude-frequency curves and stability judgment of case (c)

(a)—幅频曲线; (b)— $\lambda^3$  系数曲线; (c)— $\lambda^1$  系数曲线; (d)— $\lambda^0$  系数曲线.

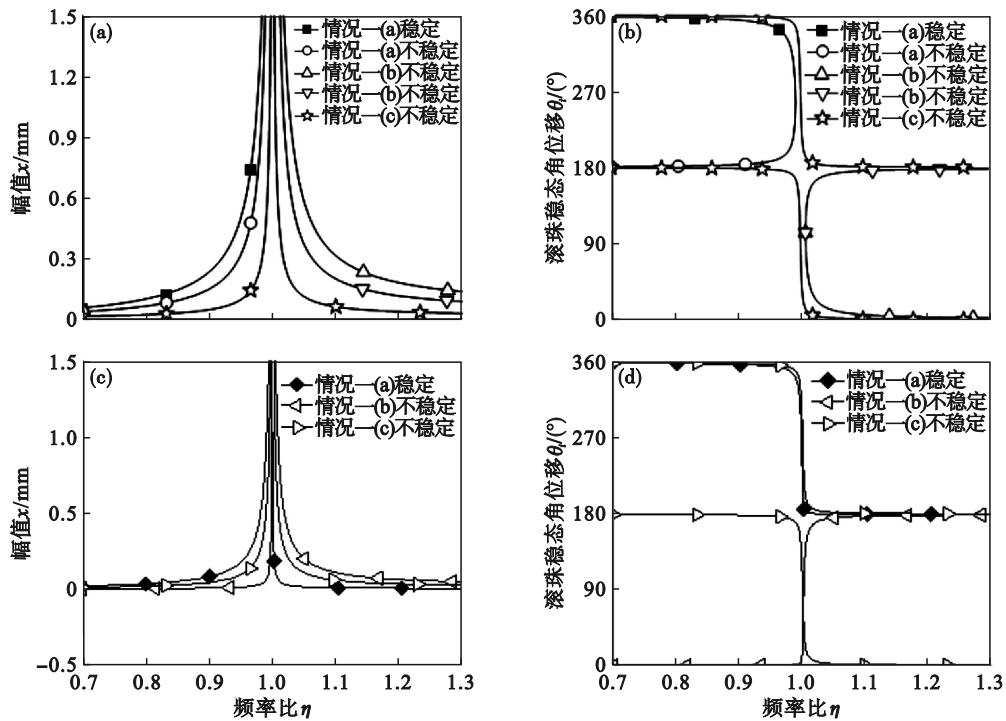


图 5 系统振幅与滚珠运动状态

Fig. 5 System vibration amplitude with ball motion states

(a)—情况一—幅频曲线; (b)—情况一—滚珠位置曲线; (c)—情况二—幅频曲线; (d)—情况二—滚珠位置曲线.

图 7 为系统部分平衡时的时域响应曲线,即  $e > 2am_0/m_1$ . 同样对应于表 1 中(a)情况,在角速度小于共振点时加入滚珠后会放大振幅.当转子角速度越过共振点,双滚珠跳跃至与质心相对的一

侧.尽管此时不存在零振幅的运动状态,但幅值也因偏心质量的减少而得到削弱.对比图 7d、图 7e、图 2a 发现,时域仿真的振幅值和解析解的结果是一致的,并且图 7 中关于滚珠角位移的结果

与理论分析也是一致的,即与图 5b 在共振下区间曲线相符.

综上所述可知,当在共振下区间时,  $e > 2am_0/m_1$  与  $e \leq 2am_0/m_1$  两种情况变化均一致,都是

增大偏心质量导致系统的振幅加剧.而在共振上区间时,由于  $e > 2am_0/m_1$ ,系统不满足零振幅条件,无法实现完全平衡状态.但是添加滚珠后,会削减原转子的偏心质量数量级,仍可以减小振动量级.

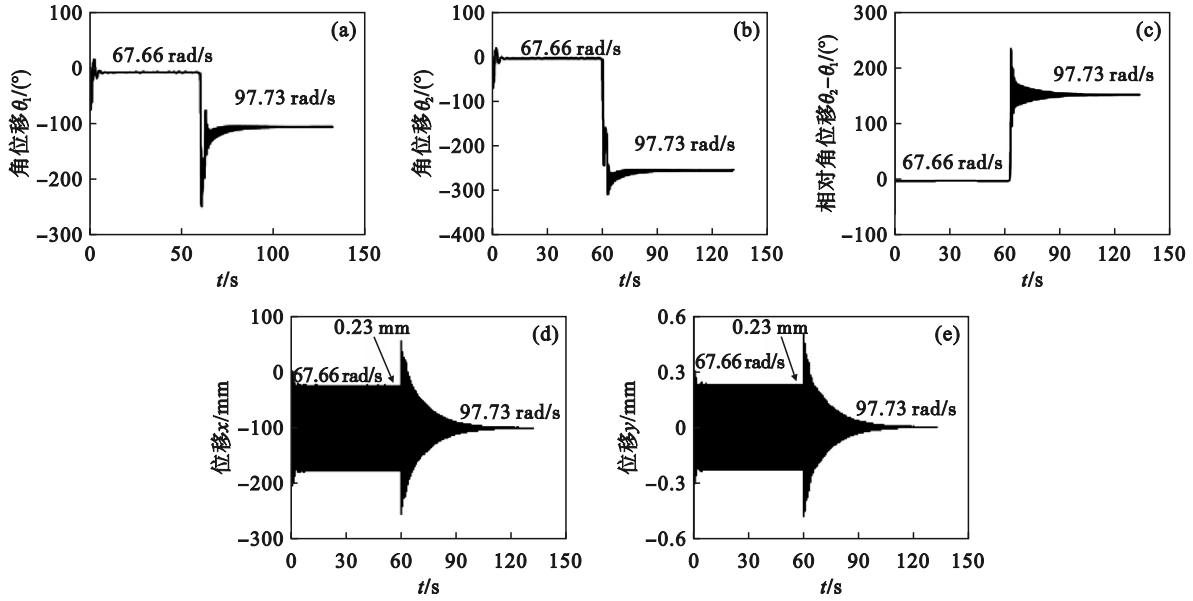


图 6 情况一对应的时域响应

Fig. 6 Time domain response with case one

(a) — 滚珠 1 角位移; (b) — 滚珠 2 角位移; (c) — 双滚珠相对角位移; (d) — x 方向位移; (e) — y 方向位移.

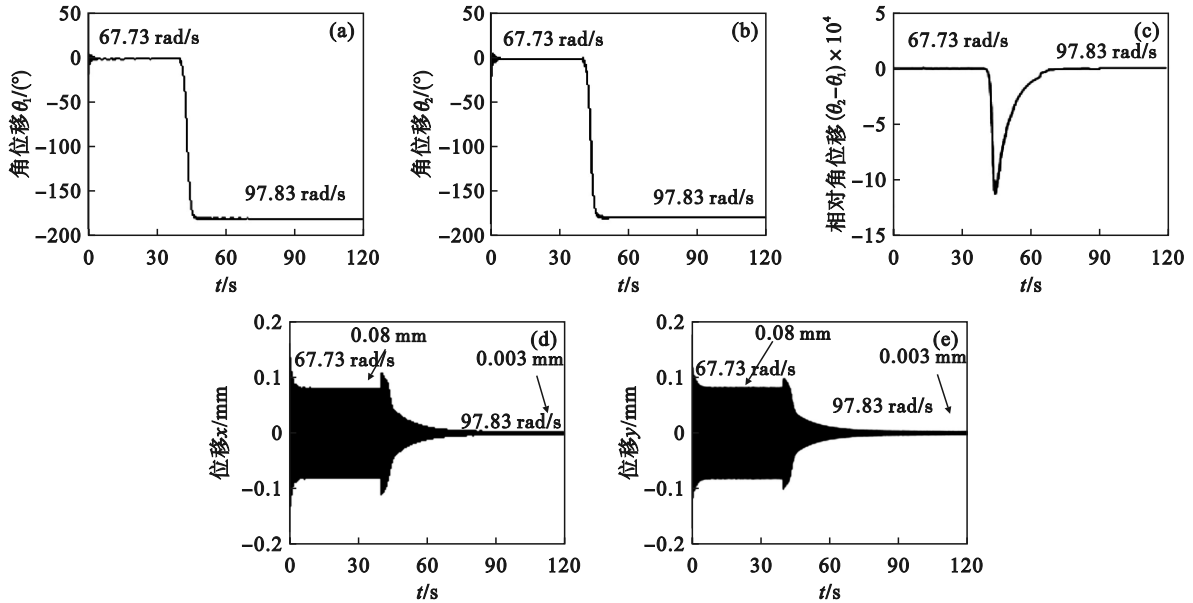


图 7 情况二对应的时域响应

Fig. 7 Time domain response with case two

(a) — 滚珠 1 角位移; (b) — 滚珠 2 角位移; (c) — 双滚珠相对角位移; (d) — x 方向位移; (e) — y 方向位移.

### 3.3 滚珠运动规律总结

图 8 为双滚珠真实存在的运动状态. 图 8a 为共振下区间的双滚珠运动状态,此时双滚珠重合且角位移为零.当  $e > 2am_0/m_1$  时,转子角速度经过共振点后,滚珠运动状态将由图 8a 跳至

图 8b,此时双滚珠重合并且角位移为  $180^\circ$ ,其过程见图 5d;当  $e \leq 2am_0/m_1$  时,转子角速度经过共振点后,系统运动状态将由图 8a 跳至图 8c,此时双滚珠间存在一定夹角且与质心 G 在相反一侧.

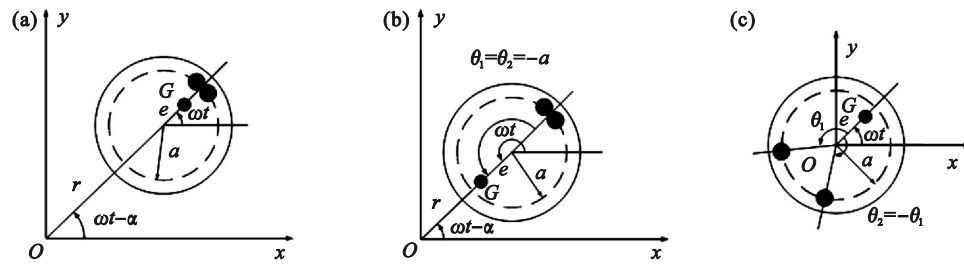


图8 滚珠稳定的位置

Fig. 8 Stable position of balls

(a)—共振下区间情况; (b)—共振上区间情况二; (c)—共振上区间情况一。

本文理论分析所得到的滚珠运动状态与Lu等<sup>[15]</sup>的实验结果是一致的,这验证了本文理论分析的有效性和正确性。

## 4 结 论

1) 变幅法可以直接使用原方程构建雅可比矩阵来讨论稳定性,避免了常规手段使用稳态方程分情况讨论的过程.并且由于矩阵维度高,也增加了稳定性判别精度。

2) 根据理论分析和时域仿真证明了只有表1中(a)情况是稳定的,也就是系统真实存在的运动状态。

3) 系统中加入平衡滚珠后在共振下区间系统振幅加剧,共振上区间振幅减小.当参数条件满足 $e \leq 2am_0/m_1$ 时会出现完全平衡的理想情况。

### 参考文献:

- [1] 何立东,沈伟,高金吉.转子在线自动平衡及其工程应用研究的进展[J].力学进展,2006,36(4):553-563.  
(He Li-dong, Shen Wei, Gao Jin-ji. Advance of the rotor on-line active balancing technology and its engineering applications [J]. *Advances in Mechanics*, 2006, 36(4): 553-563.)
- [2] 樊红卫,薛策译,邵德洁.转子在线主动平衡技术发展现状与研究展望[J].噪声与振动控制,2022,42(2):1-9.  
(Fan Hong-wei, Xue Ce-yi, Shao Si-jie. Review of rotor's on-line active balancing technology [J]. *Noise and Vibration Control*, 2022, 42(2): 1-9.)
- [3] Ehyaei J, Moghaddam M M. Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with  $n$  automatic ball-balancers [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 321: 554-571.
- [4] Green K, Champneys A R, Friswell M I, et al. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A—Mathematical Physical and Engineering Science*, 2008, 366(1866): 705-728.
- [5] Rodrigues D J, Champneys A R, Friswell M I, et al. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, 46(9): 1139-1154.
- [6] Ishida Y. Recent development of the passive vibration control method [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 29: 2-18.
- [7] Yang Q, Ong E H, Sun J, et al. Study on the influence of friction in an automatic ball balancing system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285(1/2): 73-99.
- [8] 张小龙,东亚斌.滚珠自动控制转子不平衡响应的动力学机理[J].机械工程学报,2009,45(7):95-100.  
(Zhang Xiao-long, Dong Ya-bin. Dynamic mechanism of unbalancing response of rotor controlled by balls automatically [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(7): 95-100.)
- [9] 张小龙,东亚斌.双滚珠自动抑制转子主共振的机理(线性支承刚度)[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2009,41(2):282-287.  
(Zhang Xiao-long, Dong Ya-bin. Mechanism of automatic suppression of the primary resonant of rotor by double balls balancer (linear support stiffness) [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2009, 41(2): 282-287.)
- [10] Chan T C, Sung C K, Chao P C P. Non-linear suspension of an automatic ball balancer [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, 46(2): 415-424.
- [11] Chen H W, Chen Y B, Sun Z, et al. Automatic balancing of a flexible supported rotor with two disks by two ball balancers [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, 35(7): 2781-2792.
- [12] Huang W Y, Chao C P, Kang J R, et al. The application of ball-type balancers for radial vibration reduction of high-speed optic disk drives [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 250(3): 415-430.
- [13] Aghamohammadi M, Sorokin V, Mace B. Dynamic analysis of the response of Duffing-type oscillators subject to interacting parametric and external excitations [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 107(1): 99-120.
- [14] 闻邦椿.非线性振动理论中的解析方法及工程应用[M].沈阳:东北大学出版社,2001.  
(Wen Bang-chun. Analytical methods and engineering applications in nonlinear vibration theory [M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2001.)
- [15] Lu C J, Wang M C, Huang S H. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(3): 884-896.