

## 基于极点配置法柔性机械臂的谐振抑制

李小彭<sup>1</sup>, 李泉<sup>1</sup>, 上官朝伟<sup>1</sup>, 尹猛<sup>2</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 中国科学院 深圳先进技术研究院, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 为抑制柔性机械臂运动时伺服驱动系统可能产生的谐振,降低电机输出端的速度波动,提出了一种采用极点配置法设计比例-积分(PI)调节器的方法.依据假设模态法及拉格朗日动力学方程建立了伺服电机驱动柔性机械臂的动力学模型,利用其状态方程得到系统的传递函数,并分析了伺服驱动系统的传递特性.利用相同实部的极点配置法设计PI调节器参数,讨论极点自然频率比值、阻尼系数对系统评价指标的影响.最后进行了仿真实验,结果表明阻尼系数的适当增大有利于系统的稳定,但柔性负载的长度及转动惯量不宜过大;并与传统的Ziegler-Nichols法对比,证明了此方法的有效性.

**关键词:** 柔性机械臂; 伺服系统; 振动抑制; 极点配置; PI调节器

中图分类号: TP 13; TP 249 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2025)06-0086-08

## Resonance Suppression of Flexible Manipulators Based on Pole Assignment Method

LI Xiao-peng<sup>1</sup>, LI Quan<sup>1</sup>, SHANGGUAN Chao-wei<sup>1</sup>, YIN Meng<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen 518055, China. Corresponding author: LI Xiao-peng, E-mail: xpli@me.neu.edu.cn)

**Abstract:** In order to suppress the possible resonance of the servo drive system when flexible manipulators move, and reduce the speed fluctuation of the motor output end, a method of designing PI controllers by the pole assignment method is proposed. Based on the assumed mode method and Lagrange dynamic equation, a dynamic model of the flexible manipulator driven by the servo motor is established. The transfer function of the system is obtained by using its state equation, and the transfer characteristics of the servo drive system are analyzed. The parameters of the PI controller are designed by the pole assignment method with the same real part, and the influence of pole natural frequency ratio and damping coefficient on the system evaluation index is discussed. Finally, the simulation experiment is carried out. The results show that the appropriate increase of damping coefficient is beneficial to the stability of the system, but the length and rotational inertia of the flexible load should not be too large. Compared with the traditional Ziegler-Nichols method, the effectiveness of the proposed method is proved.

**Key words:** flexible manipulator; servo system; vibration suppression; pole assignment; PI controller

柔性机械臂为机器人技术提供了更广泛和更新的应用,其广泛应用于航空航天业、制造业、军工业、医疗业、农业等领域<sup>[1]</sup>.柔性机械臂与用高刚性材料设计的刚性机器人相比,其优势包括但不限于成本低、驱动器更小、能耗更低、运行速度快、自重比高、更好的可移植性和操作更安全,

正是由于这些潜在的优势,国内外研究人员近年来对柔性机械臂的研究兴趣显著增加<sup>[2]</sup>.

柔性机械臂是一个高度非线性、强耦合的复杂动力学系统,柔性机械臂相较于刚性机械臂来说,其动力学特性更加难以控制,更为复杂,因此精确描述其动力学模型是非常困难的.Talebi等<sup>[3]</sup>

提出了一种基于人工神经网络的柔性连杆机械臂动力学建模方法,并将其应用于空间站遥感操作机器人系统.Sabatini等<sup>[4]</sup>设计了主动阻尼策略来减小具有柔性连杆的空间机械臂在轨道运行过程中的结构振动.Gao等<sup>[5]</sup>基于假设模态法对双连杆柔性机械臂进行了多维离散化建模,并实现了柔性机械臂轨迹跟踪以及振动抑制.

随着机械臂位姿不断地变换,柔性负载的转动惯量等参数也会随之变化.此时伺服系统会受到这种非线性变化的影响,系统的动态响应便会发生改变.针对柔性负载的建模研究,Katsura等<sup>[6]</sup>将柔性负载进行简化,等效成欧拉-伯努利梁模型,然后根据拉格朗日原理对其动力学建模.Zhang等<sup>[7]</sup>以中心刚体、柔性梁和负载的结构为研究对象,基于假设模态法和拉格朗日法对带有末端负载的柔性机械臂进行了动力学建模.Rezaei等<sup>[8]</sup>采用Gibbs-Appell公式和基于假设模态法的Timoshenko梁理论,分别推导了连杆的运动方程并建立了柔性特性模型,并在建模的过程中考虑到扭转、纵向变形、两个方向弯曲和重力效应的影响.

为了使柔性机械臂在期望的角度下具有快速的位置响应和极小的振动,许多研究者提出了如滑模控制、模糊逻辑控制、边界控制、比例-微分(PD)控制、PI控制等主动控制策略.He等<sup>[9]</sup>基于无穷维PDE模型采用边界控制策略实现柔性结构的振动抑制和角度跟踪,并从理论上保证柔性系统的稳定性.丁有爽等<sup>[10]</sup>将PI调节器应用于伺服驱动系统,从而优化伺服系统输出端的稳定性及快速性.尚东阳等<sup>[11]</sup>基于李雅普诺夫稳定性定理设计出含干扰控制策略的PI控制策略,用于减弱柔性机械臂的角速度波动.在柔性机械臂的伺服传动系统中,采用PI控制策略设计合理的调节器参数来抑制振动仍是较为广泛的控制方法,特别适用于高性能伺服系统.

在伺服电机高速运转时,如果其系统特性与机械环节特性满足一定条件,系统便会发生谐振.在柔性机械臂的伺服驱动系统中诸多非线性因素会影响输出端的稳定性,如随机机械臂位姿改变而变化的柔性负载端的转动惯量等,这些不得不考虑进去.并且在相同的控制系数下,调整时间、上升时间、最大超调量等会随着系统参数的改变而变化,从而影响系统稳定性<sup>[12]</sup>.

为抑制可能产生的谐振,本文首先对柔性负载和伺服电机进行动力学建模,通过系统动力学

模型得到电机转速和驱动转矩之间的传递函数,参考文献[10],采用改变PI调节器参数的方法对系统进行相等实部的极点配置,进而从系统的评价指标方面分析系统特性.然后,基于对单杆柔性机械臂在不同工况下应用相同实部的极点配置法而得到的伺服电机输出转速的仿真结果,分析在不同工况下改变极点阻尼系数对伺服电机输出转速的影响,并与传统的Ziegler-Nichols法进行对照比较.

## 1 柔性单杆伺服驱动系统建模

柔性连杆是柔性负载的经典形式之一,在工业上的应用之一便是柔性机械臂.忽略其关节柔性及传动比,柔性单杆的伺服驱动系统模型如图1所示.

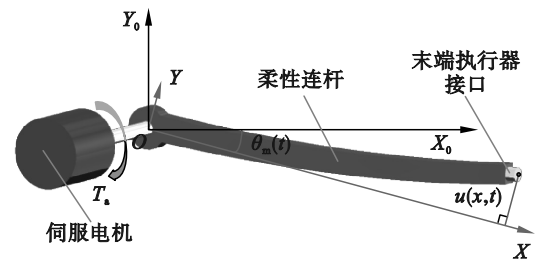


图1 柔性单杆伺服驱动系统

Fig. 1 Flexible single-rod servo drive system

在电机轴上建立静态坐标系 $X_0OY_0$ ,在柔性负载上建立动态坐标系 $XOY$ , $u(x,t)$ 表示柔性连杆在任一横截面位置 $x$ 处的挠度, $\theta_m(t)$ 表示电机转角, $T_a$ 表示伺服电机驱动转矩.

当柔性机械臂的杆件是细长杆,可看成是欧拉-伯努利梁,即只考虑由弯曲引起的变形,不计剪切引起的变形和转动惯量影响的梁的弯曲振动.

根据振动理论,挠度表示为

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) q_i(t) = \boldsymbol{\varphi}(x)^T \boldsymbol{q}(t). \quad (1)$$

式中: $\varphi_i(x)$ 为模态函数; $q_i(t)$ 为模态坐标, $t$ 为时间; $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 为模态函数矩阵; $\boldsymbol{q}(t)$ 为模态坐标矩阵.

柔性连杆在动态坐标系 $XOY$ 中发生弹性形变时,欧拉-伯努利梁的横向自由振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t). \quad (2)$$

式中: $\rho$ 为密度; $A$ 为柔性连杆的单位横截面面积; $E$ 为弹性模量; $I$ 为截面惯性矩; $F(x,t)$ 为作用在梁上的横向力.

悬臂梁的边界条件如下

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ EI \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^3 u(l, t)}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中,  $l$  为柔性梁长度.

不考虑外力作用, 即  $F(x, t) = 0$ , 式(2)可写为

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

采用分离变量法, 将式(1)假设为  $u(x, t) = \varphi(x)q(t)$ , 并代入式(4)中, 可得

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\frac{EI \varphi^{(4)}(x)}{\rho A \varphi(x)}. \quad (5)$$

分析可知, 式(5)两边都等于一个常数, 记为  $-\omega^2$ , 故可得

$$\varphi^{(4)}(x) - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} \varphi(x) = 0. \quad (6)$$

根据式(6)便可确定悬臂梁的模式函数, 其表达式为

$$\varphi_j(x) = \cosh(\lambda_j x) - \cos(\lambda_j x) - \frac{\sinh(\lambda_j l) - \sin(\lambda_j l)}{\cosh(\lambda_j l) - \cos(\lambda_j l)} (\sinh(\lambda_j x) - \sin(\lambda_j x)). \quad (7)$$

式中:  $\lambda_j$  为  $1 + \cosh(\lambda_j) \cos(\lambda_j) = 0$  的根,  $\lambda_1 = 1.875 1$ ,  $\lambda_2 = 4.694 1$ , 一般有  $\lambda_j \approx \frac{2j-1}{l} \pi (j = 1, 2, \dots)$ .

但在实际系统中, 振动量主要由低阶振动决定, 不容易激发高阶模态, 故为了简化计算进行截断处理, 通常研究前  $n$  阶模态<sup>[11]</sup>, 即

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i(t) = \varphi(x)^T q(t). \quad (8)$$

柔性连杆上任意点在笛卡尔坐标系下的坐标可表示为

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta - u(x, t) \sin \theta, \\ Y &= x \sin \theta + u(x, t) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由此可得柔性机械臂的动能表达式为

$$P = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dx. \quad (10)$$

同时, 由于弹性变形所产生的变形势能为

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (11)$$

系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i. \quad (12)$$

式中:  $i=1, 2$ ;  $\bar{q}_i$  为伺服电机机械角度  $\theta_m$ ;  $\bar{q}_2$  为第  $i$  阶模态坐标  $q_i$ ;  $F_i$  为系统所受的外力.

将式(10)和式(11)代入拉格朗日方程(12)中即可得到系统的动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} \rho A \int_0^l x^2 dx + \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t) \rho A \int_0^l x \varphi_i(x) dx &= T_a, \\ \ddot{\theta} \rho A \int_0^l x \bar{\varphi}_i(x) dx + \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $\omega_i$  为第  $i$  阶模态频率 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

假设柔性连杆的转动惯量如式(14)所示, 模态频率  $\kappa$  见式(15).

$$I_a = \rho A \int_0^l x^2 dx, \quad (14)$$

$$\kappa^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2). \quad (15)$$

电机轴转动与振动模态之间的刚柔耦合系数为

$$\mathbf{F}_a = [F_{a1}, F_{a2}, \dots, F_{an}]^T, \quad (16)$$

$$F_{ai} = \rho A \int_0^l x \varphi_i(x) dx. \quad (17)$$

则式(13)可整理为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} I_a + \mathbf{F}_a^T \ddot{\mathbf{q}}(t) &= T_a, \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) + 2\boldsymbol{\xi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{q}(t) + \ddot{\theta} \mathbf{F}_a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中:  $\boldsymbol{\xi}$  为模态振动阻尼系数矩阵.

取  $x_1 = \theta$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{q}(t)$ ,  $x_3 = \omega_m$ ,  $\omega_m$  为电机输出转速,  $\mathbf{x}_4 = \dot{\mathbf{q}}(t)$ , 系统的状态方程表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mathbf{x}_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{\mathbf{F}_a^T \boldsymbol{\kappa}^2}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} \mathbf{x}_2 + \frac{2\mathbf{F}_a^T \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\kappa}}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} \mathbf{x}_4 + \frac{1}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} T_a, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{I_a \boldsymbol{\kappa}^2}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} \mathbf{x}_2 - \frac{2I_a \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\kappa}}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} \mathbf{x}_4 - \frac{\mathbf{F}_a}{I_a - \mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a} T_a. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

系统的传递函数如下

$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{s(I_a - \sum_{i=1}^n \frac{s^2 F_{ai}^2}{s^2 + 2\omega_i \zeta_i s + \omega_i^2})}. \quad (20)$$

式中,  $s$  为拉普拉斯算子.

若只考虑一阶模态, 式(18)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} I_a + F_{a1} \ddot{q}(t) &= T_a, \\ \ddot{q}(t) + 2\zeta_1 \dot{q}(t) + \kappa^2 q(t) + \ddot{\theta} F_{a1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中,  $\zeta_1$  为一阶模态时模态振动阻尼系数.

此时系统的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{\kappa^2 F_{a1}}{I_a - F_{a1}^2} x_2 + \frac{2\kappa\zeta_1 F_{a1}}{I_a - F_{a1}^2} x_4 + \\ &\quad \frac{1}{I_a - F_{a1}^2} T_a, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{\kappa^2 I_a}{I_a - F_{a1}^2} x_2 - \frac{2\kappa\zeta_1 I_a}{I_a - F_{a1}^2} x_4 - \\ &\quad \frac{F_{a1}}{I_a - F_{a1}^2} T_a. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

此时电机转速  $\omega_m$  到驱动转矩  $T_a$  的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{s(I_a - \frac{s^2 F_{a1}^2}{s^2 + 2\omega_1 \zeta_1 s + \omega_1^2})}. \quad (23)$$

## 2 系统传递特性分析

驱动柔性机械臂的伺服系统中柔性负载的谐振频率相较于电流环带宽来说差别较大,所以柔性对伺服电机的电流环产生的影响较小,因此相当于在调节速度外环的时候,电流内环已经完成了调节,即仅考虑速度外环的影响而忽略电流内环<sup>[10]</sup>.

此时将外加在柔性连杆上的转矩看作零,并对柔性机械臂伺服系统转速采用PI控制策略,其系统控制框图见图2.图中,  $\omega_m^*$  为电机输出转速的期望值,  $i_q^*$  为  $q$  轴电流的期望值.

若忽略负载的柔性,将负载视为刚性负载,系统的传递函数为

$$\frac{\omega_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{sI_a}. \quad (24)$$

对比式(20)与式(24),可以发现负载的柔性对于速度环的影响体现在柔性耦合部分,该部分表达式记为  $N$ ,

$$N = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^2 F_{ai}^2}{I_a (s^2 + 2\omega_i \zeta_i s + \omega_i^2)}}. \quad (25)$$

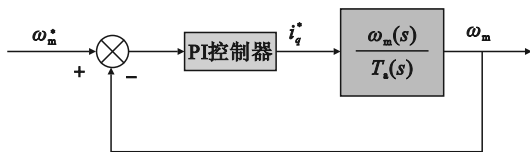


图2 伺服系统驱动柔性负载时速度环控制框图

Fig. 2 Speed loop control block diagram of the servo system's driving flexible load

电机驱动柔性负载时速度环的开环伯德图如图3所示,通过三阶模态系统伯德图可看出,伺

服系统驱动刚性负载时,系统幅值呈线性缓慢减少,但幅值在驱动柔性负载时变得开始振荡,柔性负载的一阶模态所激发的突变主要发生在低频区,相对应地,在高频区发生高阶模态激发的突变.并且可从图中看出,柔性负载的截止频率与速度环带宽相近.因此为了避免柔性机械臂系统产生谐振,必须考虑负载的柔性问题.

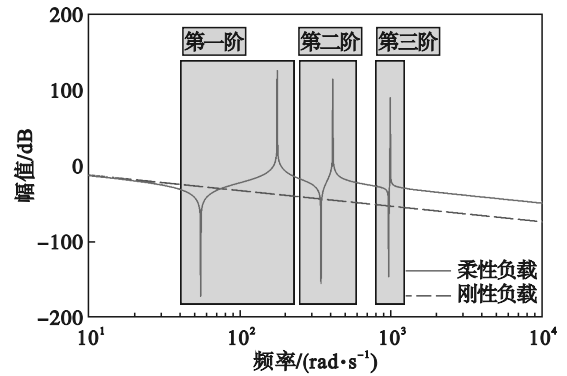


图3 三阶模态系统伯德图

Fig. 3 Bode diagram of the third-order modal system

## 3 PI调节器设计

柔性负载的高阶模态所激发的突变发生在高频阶段,并且在实际系统中,不容易激发高阶模态,故仅对第一阶模态进行考虑.若进一步忽略阻尼系数的影响,系统的传递函数则近似于典型双惯量系统传递函数.忽略阻尼系数的影响,使用PI调节器时,系统闭环传递函数为

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega_m^*(s)} = \frac{(k_1 + k_p s)(s^2 + 2\omega_1 s + \omega_1^2)}{(I_a - F_{a1}^2)s^4 + I_a \omega_1 s^2 + (k_1 + k_p s)(s^2 + \omega_1^2)}. \quad (26)$$

式中:  $k_p, k_1$  为PI调节器的参数.

本文采用文献[13]提出的极点配置法来配置极点.分母多项式可整理为

$$(I_a - F_{a1}^2)(s^2 + 2\zeta_a \omega_a s + \omega_a^2)(s^2 + 2\zeta_b \omega_b s + \omega_b^2). \quad (27)$$

式中:  $\omega_a, \omega_b$  为极点的自然频率;  $\zeta_a, \zeta_b$  为极点的阻尼系数.

记  $H = (s^2 + 2\zeta_a \omega_a s + \omega_a^2)(s^2 + 2\zeta_b \omega_b s + \omega_b^2)$ , 对比式(26)与式(27)可得

$$\begin{aligned} H &= s^4 + 2(\zeta_a \omega_a + \zeta_b \omega_b) s^3 + (\omega_a^2 + \omega_b^2 + \\ &\quad 4\zeta_a \zeta_b \omega_a \omega_b) s^2 + 2\omega_a \omega_b (\zeta_a + \zeta_b) s + \omega_a^2 \omega_b^2 = \\ &= s^4 + \frac{k_p}{I_a - F_{a1}^2} s^3 + \frac{k_1 + I_a \omega_1}{I_a - F_{a1}^2} s^2 + \\ &\quad \frac{k_p \omega_1^2}{I_a - F_{a1}^2} s + \frac{k_1 \omega_1^2}{I_a - F_{a1}^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

由式(28)可整理出

$$\frac{k_p}{I_a - F_{a1}^2} = 2(\zeta_a \omega_a + \zeta_b \omega_b), \quad (29)$$

$$\frac{k_1 + I_a \omega_1}{I_a - F_{a1}^2} = \omega_a^2 + \omega_b^2 + 4\zeta_a \zeta_b \omega_a \omega_b, \quad (30)$$

$$\frac{k_p \omega_1^2}{I_a - F_{a1}^2} = 2\omega_a \omega_b (\zeta_a + \zeta_b), \quad (31)$$

$$\frac{k_1 \omega_1^2}{I_a - F_{a1}^2} = \omega_a^2 \omega_b^2, \quad (32)$$

进而可得出

$$k_p = 2(I_a - F_{a1}^2)(\zeta_a \omega_a + \zeta_b \omega_b) = 2\omega_a \omega_b (I_a - F_{a1}^2)(\zeta_a + \zeta_b) / \omega_1^2; \quad (33)$$

$$k_1 = (I_a - F_{a1}^2)(\omega_a^2 + \omega_b^2 + 4\zeta_a \zeta_b \omega_a \omega_b) - I_a \omega_1 = \omega_a^2 \omega_b^2 (I_a - F_{a1}^2) / \omega_1^2. \quad (34)$$

此时,控制系统闭环零点为

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -\frac{k_1}{k_p} = -\frac{\omega_a \omega_b}{2(\zeta_a \omega_b + \zeta_b \omega_a)}, \\ z_2 &= j\omega_1, \\ z_3 &= -j\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式(33),式(34),式(35)确立了两对极点、零点与系统PI参数之间的关系。

### 4 基于实部相等极点配置的参数整定

在使用PI控制策略前需要确定控制器参数的大致取值范围,相应地,需要通过调整极点的参数来确定控制器参数范围.极点的位置对系统稳定性和性能有很大的影响,可以通过控制极点的位置,实现控制系统的稳定性和性能的目标。

由于建立了两对极点,但只有  $k_p, k_1$  两个参数可以调节,因此选用使两对极点实部相等的限制条件来确定零极点的位置.使  $\zeta_a \omega_a = \zeta_b \omega_b = a\omega_1, a$  为系数,结合式(33),式(34)可得

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_1^2 &= \omega_a^2 + \omega_b^2, \\ \omega_1^4 (4a^2 + 1 - \eta) &= \omega_a^2 \omega_b^2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式中,  $\eta$  为系统惯量比,  $\eta = \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2}$ .

进而可得

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= \omega_1 \sqrt{1 + \sqrt{\eta - 4a^2}}, \\ \omega_b &= \omega_1 \sqrt{1 - \sqrt{\eta - 4a^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

系统的谐振峰值、谐振频率、截止带宽与  $\omega_a/\omega_b, \xi_a$  的取值有关,系统评价指标如图4所示。

通过图4可以看出,在极点实部相等的情况下,可以得到如下结论:

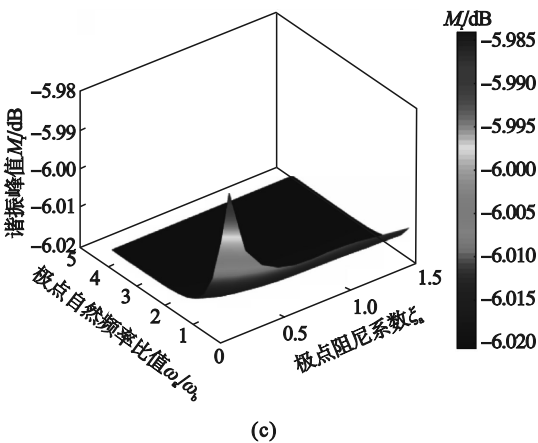
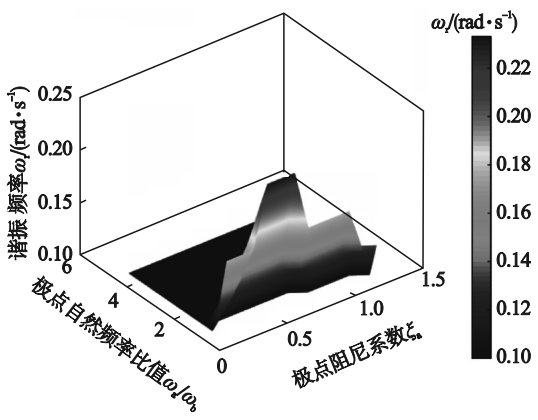
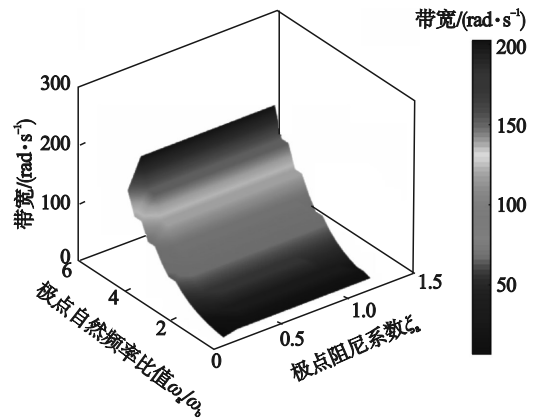


图4 系统评价指标云图

Fig. 4 System evaluation index cloud map

(a)—带宽分布云图; (b)—谐振频率分布云图; (c)—谐振峰值分布云图。

1) 随着极点自然频率比值  $\omega_a/\omega_b$  的增大而增大,系统的抗干扰能力随之减弱,而系统带宽与极点阻尼系数  $\xi_a$  的值之间的联系不大。

2) 系统谐振频率在极点阻尼系数  $\xi_a$  取 0.6~0.7 时达到最大,在极点自然频率比值  $\omega_a/\omega_b$  大于 1 时,谐振频率不变。

3) 当极点自然频率比值、极点阻尼系数比较小时,所对应的系统有相对较大的谐振峰值,达到稳态时所需时间较短,系统动态性能较差。然

而,当极点自然频率比值和极点阻尼系数不断增大时,这时候系统的谐振峰值变化却很小,系统也变得越来越稳定.

## 5 实验结果分析

### 5.1 实验原理

本文的实验数据来自文献[14]的实验平台,该实验平台主要组成如图5所示.

本平台的控制系统采用 LabView 软件进行实时控制.通过上位机编写控制程序下载到 NI-Crio-9053 下位机.借助传感器来采集电机和负载端的转角以及加速度变化信号,将处理过的信号传入到 NI-9401 数据采集模块,并由 NI-9264 模块输出电机控制信号,以驱动电机驱动器控制

电机驱动力矩.

### 5.2 实验数据分析

只考虑一阶模态,选择4种工况下等效出的柔性负载参数来开展实验,参数如表1所示.

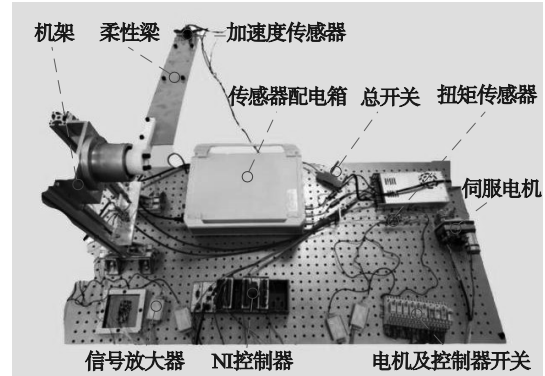


图5 实验平台<sup>[14]</sup>

Fig.5 Experiment platform<sup>[14]</sup>

表1 不同工况下系统参数

Table 1 System parameters under different working conditions

柔性负载参数	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4
抗弯刚度 $EI/(N \cdot m^2)$	395	395	395	395
长度 $l/m$	1	1.5	2	2.5
质量 $m/kg$	1	1	1	1
线密度 $\mu/(kg \cdot m^{-1})$	1	0.67	0.5	0.4
转动惯量 $I_a/(kg \cdot m^2)$	0.333 3	0.75	1.333	2.083 3
刚柔耦合系数 $F_{a1}/(kg^{1/2} \cdot m)$	0.568 8	0.853 2	1.137 6	1.422 0
模态频率 $\omega_1/(rad \cdot s^{-1})$	69.871 7	38.033 3	24.703 4	17.676 3

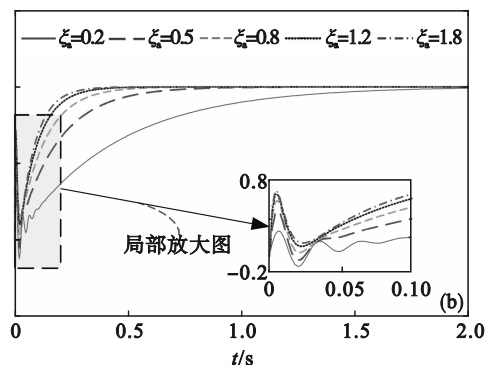
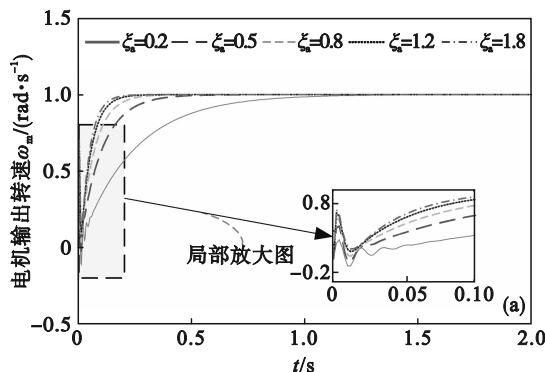
根据这些参数采用实部相同极点配置法来设计其PI参数,对驱动柔性负载的伺服系统电机端进行转速控制,并进行仿真实验,通过改变工况以及  $\xi_a$  来观测电机转速的输出变化情况,仿真结果如图6所示.

由图6可知,当极点阻尼系数  $\xi_a$  较小时,输出转速达到稳定的时间较长;反之,当极点阻尼系数  $\xi_a$  变大时,输出转速达到稳定所需时间越来越短.不过将不同工况之间的图进行对比会发现,该控制策略的效果随着柔性负载的长度以及转动惯量的增大而变弱.因此该控制策略在柔性负

载的长度和转动惯量较小的情况下较为适用.

### 5.3 对比 Ziegler-Nichols 法

Ziegler-Nichols 法(Z-N法)是一种经典的PID参数整定方法,它的基本思想是通过步进响应法来找到系统的临界增益,然后运用经验公式对PID控制器进行调整.虽然Z-N法在实际应用中具有一定的局限性,但易于实施,并且具有较好的实用性,尤其适用于具有良好线性特性的系统.以工况1和工况2为例,对Z-N法与实部相等的极点配置法进行对比,如图7所示.



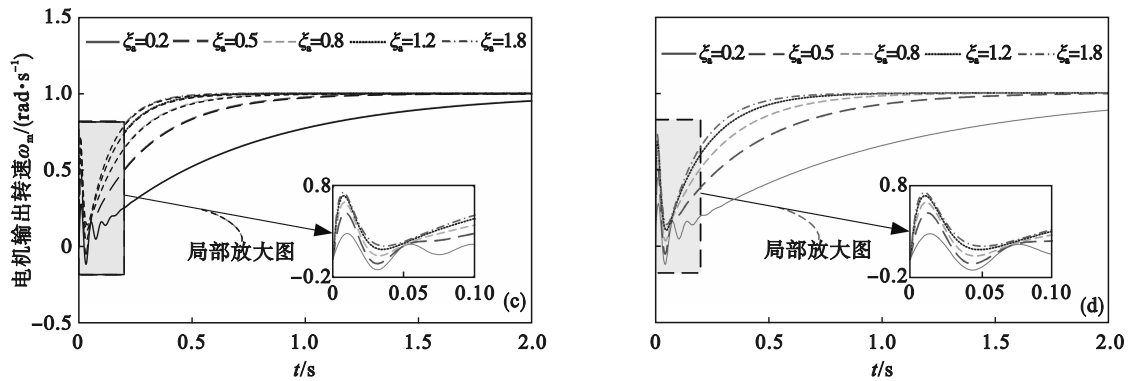


图6 实部相等的极点配置法控制实验结果

Fig. 6 Experimental results of the pole assignment method with equal real part

(a)—工况1; (b)—工况2; (c)—工况3; (d)—工况4.

通过图7对比可知,相较于Z-N法,使用极点配置法可以使伺服驱动系统更快地趋于稳定状态,说明极点配置法相较于传统的Z-N法有着更佳的控制效果.

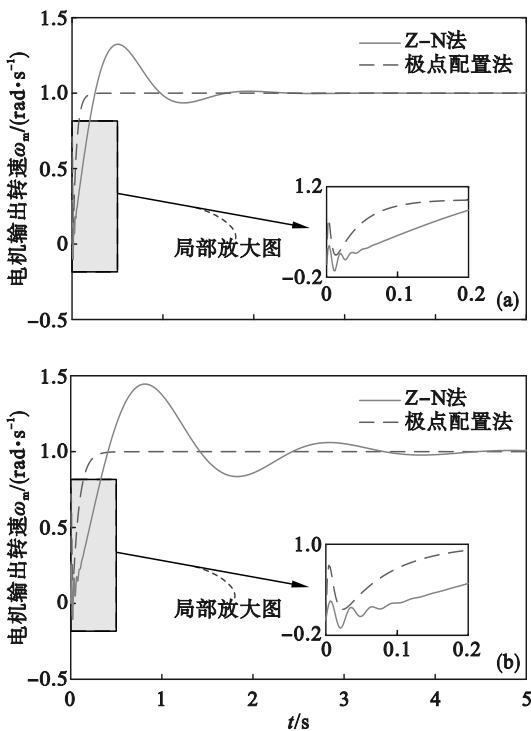


图7 实部相等的极点配置法与Z-N法对比图

Fig. 7 Comparison of the pole assignment method with equal real part and the Z-N method

(a)—工况1; (b)—工况2.

## 6 结 论

1) 对比伺服系统驱动刚性、柔性负载的伯德图可知,系统幅值在驱动柔性负载时开始发生突变,相较于刚性负载,系统速度环受柔性负载的影响更大,为了机械臂的稳定性不得不考虑负载

的柔性问题.

2) 提出基于实部相等的极点配置策略,采用PI调节器对伺服驱动系统进行控制,由实验结果可以看出PI调节器参数与系统评价指标之间的联系,通过改变相应的参数来提高系统的稳定性.

3) 通过仿真实验验证了实部相等的极点配置策略的有效性,并由仿真结果可知,在采用实部相等的极点配置法时,阻尼系数的适当增大有利于减少电机输出转速达到稳定状态所需时间,但应控制柔性负载的长度及转动惯量不宜过大.

4) 相较于传统的Z-N法,实部相等的极点配置法可以使伺服系统更快地趋于稳定状态,体现了本文提出的方法具有一定的优越性.

### 参考文献:

[1] Kiang C T, Spowage A, Yoong C K. Review of control and sensor system of flexible manipulator [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, 77(1): 187-213.

[2] Subedi D, Tyapin I, Hovland G. Review on modeling and control of flexible link manipulators [J]. *Modeling Identification and Control*, 2020, 41(3): 141-163.

[3] Talebi H A, Patel R V, Asmer H. Neural network based dynamic modeling of flexible-link manipulators with application to the SSRMS [J]. *Journal of Robotic Systems*, 2000, 17(7): 385-401.

[4] Sabatini M, Gasbarri P, Monti R, et al. Vibration control of a flexible space manipulator during on orbit operations [J]. *Acta Astronautica*, 2012, 73: 109-121.

[5] Gao H J, He W, Zhou C, et al. Neural network control of a two-link flexible robotic manipulator using assumed mode method [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(2): 755-765.

[6] Katsura S, Ohnishi K. Force servoing by flexible manipulator based on resonance ratio control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, 54(1): 539-547.

(下转第101页)