

表面周期性粗糙度对接触黏滑行为的影响

王志强, 雷震宇

(同济大学 铁道与城市轨道交通研究院, 上海 201804)

摘要: 为研究表面周期性粗糙度对接触界面黏滑特性的作用机制, 利用有限元方法, 建立了滑块-平板接触三维柔性体模型, 分析了表面光滑以及单/双表面粗糙条件下的接触黏滑运动过程. 结果表明, 在速度加载阶段, 对于表面光滑工况, 系统振动形式表现为初始的单次黏滑振动和后续的持续滑移振动. 对于单表面粗糙工况, 系统发生了不稳定周期振动, 且振动形式表现为循环往复的黏滑振动. 对于双表面粗糙工况, 受双接触表面复杂的粗糙度影响, 系统振动响应表现为往复无序的黏滑振动. 适当减小粗糙度幅值和增大粗糙度波长, 有利于促进粗糙表面接触.

关键词: 周期性粗糙度; 接触界面; 黏滑行为; 有限元方法; 振动响应

中图分类号: TH 117.1 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2025)01-0076-07

Effects of Surface Periodic Roughness on Contact Stick-Slip Behaviors

WANG Zhi-qiang, LEI Zhen-yu

(Institute of Rail Transit, Tongji University, Shanghai 201804, China. Corresponding author: LEI Zhen-yu, E-mail: zychux@126.com)

Abstract: In order to investigate the mechanism of surface periodic roughness on the stick-slip characteristics of the contact interface, a three-dimensional flexible-body model of the slider-plate contact was established by using the finite element method, and the contact stick-slip motion processes under the surface smoothness and single/double surface roughness conditions were analyzed. The results indicated that during the velocity loading phase, the vibration form of the system is characterized by initial single stick-slip vibration and subsequent sustained slip vibration under the surface smoothness condition. Under the single-surface roughness condition, the unsteady periodic vibration occurs in the system, and the vibration manifests itself in the form of cyclic stick-slip vibrations. Under the double-surface roughness condition, influenced by the complex roughness of double contact surfaces, the vibration response of the system manifests the reciprocating and disorderly stick-slip vibrations. Appropriate reduction of roughness amplitude and increase of roughness wavelength are beneficial to promote the rough surface contact.

Key words: periodic roughness; contact interface; stick-slip behavior; finite element method; vibration response

涉及摩擦的接触是一种非常复杂的物理现象, 且物理学中几乎所有的学科均与接触和摩擦相关, 诸如材料科学、固体力学、流体力学、热力学和电磁学等^[1]. 当两个物体通过摩擦接触相互约束时, 在一般情况下, 两个接触面的相对运动是三维的, 其可以分解为两个分量: 平行于接触

表面的切向分量和垂直于接触表面的法向分量. 这种类型的接触运动普遍存在于各种机械系统中, 如铁路车辆制动系统中的制动盘-车轮接触界面^[2]、汽车离合器^[3]和涡轮喷气发动机^[4-5]中带罩叶片系统的护罩接触界面等.

接触界面的相对运动通常伴随着接触力, 其

收稿日期: 2023-07-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52305123).

作者简介: 王志强(1993—), 男, 河北张家口人, 同济大学博士研究生; 雷震宇(1970—), 女, 四川成都人, 同济大学副教授, 博士生导师.

中摩擦力是最常见的接触力形式之一.著名的 Amonton 宏观摩擦定律最早在 1699 年被提出,且关于该定律的物理解释一直持续到 20 世纪中叶^[6].早期摩擦理论的主要缺点是没有考虑摩擦的能量耗散特性和摩擦磨损性能^[7],而现代摩擦学则主要基于表面粗糙度的摩擦理论,同时,较多摩擦学研究均是针对接触表面粗糙度展开的.

摩擦的存在也会诱发黏滑运动.黏滑运动表现为黏着和滑移交替循环,经常出现在各种日常现象中,如吱吱作响的门、刺耳的刹车声以及地震等.非人为的黏滑运动一般是不利于生产和生活的,因此,理解其形成机制并适当地加以控制是十分必要的.此外,接触表面通常也不是绝对光滑的,而是表现为不同的粗糙度形态,这对接触黏滑行为会产生相当大的影响.关于摩擦对黏滑运动的作用,相关学者主要通过样品测试方法进行分析. Perflyev 等^[8]研究了氟化锂单晶与球形金刚石压头在低速摩擦黏滑过程中的位错性质,发现压头在黏着和滑移阶段的速度差导致了各自完全不同的位错行为和损伤发展,同时基于位错结构相关分析,提出了位错在黏着和滑移区域的分布模型. Yaqoob 等^[9]分析了不同法向荷载下光滑球和光滑平面之间的预滑动和静摩擦力行为,以及完全滑动时的摩擦行为.结果表明,当施加的法向荷载较低时,黏着力会对摩擦力的测量产生影响.当考虑界面粗糙度时,多数研究主要采用计算方法开展.基于分子动力学模拟结果, Wang 等^[10]提出了一个能够准确描述界面剪切应力的解析模型,该模型可以解释单个纳米微凸体静摩擦力的尺寸依赖性. Yang 等^[11]利用分子动力学研究了单个微凸体与刚性基体的摩擦,同时考虑产生碎屑的影响,得出磨损和摩擦之间的耦合可以通过碎屑生成的热力学效率进行量化. Gao 等^[12]研究了多尺度表面粗糙度对黏滑行为的影响,发现黏滑行为主要受制于小尺度表面粗糙度密度,降低小尺度表面非晶体的密度能够显著抑制黏滑行为.在保持法向压力赫兹解的条件下, Ciavarella^[13]引入了赫兹球面接触摩擦的“黏着”模型,其中滑移的开始是由 Griffith 条件确定,且在滑移区域,标准库仑定律仍然有效. Sukhorukov 等^[14]采用小尺度试验研究了冰与钢之间的黏滑相互作用,并根据赫兹接触估算了冰与钢表面粗糙度之间的压力集度.此外,黏滑行为的参数化研究也是一个热点. Voisin 等^[15]设计了一个室内试验以研究单晶盐滑块在大量变形

循环中的摩擦行为,发现在刚度、温度和加载速度恒定的条件下,接触黏滑状态逐渐消失,最终达到稳定的滑移状态.王东等^[16]提出了一种表征粗糙结合面跨尺度黏滑摩擦行为的参数化力学模型,分析表明粗糙度参数对切向刚度和振荡激励的能量耗散具有较大影响.张帆等^[17]构建了一种同时考虑粗糙面上微凸体弹性变形和塑性接触的切向黏滑摩擦建模方法,结果显示,在微滑移阶段,切向行为主要受弹性变形影响,而在宏观滑移阶段,切向行为则主要受塑性变形影响.基于分形理论,赵海路等^[18]建立了考虑摩擦和微凸体相互作用的结合面法向接触刚度和阻尼分形模型,并利用该模型分析了摩擦系数、分形维数/粗糙度参数和接触荷载对接触刚度和阻尼的影响.李小彭等^[19]研究了机床进给系统的黏滑特性,发现进给速度、阻尼和传动刚度的增大,动静摩擦差值的减小,有利于增强系统的稳定性.

根据上述文献调研可知,现有研究主要采用解析方法分析表面粗糙度对接触黏滑行为的作用.解析方法能够给出特定参数对黏滑特性的映射关系,但分析目标大多被视为刚性模型,不能全面考虑物体的柔度特征.具体而言,解析方法一方面不能体现接触界面的黏滑详细分布情况,从而不能充分理解其黏滑特性,尤其是在表面粗糙度工况下;另一方面,解析方法中的刚性模型失去了弹性属性,难以精确描述物体的运动及受力状态.鉴于此,本文采用有限元方法,将接触物体考虑为柔性体,着重研究了表面粗糙度对接触界面黏滑运动的影响.首先,利用有限元软件 ABAQUS,建立了经典的滑块-平板接触三维数值模型;然后,运用数值模型,分析了表面光滑条件下的接触黏滑运动过程,以作为后续分析的参考;最后,详细地研究了周期性单/双表面粗糙度对接触黏滑的影响机制.相较于通常呈现为随机分布的表面粗糙度,本文主要关注具有周期性表面粗糙度的特定应用场景,诸如光栅元件、CD/DVD 光盘、特殊声学材料及纳米结构材料等.

1 数值模型

将经典的滑块-平板接触模型在有限元环境中三维化.滑块-平板接触三维数值模型主要包括滑块、平板、弹簧及阻尼单元,其中滑块尺寸为 10 mm×10 mm×10 mm,平板尺寸为 200 mm×20 mm×10 mm(长×宽×高).滑块通过弹簧及阻尼

单元与固定点连接,并通过面接触与平板表面形成接触对,其中法向行为采用“硬”接触表征,其不允许接触对之间产生穿透行为,但允许接触对接触后分离,即接触物体的相对位移受到严格约束,因而可使模型达到预期效果;切向行为采用“罚”函数摩擦公式表征,摩擦系数设为恒定值 0.35,该系数反映了接触表面的材料特性,可被用于计算动态切向接触力^[20-24].建立的数值模型如图 1 所示,模型材料参数如表 1 所示.

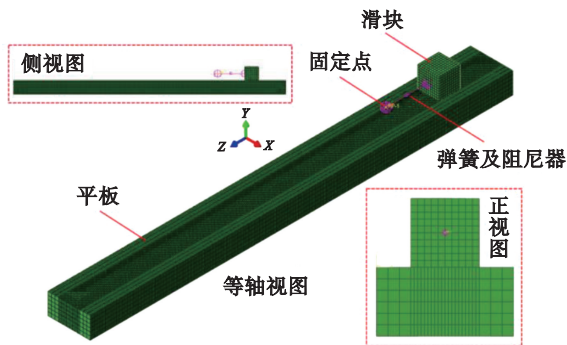


图 1 数值模型图

Fig. 1 Diagram of the numerical model

表 1 模型材料参数

Table 1 Model material parameters

材料	参数	取值
滑块/平板	密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	7 800
	弹性模量/Pa	2.1×10^{11}
	泊松比	0.3
弹簧	刚度/($\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$)	10 000
阻尼器	阻尼/($\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$)	5 000

滑块中心初始位置距靠近平板端面在 z 方向上为 25 mm,且滑块在 x 方向上位于平板上表面中心.数值模型的边界条件设置如下:平板下表面约束除 z 方向以外的所有自由度,固定点处于完全约束状态,其他无任何约束.荷载条件设置如下:滑块上表面承受 0.1 MPa 的均匀压应力,平板 z 方向一端面(靠近滑块)承受 10 mm/s 匀速荷载($-z$ 方向).采用隐式动力学算法求解滑块-平板相对运动问题,该算法利用 Newmark 迭代方式求解下个增量步的未知量,是无条件稳定的^[25].此外,本文设置的分析增量步为 0.000 01 s.

需要说明的是,模型中滑块和平板均采用钢材进行描述,因此,本文后续分析均限于钢材料结构接触界面(其他材料可通过更换参数进行类似分析);弹簧刚度和阻尼器阻尼主要依据滑

块受力情况进行确定.同时,模型接触界面参数主要依据滑块/平板材料参数进行确定.

2 表面光滑工况下接触黏滑特性分析

当滑块与平板接触界面均为光滑表面时,利用数值模型执行计算,可得平板运动过程中接触表面的黏滑状态演化.图 2 为平板的 z 方向位移曲线,其中 0~1.0 s 为滑块的法向压应力加载阶段,1.0~2.0 s 为平板的速度加载阶段.图 3 为 5 个代表性时刻下的接触黏滑分布图,在有限元分析中,节点摩擦力合力 F_f 可表示为

$$F_f = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \quad (1)$$

式中: F_1 为纵向节点摩擦力; F_2 为横向节点摩擦力.摩擦力阈值 F_t 可表示为

$$F_t = \mu\sigma. \quad (2)$$

式中: μ 为摩擦系数; σ 为节点法向接触应力.

当 $F_f = 0$ 时,接触点处于未接触状态;当 $0 < F_f < F_t$ 时,接触点处于黏着状态;当 $F_f \geq F_t$ 时,接触点由黏着转变为滑移.

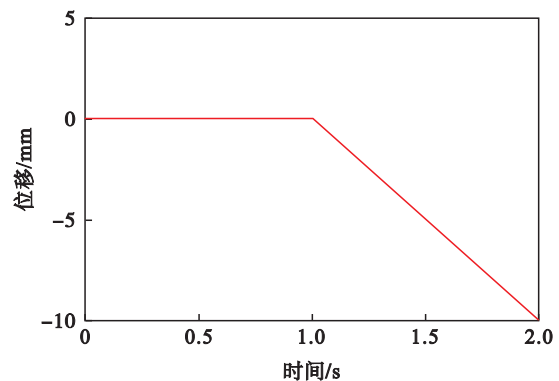


图 2 平板 z 方向位移

Fig. 2 Displacement in plate z direction

由图 3 可得,接触表面在 1.00 s 时处于黏着状态,而在 1.05, 1.20, 1.65 和 1.95 s 时处于滑移状态,这说明接触表面在平板运动过程中发生了黏着—滑移过渡.

为进一步理解接触表面的黏滑行为,对滑块-平板系统的动态响应进行了分析.滑块-平板系统的 z 方向接触力(即摩擦力)时域曲线如图 4 所示,为便于分析,已对接触力时域曲线进行归一化处理(以下类同).由图 4 可得,在速度加载阶段,接触力出现了明显的振荡现象,即接触界面发生了黏滑/滑移振动,从而表现出如图 3 所示的黏着—滑移状态变换.

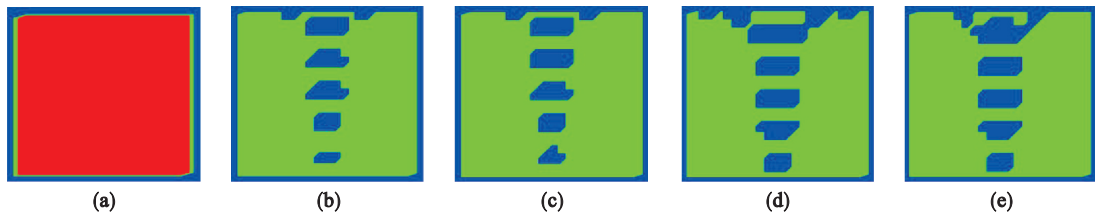


图3 接触黏滑分布(红色表示黏着,绿色表示滑移,蓝色表示未接触)

Fig. 3 Contact stick-slip distribution (red indicates adhesion, green indicates slip, blue indicates no contact)
(a)—1.00 s; (b)—1.05 s; (c)—1.20 s; (d)—1.65 s; (e)—1.95 s.

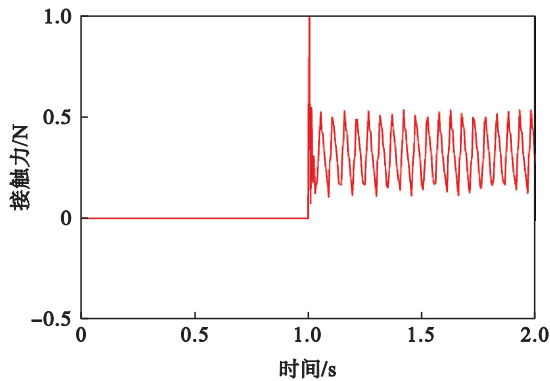


图4 z方向接触力时域曲线

Fig. 4 Time-domain curve of contact force in z direction

图4反映出接触界面发生黏滑/滑移振动的可能性,然而具体的振动形式还不得而知.在平板运动过程中,由于滑块始终处于被动运动状态,因此其速度特征能够在一定程度上体现滑块-平板系统的振动形式.图5给出了滑块z方向的速度曲线,分析可得,在平板运动初始时刻,滑块速度为0,随后急剧增大,最终逐渐趋近于0.当滑块速度为0时,表明接触表面处于黏着状态;而当滑块速度不为0时,表明接触表面处于滑移状态;因此,根据图5,可将表面光滑工况下滑块-平板系统的振动形式表述为初始的单个黏滑振动和后续的持续滑移振动.

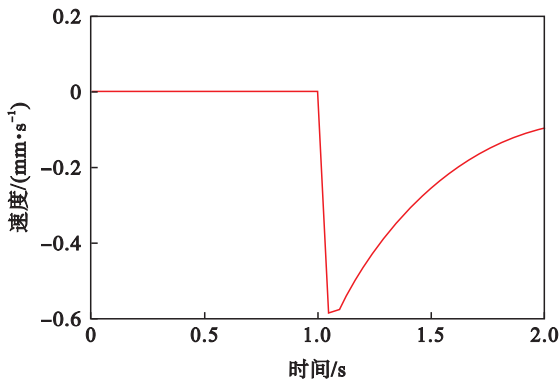


图5 滑块z方向的速度曲线

Fig. 5 Velocity curve of the slider in z direction

3 表面粗糙工况下接触黏滑特性分析

为阐明表面粗糙度对接触黏滑特性的影响,以单/双表面粗糙工况为例,研究了表面粗糙度对接触黏滑的作用机制.

3.1 单表面粗糙工况下接触黏滑特性

假设滑块下表面具有周期均匀分布的粗糙度,其幅值为0.1 mm(y方向),波长为2 mm,如图6所示,上述粗糙表面的结构参数主要依据接触区域网格单元特征尺寸(1 mm)选取;而平板上表面仍保持光滑.需要说明的是,滑块下表面的粗糙度是通过修改表面节点坐标施加而成的,该过程需要保证施加的位移小于该区域单元特征尺寸的15%^[25].通过执行模型仿真计算,可得平板运动过程中接触表面的黏滑状态.图7为5个代表性时刻下的黏滑分布图,容易发现其与图3所示黏滑分布表现不同,除黏着状态(1.00 s)和滑移状态(1.02和1.04 s)外,接触表面在整个过程中会出现黏滑状态(即黏着-滑移区域共存状态,如1.01和1.03 s),这表明表面粗糙度的存在改变了滑块-平板系统的接触黏滑运动方式.

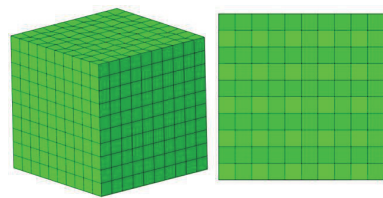


图6 滑块下表面粗糙度分布

Fig. 6 Roughness distribution on the lower surface of the slider

对单表面粗糙工况下的系统动态响应进行了分析.滑块-平板系统的z方向接触力时域曲线如图8所示,分析可得,接触力幅值近似呈现周期性变化,同时在速度加载阶段(不包括1.00 s时

刻),接触力最大幅值差(>0.5 N)远大于表面光滑工况下的接触力最大幅值差(<0.2 N),这反映出

滑块-平板系统发生了不稳定振动.

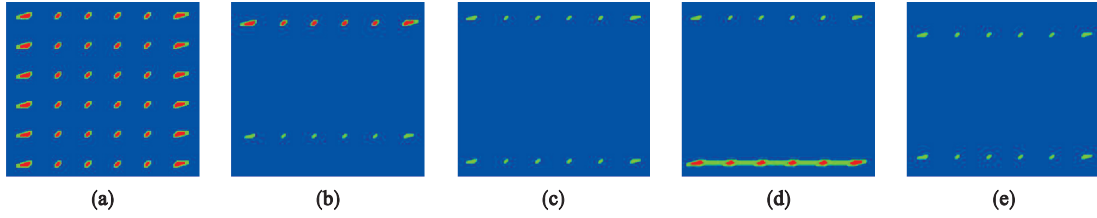


图7 接触黏滑分布(红色表示黏着,绿色表示滑移,蓝色表示未接触)

Fig. 7 Contact stick-slip distribution (red indicates adhesion, green indicates slip, blue indicates no contact)

(a)—1.00 s; (b)—1.01 s; (c)—1.02 s; (d)—1.03 s; (e)—1.04 s.

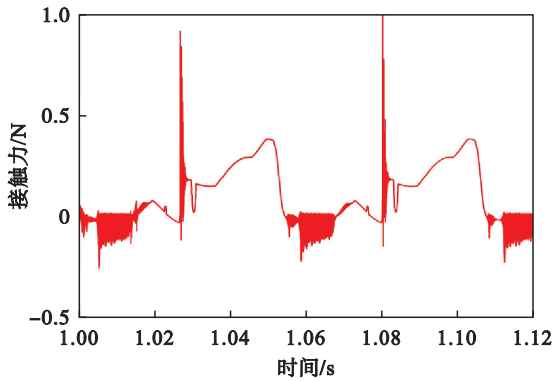


图8 单表面粗糙工况下z方向接触力时域曲线

Fig. 8 Time-domain curve of contact force in z direction under the single-surface roughness condition

为确定具体的不稳定振动形式,进一步提取了滑块z方向的速度曲线,如图9所示.由图9可得,在速度加载阶段,滑块速度呈现为0与非0交替周期演化.当滑块速度为0时,接触表面处于黏着状态,反之则处于滑移状态,因此,可将单表面粗糙工况下滑块-平板系统的振动形式描述为循环往复的黏滑振动.

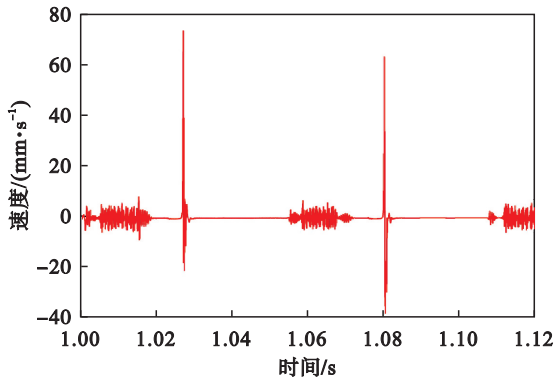


图9 单表面粗糙工况下滑块z方向的速度曲线

Fig. 9 Velocity curve of the slider in z direction under the single-surface roughness condition

3.2 双表面粗糙工况下接触黏滑特性

在3.1节的基础上,对平板接触表面施加幅

值0.1 mm(y向),波长2 mm的周期均匀粗糙度,如图10所示(粗糙表面的结构参数同3.1节).通过利用含双表面粗糙的滑块-平板接触三维模型进行数值计算,可得平板运动过程中接触表面的黏滑演化.类似地,图11给出了5个代表性时刻下的接触黏滑分布图,可以看出图11a~图11d对应的接触黏滑分布与单表面粗糙工况下对应时刻的接触黏滑分布相似,其中1.00 s时刻对应黏着状态,1.02 s时刻对应滑移状态,1.01 s和1.03 s时刻对应黏滑状态.同时,与单表面粗糙工况下接触黏滑分布图不同的是,双表面粗糙工况下接触表面出现了完全未接触状态,即脱空状态,如图11e所示,这与双表面粗糙度形式密切相关.

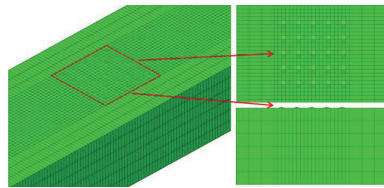


图10 平板接触表面粗糙度分布

Fig. 10 Roughness distribution on the contact surface of the plate

双表面粗糙工况下滑块-平板系统的z方向接触力时域曲线如图12所示,容易发现在此工况下,接触力幅值具有较强的振荡属性,且最大幅值差仍大于0.5 N.然而,不同于单表面粗糙工况下的接触力时域曲线,图12显示的双表面粗糙工况下的接触力时域曲线并不具有周期特性,这是双接触表面复杂的粗糙度所致.

进一步,提取了滑块在此工况下的z方向速度曲线,以明确系统具体的振动形式,如图13所示.根据图13可得,在速度加载阶段,滑块速度表现为0与非0交替变化,这与图9相似,但并不具有图9速度曲线的周期特性,因此,可将双表面粗糙工况下滑块-平板系统的振动形式阐述为往复

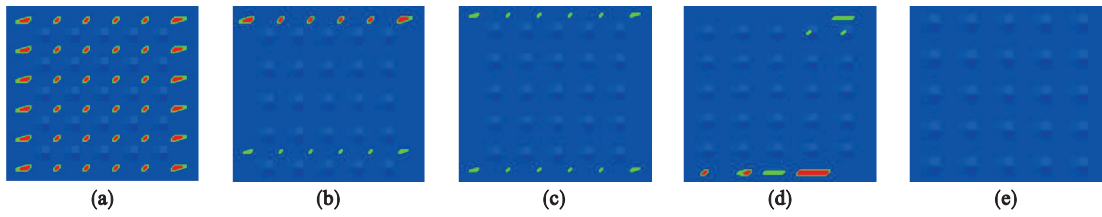


图 11 接触黏滑分布(红色表示黏着,绿色表示滑移,蓝色表示未接触)

Fig. 11 Contact stick-slip distribution (red indicates adhesion, green indicates slip, blue indicates no contact)
(a)—1.00 s; (b)—1.01 s; (c)—1.02 s; (d)—1.03 s; (e)—1.04 s.

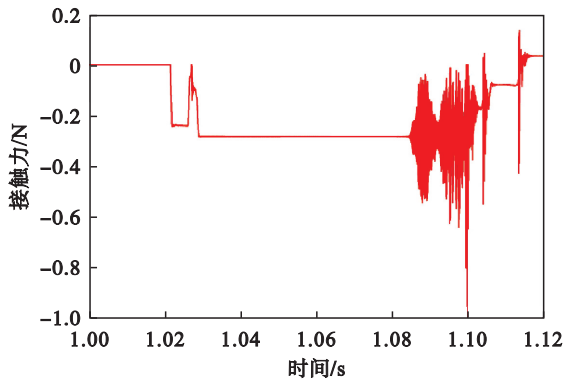


图 12 双表面粗糙工况下 z 方向接触力时域曲线
Fig. 12 Time-domain curve of contact force in z direction under the double-surface roughness condition

波长 2 mm), (幅值 0.14 mm, 波长 2 mm), (幅值 0.10 mm, 波长 1 mm), (幅值 0.10 mm, 波长 4 mm) 和 (幅值 0.10 mm, 波长 2 mm), 采取与 3.1 节相同的粗糙度建模方法并执行计算, 相应的结果见表 2.

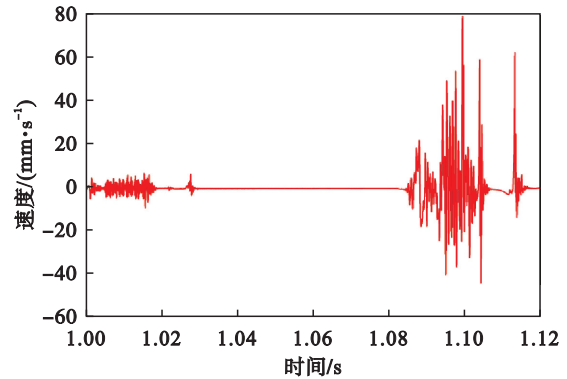


图 13 双表面粗糙工况下滑块 z 方向的速度曲线
Fig. 13 Velocity curve of the slider in z direction under the double-surface roughness condition

无序的黏滑振动。

3.3 不同粗糙度下接触黏滑特性

本节对比分析了不同周期性粗糙度下的计算结果. 选取周期性粗糙度分别为(幅值 0.06 mm,

表 2 不同粗糙度下接触黏滑结果对比
Table 2 Comparison of contact stick-slip results under different roughnesses

工况	粗糙度	振动响应周期性	振动形式	界面未接触
单表面粗糙	幅值 0.06 mm, 波长 2 mm	存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.14 mm, 波长 2 mm	存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.10 mm, 波长 1 mm	存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.10 mm, 波长 4 mm	存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.10 mm, 波长 2 mm	存在	黏滑振动	不存在
双表面粗糙	幅值 0.06 mm, 波长 2 mm	不存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.14 mm, 波长 2 mm	不存在	黏滑振动	存在
	幅值 0.10 mm, 波长 1 mm	不存在	黏滑振动	存在
	幅值 0.10 mm, 波长 4 mm	不存在	黏滑振动	不存在
	幅值 0.10 mm, 波长 2 mm	不存在	黏滑振动	存在

由表 2 可得, 对于单表面粗糙工况, 在不同的粗糙度条件下, 系统振动响应均呈现出周期性, 振动形式均表现为黏滑振动, 且接触界面不存在未接触情况. 对于双表面粗糙工况, 在不同的粗糙度条件下, 系统振动响应均不具有周期性, 振

动形式均为黏滑振动; 同时, 相对于幅值 0.10 mm, 波长 2 mm 的粗糙度计算结果, 粗糙度幅值减小(幅值 0.06 mm, 波长 2 mm)和波长增大(幅值 0.10 mm, 波长 4 mm)均会导致接触界面从未接触转变为接触.

4 结 论

1) 对于表面光滑工况,在速度加载阶段,接触表面发生了黏着-滑移过渡;同时,滑块-平板系统的振动形式表现为初始的单次黏滑振动和后续的持续滑移振动。

2) 对于单表面粗糙工况,在速度加载阶段,接触表面出现了黏着、滑移和黏滑 3 种状态,表明表面粗糙度的存在改变了系统的接触黏滑运动方式;滑块-平板系统发生了不稳定周期振动,且振动形式表现为循环往复的黏滑振动。

3) 对于双表面粗糙工况,在速度加载阶段,接触表面出现了黏着、滑移、黏滑和完全未接触 4 种状态,这与双表面粗糙度形式有关;受制于双接触表面复杂的粗糙度,滑块-平板系统的振动响应并不具有周期特征,而是表现为往复无序的黏滑振动。

4) 粗糙度幅值减小和波长增大均有利于粗糙表面趋于接触,从而改变界面接触状态。

参考文献:

- [1] Yao W W, Zhou X P, Dias D, et al. Frictional contact and stick-slip: mechanism and numerical technology [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2023, 274: 112289.
- [2] Günay M, Korkmaz M E, Özmen R. An investigation on braking systems used in railway vehicles [J]. *Engineering Science and Technology*, 2020, 23(2): 421-431.
- [3] Padmanabhan C. Analysis of periodically excited systems with clearances [D]. Columbus: The Ohio State University, 1994.
- [4] Yang B D, Menq C H. Modeling of friction contact and its application to the design of shroud contact [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1997, 119(4): 958-963.
- [5] Menq C H, Griffin J H, Bielak J. The influence of a variable normal load on the forced vibration of a frictionally damped structure [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1986, 108(2): 300-305.
- [6] Bowden F P, Tabor D. The friction and lubrication of solids [M]. Oxford: Oxford University Press, 2001: 1-32.
- [7] Scholz C H. The mechanics of earthquakes and faulting [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2018: 43-96.
- [8] Perilyev V, Moshkovich A, Lapsker I, et al. Dislocation structure and stick-slip phenomenon [J]. *Tribology Letters*, 2014, 55(2): 295-301.
- [9] Yaqoob M A, Winogrodzka A, Fischer H R, et al. Pre-sliding behaviour of single asperity contact [J]. *Tribology Letters*, 2013, 49(3): 553-562.
- [10] Wang J, Yuan W K, Bian J J, et al. A semi-analytical model for the scale-dependent friction of nanosized asperity [J]. *Journal of Physics Communications*, 2020, 4(9): 095026.
- [11] Yang Y J, Shi Y F. Single asperity friction in the wear regime [J]. *Friction*, 2018, 6(3): 316-322.
- [12] Gao H, Zhao L J, Li L, et al. Scale effect of surface asperities on stick-slip behavior of zinc-coated steel [J]. *Langmuir*, 2023, 39(15): 5561-5568.
- [13] Ciavarella M. Transition from stick to slip in Hertzian contact with "Griffith" friction: the Cattaneo-Mindlin problem revisited [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 84: 313-324.
- [14] Sukhorukov S, Marchenko A. Geometrical stick-slip between ice and steel [J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2014, 100: 8-19.
- [15] Voisin C, Renard F, Grasso J R. Long term friction: from stick-slip to stable sliding [J]. *Geophysical Research Letters*, 2007, 34(13): L13301.
- [16] 王东,徐超.一种考虑粗糙结合面切向黏滑摩擦模型[J].机械工程学报,2014,50(13):129-134.
(Wang Dong, Xu Chao. A tangential stick-slip friction model for rough interface [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(13): 129-134.)
- [17] 张帆,王东,高通锋.考虑粗糙结合面弹塑性接触的黏滑摩擦建模[J].固体力学学报,2018,39(2):162-169.
(Zhang Fan, Wang Dong, Gao Tong-feng. Stick-slip friction model for elastic-plastic contact of rough surfaces [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, 39(2): 162-169.)
- [18] 赵海路,张学良,许雍泰.考虑摩擦和微凸体相互作用的结合面接触刚度和阻尼模型[J].机械强度,2023,45(2):430-437.
(Zhao Hai-lu, Zhang Xue-liang, Xu Yong-tai. Model of normal contact stiffness and damping of joint surfaces considering friction and asperity interaction [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2023, 45(2): 430-437.)
- [19] 李小彭,梁友鉴,孙德华,等.系统参数对自激振动系统动力学稳定性的影响[J].东北大学学报(自然科学版),2015,36(5):690-694.
(Li Xiao-peng, Liang You-jian, Sun De-hua, et al. Impact of the system parameters on self-excited vibration system dynamic stability [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2015, 36(5): 690-694.)
- [20] Polach O. Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit [J]. *Wear*, 2005, 258(7/8): 992-1000.
- [21] Lu X Z, Kim C W, Chang K C. Finite element analysis framework for dynamic vehicle-bridge interaction system based on ABAQUS [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, 20(3): 2050034.
- [22] 卢纯,尹家宝,张庆贺,等.轨道车辆制动闸片摩擦块跑合阶段磨损分析[J].表面技术,2022,51(12):63-71.
(Lu Chun, Yin Jia-bao, Zhang Qing-he, et al. Wear degradation of railway vehicle brake pad friction block in running-in stage [J]. *Surface Technology*, 2022, 51(12): 63-71.)
- [23] 任朝晖,李竺鸿,王云贺,等.超声滚压微锻造增材件表面力学性能[J].东北大学学报(自然科学版),2023,44(5):634-641.
(Ren Zhao-hui, Li Zhu-hong, Wang Yun-he, et al. Surface mechanical properties of ultrasonic rolling micro-forging additive manufactured parts [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2023, 44(5): 634-641.)
- [24] 唐秀洁,赵文,路博,等.咬合管幕结构的抗弯性能及影响参数分析[J].东北大学学报(自然科学版),2023,44(2):289-297,304.
(Tang Xiu-jie, Zhao Wen, Lu Bo, et al. Flexural behavior and influencing parameters of secant-pipe-roof structure [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2023, 44(2): 289-297, 304.)
- [25] ABAQUS. ABAQUS analysis user's guide [DB/OL]. [2023-07-19]. <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usb/default.htm>.