

# 基于曲面修剪的直齿轮铣削刀具与 工件切触区域的计算

张荣闯, 李明

(东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 提出一种基于曲面修剪的直齿轮多轴铣削中铣刀与工件切触区域的计算方法。首先,建立齿轮铣削运动学模型,以精确描述铣刀和工件之间的相对运动关系;其次,在构建精确的渐开线齿廓数学模型的基础上,采用等残余高度法进行刀具路径规划,并计算出各个刀位点坐标;随后,采用半球面近似刀具扫掠面,将切触区域定义为由3条边界曲线约束的局部球面区域,并利用边界曲线所在曲面对半球面进行修剪,以精确提取切触区域;最后,通过垂直于刀具轴线的平面与切触区域的求交运算计算出切触角度。切触区域仿真与铣削试验对比分析表明,该方法具有较高的计算精度;与文献所采用的实体法相比,该方法具有较高的计算效率。

**关键词:** 齿轮铣削;刀具与工件切触区域;刀具路径规划;曲面修剪

中图分类号: TH 164 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2025)09-0087-08

## Cutter-Workpiece Engagement Calculation for Milling of Spur Gears Based on Surface Trimming

ZHANG Rong-chuang, LI Ming

(School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China.  
Corresponding author: ZHANG Rong-chuang, E-mail: zhangrongchuang@neuq.edu.cn)

**Abstract:** A cutter-workpiece engagement (CWE) calculation approach for multi-axis milling of spur gears based on surface trimming was proposed. Firstly, to accurately describe the relative motion relationship between the milling cutter and the workpiece, a gear milling motion model was established. Secondly, based on the established precise mathematical model of the involute gear tooth profile, the constant scallop-height method was applied for tool path planning, with precise calculation of the coordinate positions for each cutter location point. Thirdly, the cutter sweep surface was approximated using a hemispherical surface, and the CWE was defined as a partial sphere constrained by three boundary curves. The hemispherical surface was trimmed using the surface where the boundary curves are located to accurately extract the CWE. Finally, the engagement angles were calculated through an intersection operation between the CWE and a plane perpendicular to the tool axis. A comparative analysis of the simulated and experimentally measured CWE demonstrates the high computational accuracy of the proposed method. Furthermore, compared with solid modeling-based method adopted in the literature, this method has a higher computational efficiency.

**Key words:** gear milling; cutter-workpiece engagement; tool path planning; surface trimming

现代齿轮加工领域正经历着从传统专用机床向柔性制造的技术转型。其中,基于加工中心的多轴铣削工艺凭借其卓越的工艺柔性,正在逐

步替代传统的滚齿和剃齿等专用加工方法。研究表明,该技术在大型齿轮的快速原型制造和再制造修复等应用场景中展现出显著的技术经济优

收稿日期: 2024-01-02

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(52305453); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N2223012)。

作者简介: 张荣闯(1984—),男,辽宁辽阳人,东北大学秦皇岛分校讲师,博士。

势<sup>[1-2]</sup>.然而,在齿轮铣削过程中,切削参数的优化配置面临严峻挑战:非最优参数组合会引发切削力幅值的剧烈波动,这种动态载荷的变化不仅会加速刀具磨损,更会导致加工表面质量恶化.鉴于铣削力与加工参数的强相关性,构建高精度的齿轮铣削力预测模型成为实现工艺参数优化和保证加工质量的重要理论基础.

在铣削力建模研究中,切触区域计算的准确性是影响模型精度的关键因素<sup>[3]</sup>.通过对现有文献的系统分析,根据几何建模原理和计算方法的本质差异,离散法、解析法和实体法是目前主要的切触区域计算方法.离散法是基于离散化建模原理,通过将刀具和工件的几何形体进行网格化离散,并运用空间相交判定算法,实现切触区域的数值计算.在离散法研究进展方面,基于Z-MAP算法的改进,董永亨等<sup>[4]</sup>开发的新型识别方法能够精确捕捉球头铣刀加工时的瞬时切触状态;Wei等<sup>[5]</sup>通过引入逻辑数组标识机制,使Z-MAP方法的计算效率显著提升;Qin等<sup>[6]</sup>提出了一种融合解析建模技术的改进Z-MAP方法,该方法通过局部更新刀具离散模型的策略,在保证切触区域识别精度的同时,显著降低了计算复杂度.离散法虽然计算效率优异,但其固有的离散化误差会导致计算精度受到限制,这一矛盾亟待解决.

解析法通过空间解析几何方法建立刀具与工件接触的空间曲线数学模型,并采用降维求解策略进行计算.在解析法研究进展方面,文献[7-10]在多轴铣削加工中,基于空间曲面求交的几何原理,将切触区域求解问题转化为其边界曲线的参数化建模问题,并进一步通过降维处理简化参数曲线的求解过程.解析法在满足工程计算精度要求的前提下,具有显著的计算效率优势;然而,在复杂曲面的表征和求交方面,其参数化计算的复杂度较高、数值稳定性较差,导致该算法适应度受限.

实体法以计算实体几何理论为基础,通过严格的布尔运算精确确定刀具与工件的切触区域.在实体法的研究进展方面,Yang等<sup>[11]</sup>在基于实体建模方法的切触区域仿真中,通过刀具回转面上的潜在切触面对材料去除体进行布尔运算.Boz等<sup>[12]</sup>基于Parasolid建模内核,利用刀具扫掠体和工件几何模型之间的布尔运算得到更新后的工件几何模型,获取该几何模型与刀具回转体的相交曲面,进而确定切触区域.植俊杰等<sup>[13]</sup>基于NX

二次开发平台,通过计算刀具回转体与动态更新的工件几何模型的布尔交集,实现切触区域的直接提取.尽管实体法在计算精度方面具有显著优势,但其计算过程需要反复生成刀具扫掠体并实时更新工件几何模型,导致计算复杂度随刀位点数量呈几何级数增长,从而严重制约了计算效率.

本文针对直齿轮球头铣刀铣削加工中的切触区域计算问题展开研究.针对解析法存在的球头铣刀球面与渐开线齿面复杂交线求解困难以及离散法计算精度不足的局限性,提出一种基于曲面修剪的切触区域提取新方法.首先,基于坐标变换理论建立齿轮铣削过程中刀具与工件相对运动的数学模型;其次,在构建精确的渐开线齿廓数学模型的基础上,采用等残余高度法实现刀具路径规划,并通过数值迭代算法精确求解各加工刀位点的坐标.然后,采用实体法构建的铣刀回转面、刀具扫掠面和辅助平面依次修剪待加工曲面,精确提取刀具-工件接触区域,并据此计算切削过程中的有效切触角度区间.最后,通过双重验证评估所提方法的性能:几何精度有效性方面,对比实际加工切触区域与仿真切触区域边界曲线的一致性;计算效率优越性方面,与现有文献中基于构造刀具扫掠体和工件模型动态更新的传统实体法的计算时间进行比较.

## 1 齿轮铣削运动模型

### 1.1 坐标系定义

在直齿轮铣削加工中,所有齿轮均采用统一的铣削工艺策略.该工艺中刀具运动包含两个阶段:首先通过齿高方向的进给运动实现刀具精确定位,随后通过齿宽方向的切削进给完成材料去除.为准确表征该过程中的刀具与工件相对运动关系,建立了如图1所示的右手笛卡尔坐标系.

如图1a所示,定义工件坐标系 $o_w-x_wy_wz_w$ (简称 $\{s_w\}$ ),该坐标系与齿轮刚性连接. $\{s_w\}$ 的原点 $o_w$ 精确位于齿轮上端面的几何中心, $y_w$ 轴和 $z_w$ 轴分别重合于齿廓对称中心线和齿轮轴线, $x_w$ 轴方向由右手定则确定.定义进给坐标系 $o_f-x_fy_fz_f$ (简称 $\{s_f\}$ ),其原点 $o_f$ 与球头铣刀的球心重合, $z_f$ 轴和 $x_f$ 轴的方向分别平行于理想渐开面的法向量 $\mathbf{n}_k$ 和 $\{s_w\}$ 的 $z_w$ 轴, $y_f$ 轴方向同样由右手定则确定;如图1b所示,角度 $\beta_k$ 是 $z_f$ 轴与 $y_w$ 轴之间的夹角,即用于确定刀具姿态的刀倾角,设定 $\beta_k=0$ ,因此刀具轴线平行于齿轮端面.进一步定义刀具

坐标系  $o_T-x_Ty_Tz_T$  (简称  $\{s_T\}$ ), 其原点  $o_T$  与球头铣刀球心重合 (即与  $\{s_F\}$  的原点  $o_F$  共点),  $z_T$  轴与刀具轴线重合, 正向指向刀具远离工件表面的方向. 如图 1b 所示,  $\{s_T\}$  可视为  $\{s_F\}$  绕其  $x_F$  轴旋转构造的坐标系, 其中旋转角度  $\lambda_k$  (定义为  $z_F$  轴与  $z_T$  轴的夹角) 即为用于确定刀具姿态的刀偏角.

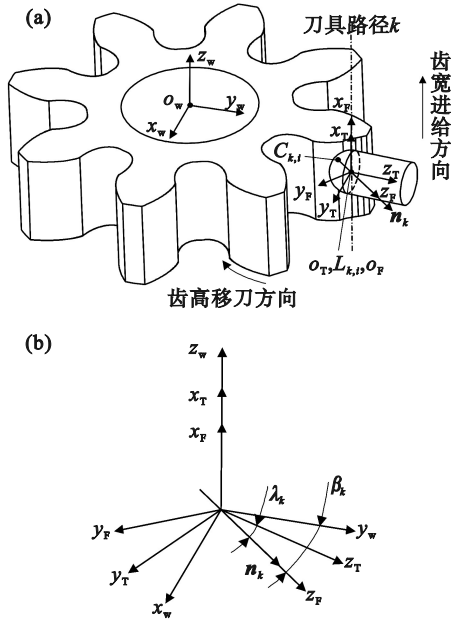


图 1 直齿轮铣削坐标系

Fig. 1 Coordinate system of spur gear milling

(a)—坐标系定义; (b)—坐标系之间方向关系.

1.2 变换矩阵

在切触区域计算中, 采用工件静止假设, 即刀具相对于工件运动. 为表征二者的相对运动关系, 需建立  $\{s_T\}$  与  $\{s_W\}$  坐标系间的映射变换关系.

$\{s_T\}$  相对于  $\{s_F\}$  的变换矩阵为

$$M_{TF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda_k & \sin\lambda_k & 0 \\ 0 & -\sin\lambda_k & \cos\lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\{s_F\}$  相对于  $\{s_W\}$  的变换矩阵为

$$M_{FW} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_k & -\sin\beta_k & 0 \\ 0 & \sin\beta_k & \cos\beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{L_{k,i}} \\ 0 & 1 & 0 & y_{L_{k,i}} \\ 0 & 0 & 1 & z_{L_{k,i}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $x_{L_{k,i}}, y_{L_{k,i}}, z_{L_{k,i}}$  分别表示  $\{s_W\}$  下的第  $k$  条刀具路径中第  $i$  个刀位点  $L_{k,i}$  的坐标, 其与初始刀位点  $L_{k,0}$  坐标  $x_{L_{k,0}}, y_{L_{k,0}}, z_{L_{k,0}}$  满足:

$$\begin{bmatrix} x_{L_{k,i}} \\ y_{L_{k,i}} \\ z_{L_{k,i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{L_{k,0}} \\ y_{L_{k,0}} \\ z_{L_{k,0}} + L_c \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $L_c$  为刀具走刀长度; 设定  $z_{L_{k,0}}$  为定值常数.

$\{s_T\}$  相对于  $\{s_W\}$  的变换矩阵为

$$M_{TW} = M_{TF} M_{FW} \quad (4)$$

1.3 渐开线齿廓数学模型

直齿轮的待加工表面为理论渐开面上法向距离为  $T$  的等距面, 即图 2 中曲线  $AB$  沿齿轮轴线方向的拉伸面.

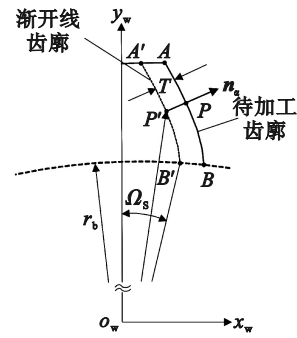


图 2 渐开线齿廓

Fig. 2 Involute gear tooth profile

渐开线齿廓  $A'B'$  上点  $P'$  的坐标为

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \sin(\Omega_s - \tan\alpha + \alpha), \\ y' &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \cos(\Omega_s - \tan\alpha + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $\alpha$  为压力角;  $r_b$  为基圆半径;  $\Omega_s$  为夹角, 计算式为

$$\Omega_s = \pi / (2z) + \theta_n.$$

其中:  $z$  为齿轮齿数;  $\theta_n$  为分度圆压力角  $\alpha_n$  对应的展角, 计算公式为  $\theta_n = \tan(\alpha_n) - \alpha_n$ .

渐开线齿廓  $A'B'$  上点  $P'$  的法向矢量为

$$n_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\tan\alpha - \Omega_s) \\ \sin(\tan\alpha - \Omega_s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

结合式(5)和式(6), 可得渐开线等距线方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \sin(\Omega_s - \tan\alpha + \alpha) + T \cos(\tan\alpha - \Omega_s), \\ y &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \cos(\Omega_s - \tan\alpha + \alpha) + T \sin(\tan\alpha - \Omega_s). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2 刀具路径规划

式(3)表明, 当走刀长度  $L_c$  和初始刀位点  $L_{k,0}$  的坐标  $x_{L_{k,0}}, y_{L_{k,0}}$  确定后, 刀位点  $L_{k,i}$  的坐标仅取决于点  $L_{k,0}$  的坐标  $x_{L_{k,0}}$  和  $y_{L_{k,0}}$ . 因此, 直齿轮铣削的刀具路

径规划可降维处理为齿高方向上的二维刀具路径规划. 基于此, 本文采用等残留高度法<sup>[14]</sup>计算各刀具路径处的刀位点.

在直齿轮精铣削加工中, 假设仅刀具球头部分参与切削. 图3为点 $L_{k,0}$ 处刀具与工件在 $\{S_w\}$ 的坐标系平面 $x_w y_w$ 上的投影, 其中包含以下特征曲线: 理论渐开线齿廓曲线 $\varepsilon_1$ ; 与 $\varepsilon_1$ 保持恒定法向距离 $h$ (齿廓残留高度)的等距曲线 $\varepsilon_2$ ; 与 $\varepsilon_1$ 保持恒定法向距离 $R$ (球头铣刀半径)的等距曲线 $\varepsilon_3$ .

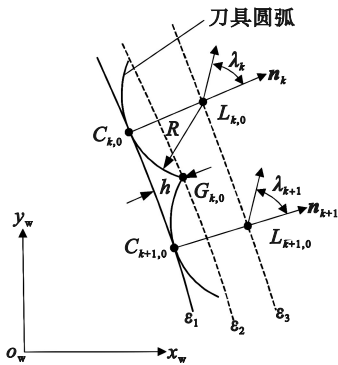


图3 刀位点计算示意图

Fig. 3 Schematic diagram of cutter location point calculation

图3可知, 点 $G_{k,0}$ 是当前刀位点 $L_{k,0}$ 处刀具圆弧与曲线 $\varepsilon_2$ 的交点, 点 $G_{k,0}$ 可通过式(8)求取.

$$\left. \begin{aligned} x_{G_{k,0}} &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \sin(\Omega_S - \tan\alpha + \alpha) + h \cos(\tan\alpha - \Omega_S), \\ y_{G_{k,0}} &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \cos(\Omega_S - \tan\alpha + \alpha) + h \sin(\tan\alpha - \Omega_S), \\ (x_{G_{k,0}} - x_{L_{k,0}})^2 + (y_{G_{k,0}} - y_{L_{k,0}})^2 &= R^2. \end{aligned} \right\} (8)$$

下一刀位点 $L_{k+1,0}$ 与点 $G_{k,0}$ 之间的距离为刀具半径 $R$ , 同时该点也位于曲线 $\varepsilon_3$ 上, 因此 $L_{k+1,0}$ 点可通过式(9)求取.

$$\left. \begin{aligned} x_{L_{k+1,0}} &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \sin(\Omega_S - \tan\alpha + \alpha) + R \cos(\tan\alpha - \Omega_S), \\ y_{L_{k+1,0}} &= \frac{r_b}{\cos\alpha} \cos(\Omega_S - \tan\alpha + \alpha) + R \sin(\tan\alpha - \Omega_S), \\ (x_{G_{k,0}} - x_{L_{k+1,0}})^2 + (y_{G_{k,0}} - y_{L_{k+1,0}})^2 &= R^2. \end{aligned} \right\} (9)$$

设点 $L_{k,0}$ 为已知点, 联立式(8)和式(9), 运用迭代算法可计算出所有刀位点. 具体计算方法可参考文献[15].

### 3 曲面修剪切触区域仿真

#### 3.1 切触区域提取流程

为简化分析范围并提升计算效率, 将研究重

点限定在正常切削阶段的切触区域计算, 不考虑齿顶圆处的非典型切削状态. 如图4所示, 在直齿轮铣削过程中, 刀具路径 $k$ 上各刀位点的切触区域呈现一致的几何特征. 选取单个轮齿铣削过程作为仿真对象, 其中: 初始刀位点 $L_{k,0}$ 定义为切削起始点, 终止刀位点 $L_{k,i}$ 作为切削终点, 以终止点作为切触区域的特征提取点.

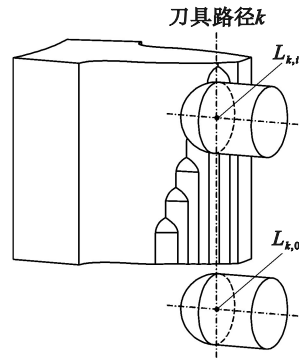


图4 齿轮铣削加工策略

Fig. 4 Machining strategy for gear milling

图5展示了切触区域的提取流程, 主要包括以下步骤:

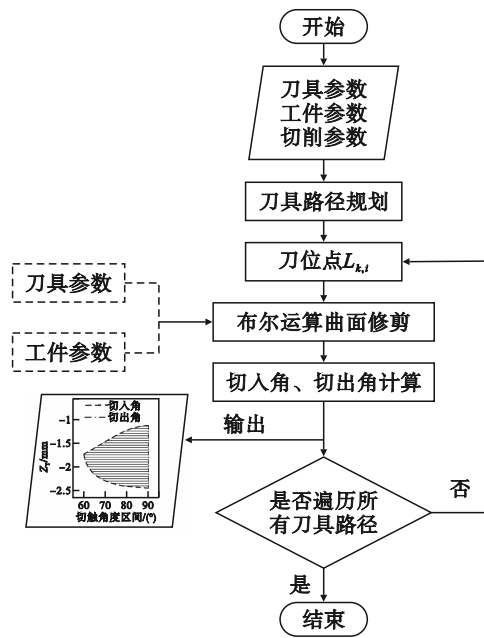


图5 切触区域提取流程

Fig. 5 Flowchart for extracting CWE

1) 刀具路径规划: 基于输入的刀具参数、工件参数和切削参数, 采用等残留高度法进行刀具路径规划;

2) 切触区域提取: 在刀位点 $L_{k,i}$ 处, 通过曲面修剪与布尔运算提取切触区域, 并确定相应的刀具切触角度区间;

3) 迭代计算:判断是否存在未处理的刀具路径.若存在,则继续执行下一路径的切触区域提取,直至完成所有路径计算.

### 3.2 切触区域曲面修剪

如图 6 所示,球头铣刀在刀位点  $L_{k,i}$  处的切触区域  $CWE_k$  由 3 条边界曲线  $B_1, B_2$  和  $B_3$  所包围,  $P_1, P_2$  和  $P_3$  是边界曲线的交点.

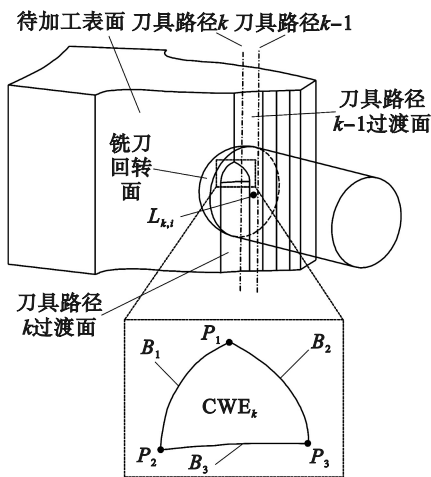


图 6  $CWE_k$  定义  
Fig. 6 Definition of  $CWE_k$

图 7 展示了切触区域  $CWE_k$  的几何表征, 3 条边界曲线的几何定义、具体表征和切触区域划分如下.

#### 3.2.1 边界曲线 $B_1$

几何定义:铣刀回转面与待加工表面的交线;  
具体表征:如图 7a 所示,为半球面  $SS_k$  与渐开面等距面  $IS$  的交线  $C_1$  的部分曲线;

区域划分:如图 7b 所示,  $IS$  以  $C_1$  为边界将  $SS_k$  划分为可能切触区域  $FCWE_1$  和非切触区域  $NonCWE_1$ .

#### 3.2.2 边界曲线 $B_2$

几何定义:铣刀回转面与刀具路径  $k-1$  过渡面的交线;

具体表征:如图 7c 所示,为  $SS_k$  与刀具扫掠面(即半圆柱面  $HCS_{k-1}$ )的交线  $C_2$  部分曲线;

区域划分:如图 7d 所示,  $HCS_{k-1}$  以  $C_2$  为边界将  $SS_k$  划分为  $FCWE_2$  和  $NonCWE_2$ .

#### 3.2.3 边界曲线 $B_3$

几何定义:铣刀回转面与当前刀路  $k$  过渡面的交线;

具体表征:如图 7e 所示,具有双重几何意义:①  $SS_k$  与  $HCS_k$  的交线  $C_3$  的部分曲线;② 辅助平面  $FS_k$  (由点  $L_{k,i}$  和进给方向向量定义)与  $SS_k$  的交线;

区域划分:如图 7f 所示,  $FS_k$  以  $C_3$  为边界将  $SS_k$  划分为  $FCWE_3$  和  $NonCWE_3$ .

图 7g 中切触区域  $CWE_k$  可表示为上述 3 个可能切触区域的相交区域;可能切触区域是由曲面分割代表刀具回转面的半球面  $SS_k$  形成的.因此,  $CWE_k$  可通过渐开面等距面  $IS$ 、辅助平面  $FS_k$  和半圆柱面  $HCS_{k-1}$  依次修剪半球面  $SS_k$  来获取,如图 7h 所示.

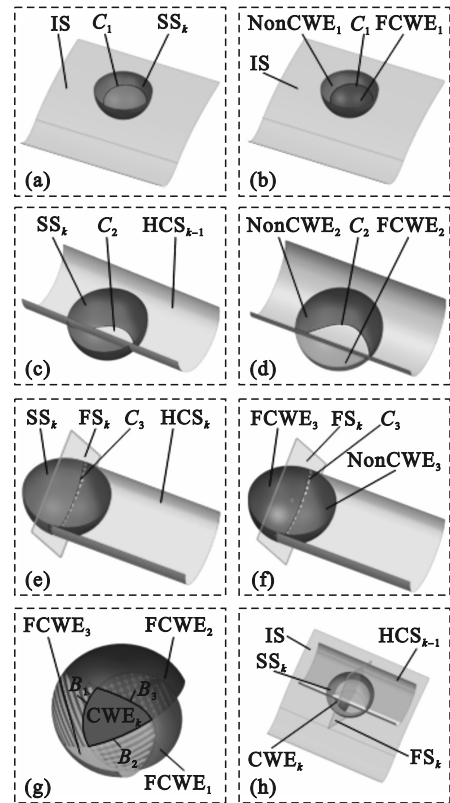


图 7 切触区域  $CWE_k$  的几何表示  
Fig. 7 Geometric representation of  $CWE_k$   
(a)— $B_1$  的具体表征; (b)— $B_1$  的区域划分;  
(c)— $B_2$  的具体表征; (d)— $B_2$  的区域划分;  
(e)— $B_3$  的具体表征; (f)— $B_3$  的区域划分;  
(g)—可能切触区域交集; (h)—切触区域修剪.

通过曲面修剪构造切触区域  $CWE_k$  的过程如图 8 所示.首先建立刀具回转面,即初始可能切触区域  $SS_k$  和渐开面等距面  $IS$ ,通过  $IS$  修剪  $SS_k$ ,得到更新的切触区域  $FCWE_1$ ;其次,构造刀路  $k-1$  的刀具扫掠面  $HCS_{k-1}$ ,通过  $HCS_{k-1}$  修剪  $FCWE_1$  得到更新的切触区域,即部分  $FCWE_2$ ;然后,在  $L_{k,i}$  处构造辅助平面  $FS_k$ ,通过其修剪部分  $FCWE_2$ ,得到最终的结果切触区域  $CWE_k$ ;最后,沿着刀具轴线建立垂直于刀轴的辅助平面  $SP_i$ ,通过其与  $CWE_k$  求交得到表示切触区域的圆弧曲线,进而确定切入角和切出角.

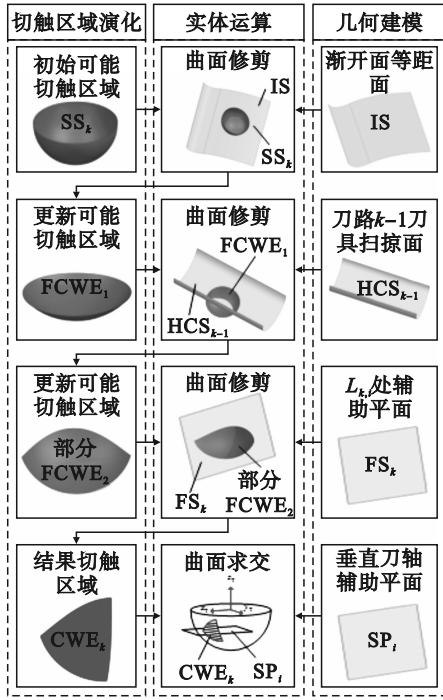


图8 曲面修剪过程

Fig. 8 Surface trimming process

如图9所示,当保持切削参数不变时,刀具偏角 $\lambda_k$ 的变化不会改变切触区域的拓扑结构,即同一刀具路径中刀具姿态 $T_1$ 和 $T_2$ 具有相同的切触区域.因此,在求解不同刀具姿态对应的切触角度区间时,仅需要在相应刀具坐标系下重新进行曲面分割运算即可,有效避免了重复计算,显著提高了计算效率.

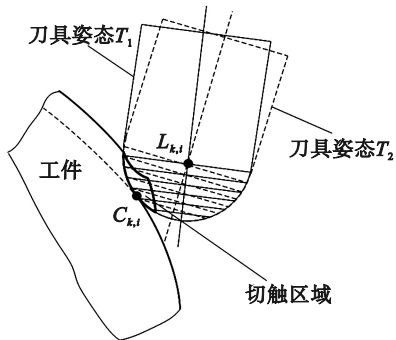


图9 不同刀具姿态切触区域计算

Fig. 9 CWE calculation of different cutter postures

## 4 试验验证与仿真实例

### 4.1 试验方案

仿真与试验所采用的加工参数如表1所示.仿真采用NX 1953 实体建模软件,结合NX/Open 二次开发模块和 Visual Studio 2019 编程环境实

现直齿轮铣削切触区域的计算.齿轮铣削加工采用五轴加工中心 DMU 50,如图10a所示;切触区域边界曲线测量采用19JPC-V 数显万能工具显微镜,如图10b所示.

表1 加工参数  
Table 1 Machining parameters

项目	参数	数值
工件参数	模数 $m_n/mm$	6
	齿数 $z$	20
	分度圆压力角 $\alpha_n/(^\circ)$	20
	齿顶高系数 $h_a^*$	1
	顶隙系数 $c^*$	0.25
	齿廓残留高度 $h/mm$	0.03
刀具参数	齿廓半精加工余量 $T/mm$	0.3
	刀具半径 $R/mm$	3
	螺旋角 $\beta/(^\circ)$	15
切削参数	刀具刃数	2
	每齿进给量 $f/(mm \cdot \text{齿}^{-1})$	0.05
	刀具偏角 $\lambda_k/(^\circ)$	60

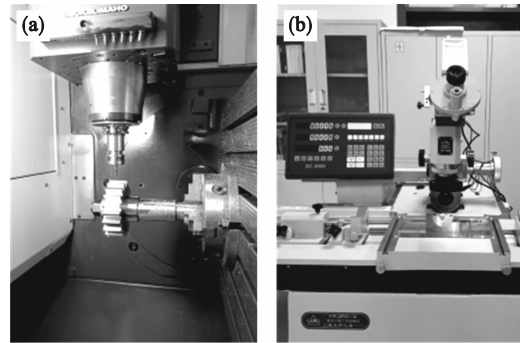


图10 试验加工与测量装置

Fig. 10 Machining and measurement equipment for test

(a)一试验加工机床;(b)一试验测量设备.

### 4.2 仿真精度

图11展示了加工后工件表面的形貌特征,可清晰观察到刀具与工件切触区域的边界痕迹.在边界曲线的测量过程中,以各切触区域的 $P_2$ 点作为基准点,并在测量平面坐标系 $o_c-x_cy_c$ 下进行数据采集,该坐标系与 $\{s_w\}$ 的坐标平面 $y_wz_w$ 平行.图12对比了刀具路径2和4的实测数据与仿真计算结果.其中,切触区域的边界曲线 $P_1P_2$ 和 $P_2P_3$ 的实测结果与仿真计算高度吻合,仅存在微小偏差,主要源于测量误差及工件表面塑性变形的影响.由于工件滑移变形导致边界曲线 $P_1P_3$ 出现模糊现象,但试验数据显示: $P_1, P_3$ 点及其邻近区域的测量点与仿真结果高度吻合,且相邻测点分布趋近理论切削脊线,间接证明了试验与仿真的一

致性.在排除测量误差和材料变形因素后,实验数据与仿真结果表现出良好的匹配性,验证了基于曲面修剪法的直齿轮铣削接触区域仿真方法的准确性.

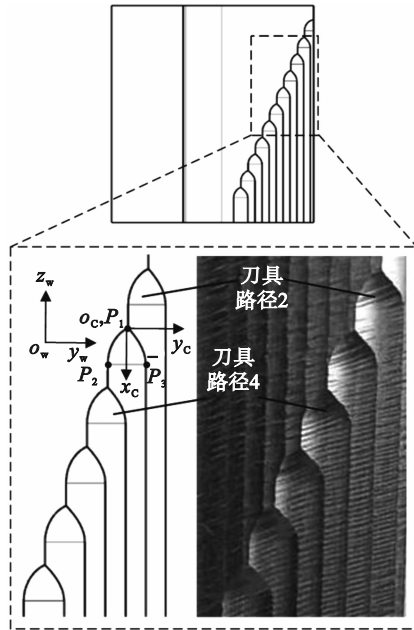


图11 切触区域测量

Fig. 11 CWE measurement

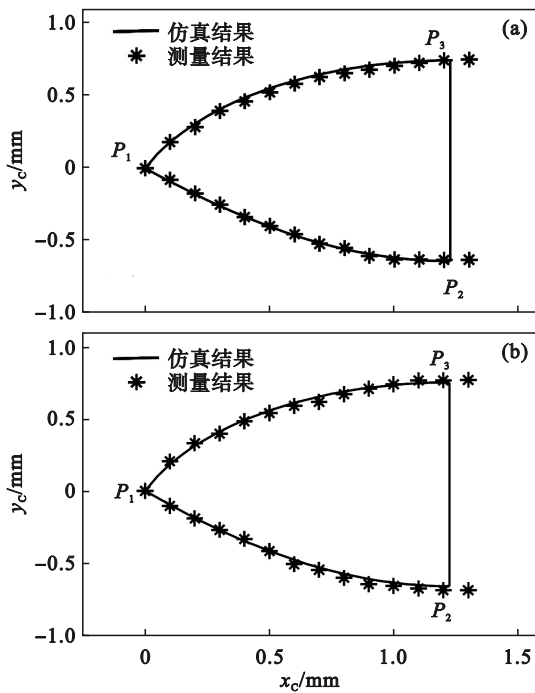


图12 切触区域对比

Fig. 12 Comparison of CWE

(a)一刀具路径2; (b)一刀具路径4.

图13为刀具路径2和4对应的计算切触角度区间.

### 4.3 仿真计算效率

本文通过与文献[11]所采用的方法对比来

验证曲面修剪方法在计算效率上的优越性.忽略刀具路径迭代计算的时间消耗,采用刀具半径 $R=2\text{ mm}$ 的球头铣刀,其余加工参数如表2所示;个人电脑的运行配置为 Intel (R) Core (TM) i7-6700HQ CPU@2.60GHz, 8GB RAM. 部分切触区域面积测量结果(表2)表明,两种方法的计算精度几乎一致,相对误差极小.

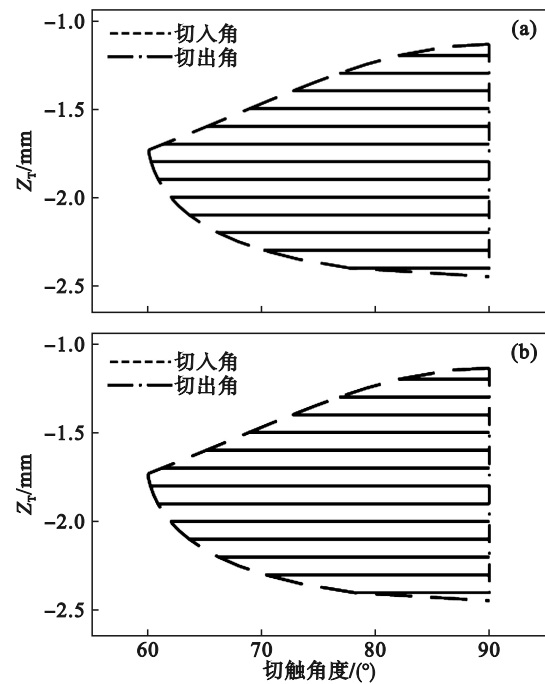


图13 切触角度区间

Fig. 13 Immersion angle

(a)一刀具路径2; (b)一刀具路径4.

表2 曲面修剪法与文献[11]方法的计算精度对比  
Table 2 Comparison of computational accuracy between surface trimming method and method in reference [11]

刀具路 径编号	曲面修剪法 面积/ $\text{mm}^2$	文献[11]方法 面积/ $\text{mm}^2$	前者与后者 相对误差/%
2	1.000 821 967	1.000 860 839	-0.003 9
4	0.998 788 367	0.998 803 806	-0.001 5
6	0.996 226 159	0.996 191 599	0.003 5
8	0.992 532 688	0.992 629 893	-0.009 8
10	0.987 684 473	0.987 808 467	-0.012 6
12	0.979 822 484	0.979 945 277	-0.012 5

计算时间对比分析(图14)表明,曲面修剪法的计算时间较文献[11]方法降低50%以上.这是由于文献[11]方法需要构建完整的刀具扫掠体并实时更新工件几何模型,导致计算复杂度呈几何级数增长.相比之下,曲面修剪法通过简化几何表征显著提升了计算效率.

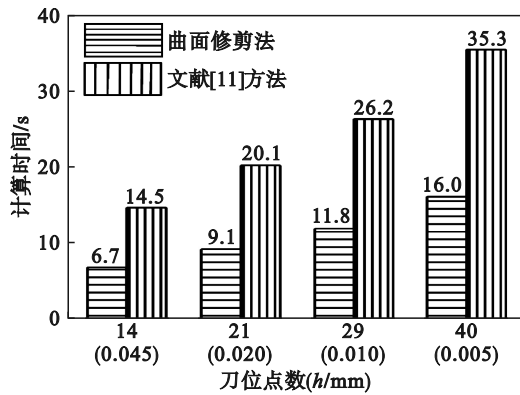


图 14 曲面修剪法与文献[11]方法的计算时间对比  
Fig. 14 Comparison of computing time between surface trimming method and method in reference [11]

## 5 结 论

1) 基于铣刀与工件相对运动的数学建模,融合渐开线齿廓理论与等残余高度法,构建了具有严格理论依据的高精度刀具路径规划算法,为接触区域的计算提供了基础。

2) 基于刀齿扫掠面的半球面近似假设,将接触区域严格定义为由 3 条边界曲线约束的局部球面区域.通过引入曲面修剪算法,实现了接触区域的高效精确提取,并计算出切触角度区间。

3) 试验测量结果与仿真数据的高度吻合验证了曲面修剪法在直齿轮铣削切触区域提取中的准确性.计算时间对比显示,该方法在计算效率上具有一定的优越性。

### 参考文献:

- [1] Staudt J, Löpenhaus C, Klocke F. Performance of gears manufactured by 5-axis milling[J]. *Gear Technology*, 2017, 3: 58-65.
- [2] Bouquet J, Hensgen L, Klink A, et al. Fast production of gear prototypes—a comparison of technologies [J]. *Procedia CIRP*, 2014, 14: 77-82.
- [3] 黎柏春,王振宇,张斌,等.球头铣刀切削刃存在差异的切削力系数辨识[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(9): 1316-1322.  
(Li Bai-chun, Wang Zhen-yu, Zhang Bin, et al. Identification of cutting force coefficients in different cutting edges of ball-end milling cutter [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2019, 40(9): 1316-1322.)
- [4] 董永亨,李淑娟,洪贤涛,等.基于 Z-MAP 方法的球头铣刀铣削力的建模[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(19): 201-212.  
(Dong Yong-heng, Li Shu-juan, Hong Xian-tao, et al. Modeling on the milling force of ball-end milling cutter based on Z-MAP method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(19): 201-212.)
- [5] Wei Z C, Wang M J, Cai Y J, et al. Prediction of cutting force in ball-end milling of sculptured surface using improved Z-map [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2013, 68(5/6/7/8): 1167-1177.
- [6] Qin S Q, Hao Y P, Zhu L D, et al. CWE identification and cutting force prediction in ball-end milling process [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 239: 107863.
- [7] 魏兆成,王敏杰,王学文,等.球头铣刀曲面多轴加工的刀具接触区半解析建模[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(1): 198-205.  
(Wei Zhao-cheng, Wang Min-jie, Wang Xue-wen, et al. A semi-analytical cutter workpiece engagement model for ball end milling of sculptured surface [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(1): 198-205.)
- [8] 董永亨,李淑娟,张倩,等.基于半解析法的球头铣刀静态铣削力的建模[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(11): 282-294.  
(Dong Yong-heng, Li Shu-juan, Zhang Qian, et al. Modeling on static milling force of ball-end-milling cutters based on semi-analytical method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(11): 282-294.)
- [9] Ghorbani M, Movahhedy M R. An analytical model for cutter-workpiece engagement calculation in ball-end finish milling of doubly curved surfaces [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019, 102(5/6/7/8): 1635-1657.
- [10] Yan B L, Xu G F, Lu H, et al. Identification of milling information and cutter-workpiece engagement in five-axis finishing of turbine blades based on NURBS and NC codes [J]. *Journal of Manufacturing Processes*, 2023, 107: 43-56.
- [11] Yang Y, Zhang W H, Wan M, et al. A solid trimming method to extract cutter-workpiece engagement maps for multi-axis milling [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2013, 68(9/10/11/12): 2801-2813.
- [12] Boz Y, Erdim H, Lazoglu I. A comparison of solid model and three-orthogonal dexelfield methods for cutter-workpiece engagement calculations in three- and five-axis virtual milling [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015, 81(5/6/7/8): 811-823.
- [13] 植俊杰,张立强,许洋洋,等.基于接触区域的球头刀五轴加工无颤振刀具姿态研究[J]. *计算机集成制造系统*, 2023, 29(9): 2971-2980.  
(Zhi Jun-jie, Zhang Li-qiang, Xu Yang-yang, et al. Tool posture without chatter in five-axis machining of ball-end milling based on cutter-workpiece engagement [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2023, 29(9): 2971-2980.)
- [14] Feng H Y, Li H W. Constant scallop-height tool path generation for three-axis sculptured surface machining [J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 34(9): 647-654.
- [15] 王振宇,张荣闯,于天彪.圆柱直齿轮铣削加工无干涉刀具路径规划[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2022, 43(7): 988-995.  
(Wang Zhen-yu, Zhang Rong-chuang, Yu Tian-biao. Interference-free tool path generation for milling of spur gears [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2022, 43(7): 988-995.)