

# 基于快速模型预测控制的重型车辆 侧翻稳定性研究

王宏伟, 张晴晴, 汪 洵

(东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘 要:** 为解决重型车辆易发生侧翻的问题,提出一种基于快速模型预测的主动安全控制方法. 首先,建立重型车辆非线性动力学模型,利用T-S模糊方法将非线性系统转化为线性系统;采用分层控制策略,上层设计模型预测控制(model predictive control, MPC)防侧翻控制器获得最优横摆力矩,下层利用单侧车轮控制方式进行制动力分配. 然后,为减少控制器的计算负担,引入Laguerre函数对控制输入序列进行重构,采用原始对偶内点法处理约束条件,实时高效地求解二次规划函数. 最后,在典型工况下进行MATLAB/Simulink和TruckSim联合仿真. 结果表明,相较于传统MPC控制器,所提的快速MPC控制器能够在保证性能的同时有效提高计算效率,可以及时避免车辆侧翻失稳.

**关键词:** 重型车辆;模型预测控制;Laguerre函数;原始对偶内点法;侧翻稳定性

**中图分类号:** U 463.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2025)11-0012-08

## Research on Heavy Vehicle Rollover Stability Based on Fast Model Predictive Control

WANG Hong-wei, ZHANG Qing-qing, WANG Xun

(School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China.  
Corresponding author: WANG Hong-wei, E-mail: wanghw0819@163.com)

**Abstract:** In order to solve the problem that heavy vehicles are prone to rollover, an active safety control method based on fast model prediction was proposed. Firstly, a nonlinear dynamic model of the heavy vehicle was established, and the nonlinear system was transformed into a linear system by the T-S fuzzy method. A hierarchical control strategy was adopted, where the upper layer was designed to obtain the optimal yaw moment by the model predictive control (MPC) anti-rollover controller, and the lower layer utilized the unilateral wheel control method for the allocation of the braking force. Then, in order to reduce the computational burden of the controller, the Laguerre function was introduced to reconstruct the control input sequence, and the constraints were handled by the primal-dual interior point method to solve the quadratic programming function efficiently in real time. Finally, the co-simulation of MATLAB/Simulink and TruckSim was carried out under typical working conditions, and the results show that compared with the traditional MPC controller, the proposed fast MPC controller can effectively improve the computational efficiency while guaranteeing the performance and can avoid the vehicle rollover instability.

**Key words:** heavy vehicle; model predictive control; Laguerre function; primal-dual interior-point method; rollover stability

重型特种车辆在军事国防方面发挥了重要作用,但由于其质心高、质量大的结构特点,导致其在行驶过程中更容易发生侧翻<sup>[1]</sup>.侧翻是一种极其严重的事故,这会使得车辆瞬态失稳,一旦

发生就可能导致严重人员伤亡和财产损失.因此,在车辆运行过程中,对侧翻稳定性进行控制具有十分重要的意义<sup>[2]</sup>.

近年来,已有多种控制算法应用在重型车辆

防侧翻领域<sup>[3-4]</sup>,例如PID控制、滑模控制、鲁棒控制、模糊控制等.虽然上述控制算法可以成功防止车辆侧翻,但难以处理多约束问题.MPC作为一种可以有效处理上述问题的算法,近年来在车辆稳定性控制方面有了越来越多的应用.文献[5]设计了一种分层防侧翻控制策略,采用MPC算法有效防止车辆侧翻.但是传统MPC需要通过滚动优化来确定当前的最优控制策略,计算负担大,减少MPC计算量的问题亟待解决.文献[6-7]提出了一种基于Laguerre函数的模型预测控制,重构控制输入信号,减小系统矩阵维度,提高MPC的计算效率.文献[8]为了提高MPC控制器的动态响应速度,在实际车辆中采用了Laguerre函数,快速求得最优控制输入,及时对车辆的横摆稳定性进行控制.虽然引入Laguerre函数可以提高传统MPC控制器的响应速度,但是二次规划的求解部分仍然比较复杂.文献[9-10]针对MPC控制方法在线计算量大的问题,采用原始对偶内点(primal-dual interior-point, PDIP)法来计算二次规划部分,实时高效地处理了约束条件,通过求解搜索路径和搜索步长快速迭代,求得最优解.

本文建立了纵向车速时变的三自由度车辆侧翻模型,采用T-S模糊方法进行线性化处理.设计了分层控制策略:上层采用MPC控制器,获得维持车辆侧翻稳定性所需的最优横摆力矩,引入Laguerre函数和原始对偶内点法,并将两者有机结合,既对输入序列进行重构,减小了系统矩阵的维度,又实时高效地处理约束条件,加快了MPC控制器的响应速度;下层采用单侧分配方式对附加横摆力矩进行分配.选取双移线和鱼钩工况,通过MATLAB/Simulink与TruckSim联合仿真,验证所提快速MPC算法的有效性.

## 1 系统模型

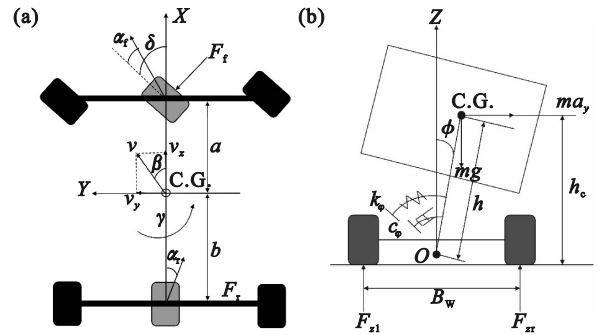
### 1.1 车辆动力学模型

忽略空气动力学的影响,将模型进行简化,建立包含侧向、侧倾、横摆运动的三自由度车辆动力学模型,如图1所示<sup>[11]</sup>.根据上述模型,车辆的动力学方程表示形式如下:

$$\left. \begin{aligned} I_x \ddot{\phi} &= m a_y h \cos \phi + m_s g h \sin \phi - c_\phi \dot{\phi} - k_\phi \phi, \\ m a_y - m_s h \ddot{\phi} &= F_f \cos \delta + F_r, \\ I_z \dot{\gamma} &= F_f a \cos \delta - F_r b + M_z. \end{aligned} \right\} (1)$$

式中: $a_y = \dot{v}_y + v_x \gamma$ 为车辆的侧向加速度; $I_x$ 为整车绕x轴的转动惯量; $I_z$ 为整车绕z轴的转动惯量; $v_x$ 和 $v_y$ 分别为车辆系统的纵向速度和横向速度; $m$ 为整

车质量; $h$ 为车辆质心到侧倾中心的距离; $m_s$ 为簧载质量; $k_\phi$ 和 $c_\phi$ 分别为车辆的等效侧倾刚度和等效阻尼系数; $F_f$ 和 $F_r$ 分别为前、后轮胎的侧偏力; $\gamma$ 为横摆角速度; $a$ 和 $b$ 分别为车辆质心到前、后轴的距离; $\phi$ 为侧倾角; $\delta$ 为前轮转角; $M_z$ 为横摆力矩.



注:图中 $h_c$ 为车辆质心到地面的距离; $B_w$ 为左右车轮的间距; $F_{z1}$ 和 $F_{z2}$ 分别为左右车轮的垂直载荷; $O$ 为侧倾中心; $C.G.$ 为重型汽车簧载质量的中心即质心.

图1 车辆动力学模型

Fig. 1 Vehicle dynamics model

(a)—横向动力学模型;(b)—侧倾平面模型.

前、后轮胎的侧向力表示为

$$\left. \begin{aligned} F_f &= k_f \cdot \alpha_f, \\ F_r &= k_r \cdot \alpha_r. \end{aligned} \right\} (2)$$

式中: $k_f, k_r$ 分别代表前轮与后轮的侧偏刚度; $\alpha_f, \alpha_r$ 分别代表前轮与后轮的侧偏角,对应的几何关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_f &= \delta - \beta - \frac{a\gamma}{v_x}, \\ \alpha_r &= \frac{b\gamma}{v_x} - \beta. \end{aligned} \right\} (3)$$

式中, $\beta$ 为质心侧偏角.

假设侧倾角很小, $\sin \phi = \phi$ ,  $\cos \phi = 1$ ,将式(2)和式(3)代入式(1)中,可得车辆三自由度动力学模型的状态空间方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (4)$$

式中: $\mathbf{x} = [v_y, \gamma, \phi, \dot{\phi}]^T$ 为系统状态; $\mathbf{u} = [\delta, M_z]^T$ 为系统输入;系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 如下所示:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{(k_f + k_r)I_x}{(mI_x - m_s^2 h^2)v_x}, A_{12} = \frac{(k_f b - k_r a)I_x}{(mI_x - m_s^2 h^2)v_x} - v_x, \\ A_{13} &= \frac{m_s h(m_s g h - k_\phi)}{mI_x - m_s^2 h^2}, A_{14} = \frac{-m_s h c_\phi}{mI_x - m_s^2 h^2}, \\ A_{21} &= \frac{k_f b - k_r a}{I_z v_x}, A_{22} = \frac{k_f a^2 + k_r b^2}{I_z v_x}, A_{23} = 0, A_{24} = 0, \\ A_{31} &= 0, A_{32} = 0, A_{33} = 0, A_{34} = 1, \\ A_{41} &= \frac{m_s h(k_f + k_r)}{(mI_x - m_s^2 h^2)v_x}, A_{42} = \frac{m_s h(k_f a - k_r b)}{(mI_x - m_s^2 h^2)v_x}, \\ A_{43} &= \frac{m(k_\phi - m_s g h)}{mI_x - m_s^2 h^2}, A_{44} = \frac{-m c_\phi}{mI_x - m_s^2 h^2}. \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{k_f I_x}{(mI_x - m_s^2 h^2)}, B_{12} = 0, B_{21} = \frac{k_f a}{I_z}, B_{22} = \frac{1}{I_z}, \\ B_{31} &= 0, B_{32} = 0, B_{41} = \frac{m_s h k_f}{(mI_x - m_s^2 h^2)}, B_{42} = 0. \end{aligned} \right\} (6)$$

## 1.2 变速度车辆模型 T-S 模糊线性化

状态空间方程(4)中的纵向车速是时变的,模糊规则如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \text{s.t. } \mathbf{v}(t) &= \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_q(t)\} \subset F_{ij}, \\ i &= 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} (7)$$

式中:  $\mathbf{A}_i$  为车辆状态矩阵;  $\mathbf{v}(t)$  为车辆速度;  $F_{ij}$  为模糊集;  $q$  为车辆速度分量的数量;  $r$  为 if-then 规则的数量.

$$V_i(\mathbf{v}(t)) = \prod_{j=1}^q F_{ij}(v_j(t)). \quad (8)$$

式中,  $V_i(\mathbf{v}(t))$  表示  $v_j(t)$  在  $F_{ij}$  中的隶属度.

隶属度函数表示为

$$O_i(\mathbf{v}(t)) = \frac{V_i(\mathbf{v}(t))}{\sum_{i=1}^r V_i(\mathbf{v}(t))}. \quad (9)$$

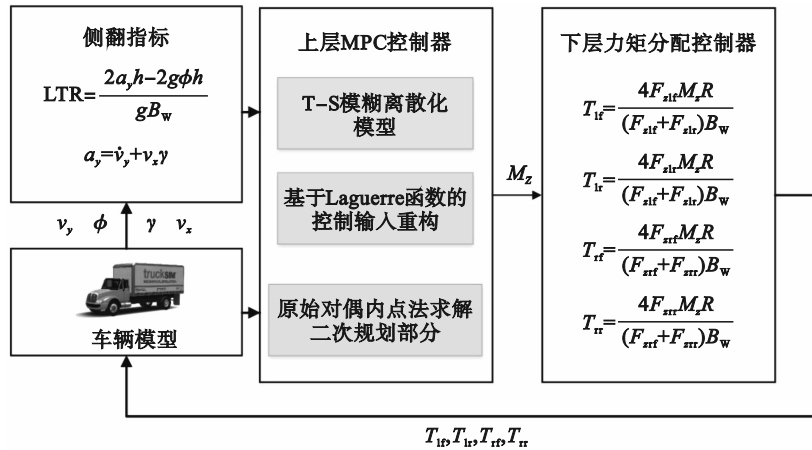
建立车辆的 T-S 模糊线性化模型:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r O_i(\mathbf{v}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}. \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\text{式中: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{y} \text{ 为输出矩阵.}$$

## 2 防侧翻控制系统设计

针对重型车辆侧翻稳定性问题,提出一种分层控制策略.选择横向载荷转移率(lateral load transfer ratio, LTR)作为侧翻评价指标,设计侧翻预警系统.上层采用 MPC 控制器计算维持车辆侧翻稳定性所需的横摆力矩;下层采用单侧方式分配力矩.随后,引入 Laguerre 函数和原始对偶内点法,以减小 MPC 控制器的计算量.侧翻稳定性的整体控制框图如图 2 所示.



注:图中  $T_{lr}$ ,  $T_{lr}$ ,  $T_{rr}$  和  $T_{rr}$  分别为左前轮、左后轮、右前轮和右后轮力矩;  $F_{zl}$ ,  $F_{zl}$ ,  $F_{zr}$  和  $F_{zr}$  分别代表左前轮、左后轮、右前轮和右后轮垂直载荷;  $R$  为车轮半径.

图2 侧倾稳定性控制框图

Fig. 2 Rollover stability control block diagram

### 2.1 侧翻预警系统

LTR 反映车辆侧翻风险的大小,其定义如下<sup>[12]</sup>:

$$\text{LTR} = \frac{F_{zr} - F_{zl}}{F_{zr} + F_{zl}} \quad (11)$$

由于  $F_{zl}$  和  $F_{zr}$  难以进行实时测量,以图 1 中侧倾中心  $O$  为参考点列力矩平衡方程:

将 LTR 转换为容易测量的形式,得

$$\left. \begin{aligned} F_{zl} \frac{B_w}{2} + m_s a_y h \cos \phi + m_s g h \sin \phi - F_{zr} \frac{B_w}{2} &= 0, \\ F_{zl} + F_{zr} &= mg, \\ h \cos \phi &\approx h, \\ h \sin \phi &\approx h \phi. \end{aligned} \right\} (12)$$

将式(12)代入式(11)中,得

$$\text{LTR} = \frac{2(\dot{v}_y + v_x \gamma)h - 2g\phi h}{gB_w}. \quad (13)$$

LTR 是随速度变化的函数,因此,需要研究 LTR 在时变速度条件下的预警情况.当 LTR 大于安全阈值时,车辆具有不稳定倾向,控制器需进行防侧翻控制.

### 2.2 防侧翻控制器设计

选取二自由度车辆模型的横摆角速度  $\gamma_s$  和质心侧偏角  $\beta_s$  的稳态响应值作为参考值<sup>[13]</sup>:

$$\gamma_s = \frac{v_x \delta}{(a+b)(1+k_{us} v_x^2)}, \quad (14)$$

$$\beta_s = \frac{l_r \delta}{(a+b)(1+k_{us} v_x^2)} + \frac{ml_r v_x \delta}{k_f(a+b)(1+k_{us} v_x^2)}. \quad (15)$$

式中:  $k_{us} = \frac{m}{(a+b)} \left( \frac{a}{k_f} - \frac{b}{k_r} \right)$  为转向稳定性系数;  $l_f, l_r$  为前后轴到车辆质心的距离.

考虑路面最大附着系数的影响, 可得二者最大值:

$$\gamma_{\max} = \frac{\mu g}{v_x}, \quad (16)$$

$$\beta_{\max} = \mu g \left[ \frac{b}{v_x^2} + \frac{ma}{k_2(a+b)} \right]. \quad (17)$$

式中,  $\mu$  为路面附着系数.

由此可计算得横摆角速度  $\gamma_d$ 、质心侧偏角  $\beta_d$ 、横向速度  $v_{y,d}$  的理想值如下:

$$\gamma_d = \min(|\gamma_s|, |\gamma_{\max}|) \cdot \text{sgn}(\gamma_s), \quad (18)$$

$$\beta_d = \min(|\beta_s|, |\beta_{\max}|) \cdot \text{sgn}(\beta_s), \quad (19)$$

$$v_{y,d} = v_x \beta_d. \quad (20)$$

将式(10)进行离散化处理, 可得

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r O_i(\mathbf{v}(k)) (\mathbf{A}_M \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_M \mathbf{u}(k)), \quad (21)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k).$$

$$\text{式中: } \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} v_y(k+1) \\ \gamma(k+1) \\ \phi(k+1) \\ \dot{\phi}(k+1) \end{bmatrix}; \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} v_y(k) \\ \gamma(k) \\ \phi(k) \\ \dot{\phi}(k) \end{bmatrix}; \mathbf{A}_M =$$

$1 + \mathbf{A}_i T$  为离散状态转移矩阵;  $\mathbf{B}_M = T \mathbf{B}$  为离散化后的输入矩阵;  $T$  为采样周期.

MPC 控制器的目标函数为

$$\mathbf{J} = \sum_{z=1}^{N_p} \|\mathbf{y}(k+z) - \mathbf{y}_d(k+z)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{z=0}^{N_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+z)\|_{\mathbf{R}}^2. \quad (22)$$

式中:  $N_p$  表示预测时域;  $N_c$  表示控制时域;  $\mathbf{y}$  为输出量预测值;  $\mathbf{y}_d$  为输出量期望值;  $\Delta \mathbf{u}$  为控制量增量;  $\mathbf{Q}$  为输出权重矩阵;  $\mathbf{R}$  为控制量增量权重矩阵;  $z$  为当前时刻到未来时刻的步数.

控制量  $\mathbf{u}$ 、控制量增量  $\Delta \mathbf{u}$  及输出量  $\mathbf{y}$  的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{\min}(k+z) &\leq \Delta \mathbf{u}(k+z) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}(k+z), \\ -\mathbf{u}_{\min}(k+z) + \mathbf{u}(k-1) &\leq \mathbf{u}(k+z) \leq \\ &-\mathbf{u}_{\max}(k+z) + \mathbf{u}(k-1), \\ \mathbf{y}_{\min}(k+z) &\leq \mathbf{y}(k+z) \leq \mathbf{y}_{\max}(k+z). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将目标函数转换为易于求解的二次规划形式:

$$\left. \begin{aligned} \min \mathbf{J} &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_1 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_1^T \Delta \mathbf{u}, \\ \text{s.t. } \mathbf{A}_c \Delta \mathbf{u} &\leq \mathbf{b}_c. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中:  $\mathbf{A}_c$  为二次规划约束矩阵;  $\mathbf{b}_c$  为约束向量;  $\mathbf{H}_1 = 2\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \mathbf{R}$ ;  $\mathbf{f}_1^T = 2\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \sum_{i=1}^r O_i(\mathbf{v}(k)) \mathbf{A}_M \mathbf{x} - 2\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y}_d$ ;  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^r O_i(\mathbf{v}(k)) \mathbf{B}_M$ ;  $\mathbf{x}$  为预测状态序列;  $\mathbf{Y}_d$  为期望输出序列.

上层 MPC 控制器获得横摆力矩以确保车辆稳定运行, 而下层控制器的主要目的是对力矩进行合理分配. 采用单侧分配的方法将横摆力矩分配给每个车轮, 这样可以避免由于单个车轮制动压力过大, 而出现抱死现象, 具体力矩分配情况如下:

$$T_{lf} = \frac{4F_{zlf} M_z R}{(F_{zlf} + F_{zlr}) B_w}, \quad (25)$$

$$T_{lr} = \frac{4F_{zlr} M_z R}{(F_{zlf} + F_{zlr}) B_w}, \quad (26)$$

$$T_{rf} = \frac{4F_{zrf} M_z R}{(F_{zrf} + F_{zrr}) B_w}, \quad (27)$$

$$T_{rr} = \frac{4F_{zrr} M_z R}{(F_{zrf} + F_{zrr}) B_w}. \quad (28)$$

### 2.3 MPC 控制算法改进

由于 MPC 控制器中  $N_p$  和  $N_c$  的取值影响控制效果, 当  $N_p$  和  $N_c$  取值较大时, 控制器性能较好, 但预测模型内部的参数矩阵维度随之增加, 导致控制器计算量增大. 因此引入 Laguerre 函数, 在保证控制器性能的前提下, 减少计算量, 提高系统的运行速度.

Laguerre 函数通过逼近控制输入  $\Delta \mathbf{u}$  来减少计算负担, 其正交变换如下所示:

$$\Gamma_N(z_a) = \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz_a^{-1}} \left( \frac{z_a^{-1}-p}{1-pz_a^{-1}} \right)^{N-1}. \quad (29)$$

式中:  $N$  是 Laguerre 函数的级数;  $p$  是 Laguerre 函数的极点,  $0 < p < 1$ ;  $z_a$  是正交变换的复频域变量.

Laguerre 函数的序列表示为向量形式:

$$\mathbf{L}(k) = [l_1(k), l_2(k), \dots, l_N(k)]^T. \quad (30)$$

相邻时刻离散 Laguerre 函数之间的递推关系如下所示:

$$\mathbf{L}(k+1) = \mathbf{A}_L \mathbf{L}(k). \quad (31)$$

式中:  $\mathbf{A}_L$  为 Laguerre 函数状态转移矩阵,

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ \theta & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-2} p^{N-2} \theta & (-1)^{N-3} p^{N-3} \theta & \dots & p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(0) = \sqrt{\theta} [1, -p, \dots, (-1)^{N-1} p^{N-1}]^T, \quad \theta = (1-p^2).$$

$\theta$  为 Laguerre 函数极点  $p$  推导的归一化系数.

因此,  $k+z$  时刻的控制增量由 Laguerre 项表示如下:

$$\Delta \mathbf{u}(k+z) = \mathbf{L}(z)^T \boldsymbol{\eta}, \quad (32)$$

$$\mathbf{u}(k+z) = \mathbf{u}(k-1) + \sum_{i=0}^z \mathbf{L}(i)^T \boldsymbol{\eta}. \quad (33)$$

式中:  $\mathbf{L}(z) = [\mathbf{L}_1(z), \mathbf{L}_2(z), \dots, \mathbf{L}_N(z)]^T$ ,  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_N]^T$  表示 Laguerre 函数的系数矩阵.

预测模型表示为

$$\mathbf{x}(k+z|k) = \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_i(\mathbf{v}(k)) \left[ \mathbf{A}_M^z \mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{z-1} \mathbf{A}_M^{z-i-1} \mathbf{B}_M \mathbf{L}(i)^T \boldsymbol{\eta} \right]. \quad (34)$$

具有约束的目标函数可以重构为

$$\mathbf{J} = \sum_{z=1}^{N_c} \left\| \mathbf{y}(k+z|k) - \mathbf{y}_d(k+z) \right\|_Q^2 + \sum_{z=0}^{N_c-1} \left\| \mathbf{L}(z)^T \boldsymbol{\eta} \right\|_R^2. \quad (35)$$

用 Laguerre 函数的正交性简化式(35)的第二项, 目标函数可以改写为

$$\mathbf{J} = \sum_{z=1}^{N_c} \left\| \mathbf{y}(k+z|k) - \mathbf{y}_d(k+z) \right\|_Q^2 + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}. \quad (36)$$

将采用 Laguerre 函数逼近后的控制输入代入约束条件可得

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{\min}(k+z) &\leq \mathbf{L}(z)^T \boldsymbol{\eta} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}(k+z), \\ -\mathbf{u}_{\min}(k+z) + \mathbf{u}(k-1) &\leq \mathbf{u}(k-1) + \sum_{i=0}^z \mathbf{L}(i)^T \boldsymbol{\eta} \leq \\ &-\mathbf{u}_{\max}(k+z) + \mathbf{u}(k-1), \\ \mathbf{y}_{\min}(k+z) &\leq \mathbf{y}(k+z) \leq \mathbf{y}_{\max}(k+z). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

将简化后的目标函数表示为二次型形式:

$$\left. \begin{aligned} \min \mathbf{J} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_2^T \boldsymbol{\eta}, \\ \text{s.t. } \mathbf{A}_c \boldsymbol{\eta} &\leq \mathbf{b}_c. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

式中:  $\mathbf{H}_2$  为二次项系数矩阵,  $\mathbf{H}_2 =$

$$2 \sum_{z=1}^{N_c} \boldsymbol{\sigma}(z) \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}(z)^T + \mathbf{R}; \mathbf{f}_2 \text{ 为一次性系数向量, } \mathbf{f}_2 =$$

$$2 \sum_{z=1}^{N_c} \boldsymbol{\sigma}(z) \mathbf{Q} \cdot \left( \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_i(\mathbf{v}(k)) \mathbf{A}_M^z \mathbf{x}(k) - \mathbf{y}_d(k+z) \right);$$

$\boldsymbol{\sigma}(z)$  为权重系数矩阵,  $\boldsymbol{\sigma}(z)^T = \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_i(\mathbf{v}(k)) \cdot$

$$\sum_{i=1}^{z-1} \mathbf{A}_M^{z-i-1} \mathbf{B}_M \mathbf{L}(i).$$

引入 Laguerre 函数后, 利用级数  $N$  和极点  $p$  代替控制时域  $N_c$ . 当  $p=0$  时,  $N=N_c$ ; 当  $0 < p < 1$

时,  $N$  明显小于  $N_c$ , 系统的矩阵维度减小. 引入 Laguerre 函数可以在保证控制效果的同时, 还能降低 MPC 控制器的计算量. 然而, 控制器的二次规划求解过程仍存在计算复杂度高的问题. 为此采用原始对偶内点法处理约束条件, 在保证数值稳定性的前提下快速迭代求解出维持车辆稳定所需的最优横摆力矩.

将松弛向量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  引入式(38)中, 将不等式约束转换为等式约束, 可得原问题如下:

$$\left. \begin{aligned} \min \mathbf{J}_p &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_2^T \boldsymbol{\eta}, \\ \text{s.t. } \mathbf{A}_c \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{b}_c, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中,  $\mathbf{J}_p$  为原问题的目标函数.

对偶问题为

$$\left. \begin{aligned} \max \mathbf{J}_D &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b}_c, \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

式中:  $\mathbf{J}_D$  为对偶问题的目标函数;  $\boldsymbol{\lambda}$  为拉格朗日乘子.

扰动 KKT 条件表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_c \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{b}_c, \boldsymbol{\varepsilon} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{M} \mathbf{Y} \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{e}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式中: 矩阵  $\mathbf{M}$  为对偶间隙的权重矩阵; 对角矩阵  $\mathbf{Y} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m_1})$ ;  $\boldsymbol{e} \in \mathbf{R}^{m_1}$ ;  $m_1$  为向量  $\boldsymbol{e}$  的维度;  $\boldsymbol{\tau}$  为对偶间隙参数; 对偶间隔表示为

$$\delta_{\text{PD}} = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\varepsilon} = m_1 \boldsymbol{\tau}. \quad (42)$$

当  $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $\delta_{\text{PD}} \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Z}^{(k)} = [\boldsymbol{\eta}^{(j)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}, \boldsymbol{\lambda}^{(j)}]$  为当前的迭代点;  $k, j$  为不同序列的迭代次数;  $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = [\Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)}]$  为当前的搜索方向;  $\Delta \boldsymbol{\eta}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}$  分别为  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  的迭代增量.

将  $\mathbf{Z}^{(j+1)}$  代入扰动 KKT 条件中, 通过牛顿迭代法求解搜索方向:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_2 (\boldsymbol{\eta}^{(j)} + \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}) + \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_c^T (\boldsymbol{\lambda}^{(j)} + \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{Y}^{(j)} \boldsymbol{e} + \mathbf{M}^{(j)} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} + \mathbf{Y}^{(j)} \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)} &= \boldsymbol{\tau}^{(j+1)} \boldsymbol{e}, \\ \mathbf{A}_c (\boldsymbol{\eta}^{(j)} + \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}) + (\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}) &= \mathbf{b}_c. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

将式(43)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_c^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(j)} & \mathbf{Y}^{(j)} \\ \mathbf{A}_c & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\lambda}^{(j)} - \mathbf{f}_2 - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\eta}^{(j)} \\ \boldsymbol{\tau}^{(j+1)} \boldsymbol{e} - \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{Y}^{(j)} \boldsymbol{e} \\ \mathbf{b}_c - \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} - \mathbf{A}_c \boldsymbol{\eta}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

对式(44)进行变换, 得到如下形式:

$$\begin{bmatrix} H_2 \boldsymbol{\eta}^{(j)} + \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\lambda}^{(j)} \\ (\mathbf{Y}^{(j)})^{-1} \boldsymbol{\tau}^{(j+1)} \mathbf{e} - (\mathbf{Y}^{(j)})^{-1} \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{Y}^{(j)} \mathbf{e} \\ \mathbf{b}_c - \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} - \mathbf{A}_c \boldsymbol{\eta}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\eta^{(j)} \\ -\mathbf{v}_\varepsilon^{(j)} \\ \mathbf{v}_\lambda^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

式中,  $\mathbf{v}_\eta^{(j)}, \mathbf{v}_\varepsilon^{(j)}, \mathbf{v}_\lambda^{(j)}$  分别为左边矩阵元素的等效代替。

解决以下线性规划问题:

$$\min \frac{1}{2} [\Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}]^T \mathbf{H}_2 \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)} + (\Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)})^T \mathbf{f}_2^{(j)}. \quad (46)$$

式中:  $\mathbf{H}_2^{(j)} = \mathbf{H}_2 + \mathbf{A}_c^T (\mathbf{Y}^{(j)})^{-1} \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{A}_c$ ;  $\mathbf{f}_2^{(j)} = \mathbf{v}_\eta^{(j)} -$

$$\mathbf{A}_c^T [\mathbf{v}_\varepsilon^{(j)} + (\mathbf{Y}^{(j)})^{-1} \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{v}_\lambda^{(j)}].$$

求得搜索方向为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)} &= -(\mathbf{H}_2^{(j)})^{-1} \mathbf{f}_2^{(j)}, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} &= -\mathbf{v}_\varepsilon^{(j)} - \mathbf{A}_c \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}, \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)} &= \mathbf{v}_\lambda^{(j)} - (\mathbf{Y}^{(j)})^{-1} \mathbf{M}^{(j)} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

计算搜索步长  $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$  为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{P, \min}^{(j)} &= \min \left\{ \frac{-(\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)})_i}{(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)})_i} \mid (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)})_i < 0, i = 1, \dots, m_1 \right\}, \\ \alpha_{D, \min}^{(j)} &= \min \left\{ \frac{-(\boldsymbol{\lambda}^{(j)})_i}{(\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)})_i} \mid (\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)})_i < 0, i = 1, \dots, m_1 \right\}, \\ \boldsymbol{\alpha}^{(j)} &= \min \{1, 0.9999 \alpha_{P, \min}^{(j)}, 0.9999 \alpha_{D, \min}^{(j)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式中:  $\alpha_{P, \min}^{(j)}$  为最小原始步长;  $\alpha_{D, \min}^{(j)}$  为最小对偶步长。

更新迭代点:

$$\mathbf{Z}^{(j+1)} = \mathbf{Z}^{(j)} + [\Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(j)}]^T \boldsymbol{\alpha}^{(j)}. \quad (49)$$

当对偶间隔  $\delta_{PD}^{(j+1)}$  满足精度要求时, 迭代过程停止, 此时原始对偶内点法的解为  $\mathbf{Z}^* = [\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ , 其中  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$  分别为  $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}$  的最优解。将  $\boldsymbol{\eta}^*$  代入式(33), 可计算维持车辆稳定行驶所需的横摆力矩。

### 3 仿真验证

为了验证本文所提的快速 MPC 控制器的实际性能与有效性, 采用 MATLAB/Simulink 和 TruckSim 联合仿真进行验证。选择双移线和鱼钩两种典型工况, 分别针对传统 MPC、基于 Laguerre 函数的 MPC (LMPC) 以及原始对偶内点法改进的 LMPC (PDIP-LMPC) 进行对比分析。仿真中所

使用的车辆参数如表 1 所示<sup>[14]</sup>:

表 1 车辆参数  
Table 1 Vehicle parameters

车辆参数	数值
$m/\text{kg}$	18 300
$m_s/\text{kg}$	16 800
$h/\text{m}$	0.8
$a/\text{m}$	3.4
$b/\text{m}$	1.6
$I_x/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	7 695.6
$I_z/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	30 782.4
$B/\text{m}$	2.1
$c_\varphi/(\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1})$	487 050
$k_\varphi/(\text{kN} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1})$	4 000
$k_r/(\text{kN} \cdot \text{rad}^{-1})$	150
$k_s/(\text{kN} \cdot \text{rad}^{-1})$	350

#### 3.1 双移线工况仿真

车辆的初始速度设置为 80 km/h, 路面附着系数设置为 0.85, 侧翻阈值设置为 0.8。在双移线工况下, LTR 指标、横摆角速度和侧翻角的仿真结果分别如图 3~图 5 所示。

由图 3 可知, 在双移线工况下, LTR 指标始终处于设定的阈值内, 并且最终稳定于 0, 车辆未发生侧翻, 3 种控制策略均能维持车辆稳定。由图 4 和图 5 可知, 当车辆转角发生变化时, 均为 PDIP-LMPC 先响应, 表明引入 Laguerre 函数和 PDIP 算法后提高了控制器的响应速度, 控制器能快速对车辆进行控制, 且车辆的各个性能指标幅值均有小幅度减小, 车辆稳定性得到进一步提高。

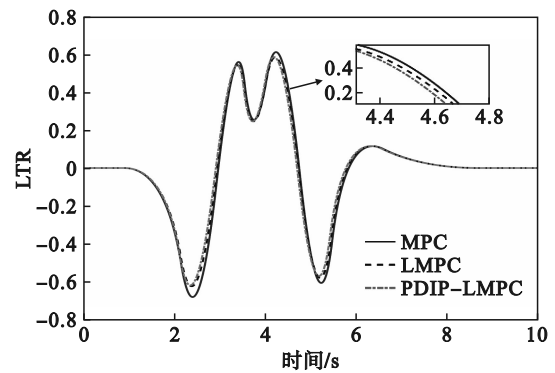


图 3 LTR 指标

Fig. 3 LTR index

#### 3.2 鱼钩转向工况仿真

在鱼钩转向工况下, 车辆的转角如图 6 所示。

车辆的初始速度和路面附着系数与双移线工况相同。LTR 指标、横摆角速度和侧翻角的仿真结果分别如图 7~图 9 所示。

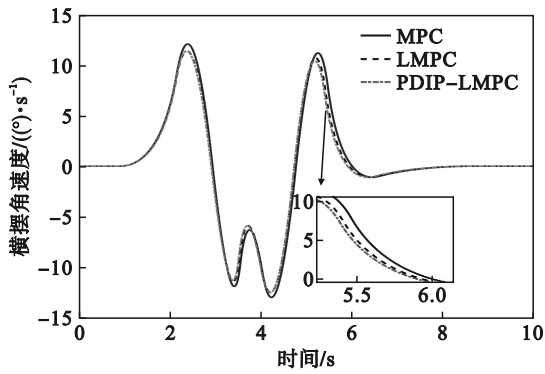


图 4 横摆角速度  
Fig. 4 Yaw velocity

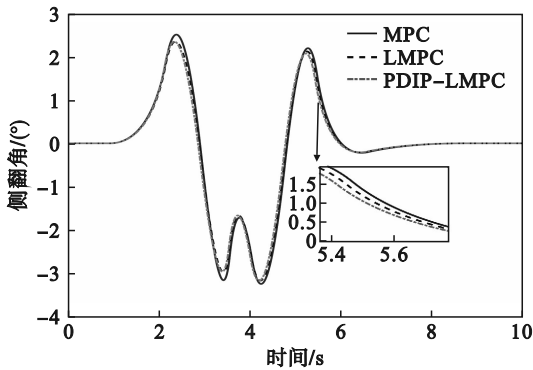


图 5 侧翻角  
Fig. 5 Rollover angle

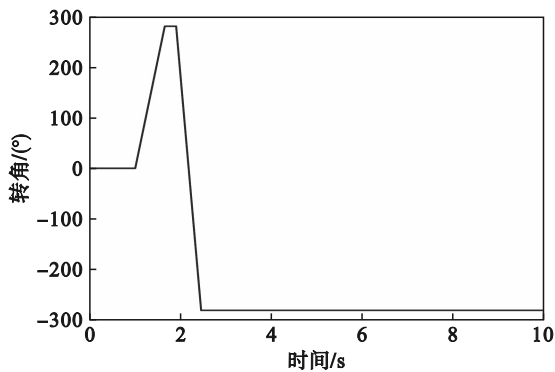


图 6 转角输入  
Fig. 6 Steering input

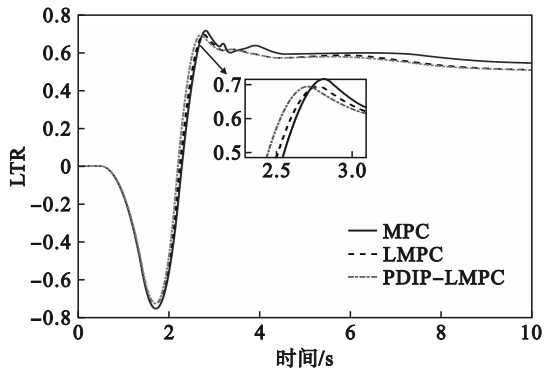


图 7 LTR 指标(鱼钩转向工况)  
Fig. 7 LTR index(fishhook condition)

由图 7 可知,在鱼钩转向工况下,LTR 指标始终处于可控范围内,说明车辆未发生侧翻.由图 8

和图 9 可知,当车辆转角变化时,PDIP-LMPC 表现出最快的响应速度.结果表明,在引入 Laguerre 函数和 PDIP 算法对传统 MPC 进行改进后,控制器的响应速度加快,能够快速控制车辆的侧翻稳定性.同时 PDIP-LMPC 控制器使车辆的横摆角速度和侧翻角的峰值减小,并且在 2 s 以后,各性能指标的平滑性也变得更好,车辆稳定性更优.

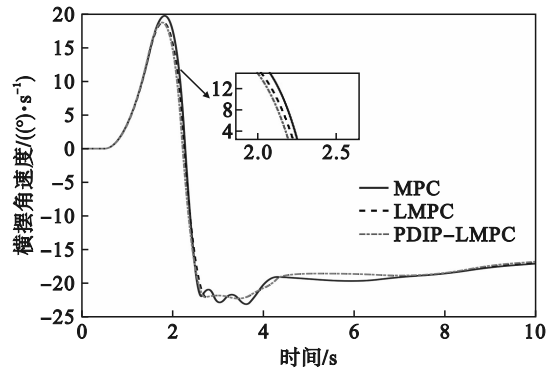


图 8 横摆角速度(鱼钩转向工况)  
Fig. 8 Yaw velocity(fishhook condition)

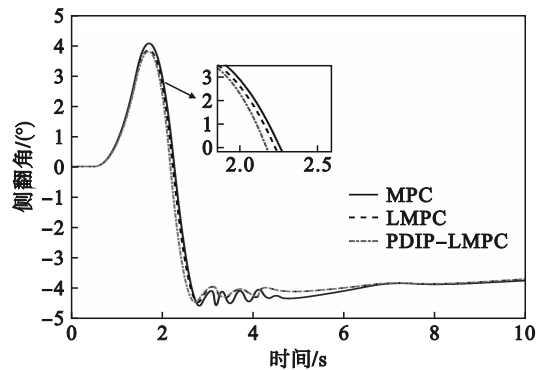


图 9 侧翻角(鱼钩转向工况)  
Fig. 9 Rollover angle(fishhook condition)

### 4 结 语

本文针对重型车辆易发生侧翻的问题,建立 T-S 模糊纵向速度时变线性化模型,设计基于 MPC 的防侧翻控制策略,通过引入 Laguerre 函数和 PDIP 算法减轻了传统 MPC 控制器的计算负担.提出的分层控制策略能够快速高效地维持车辆侧翻稳定性.通过 MATLAB/Simulink 与 TruckSim 联合仿真验证,结果表明,在极端转向工况下,提出的分层控制策略能够有效维持车辆的侧翻稳定性;相较于传统 MPC 和 LMPC,PDIP-LMPC 具有最快的响应速度,且各性能指标的平滑性均得到改善.该控制策略显著降低了传统 MPC 控制器的计算量,使控制器能够快速高效地防止车辆侧翻.

(下转第 105 页)